# Kanonický tvar kvadratických forem

Nechť $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ je euklidovský prostor dimenze $n$, tj. vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel konečné dimenze $n$ se zadaným skalárním součinem. Nechť $\alpha = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n)$ je zvolená ortonormální báze v euklidovském prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$. Mějme kvadratickou formu

$$F : \mathbf{U} \to \mathbb{R}$$

na vektorovém prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ a uvažme symetrickou bilineární formu

$$f : \mathbf{U} \times \mathbf{U} \to \mathbb{R}$$

na vektorovém prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ vytvářející kvadratickou formu $F$ tím způsobem, že pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ je $F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Symetrická bilineární forma $f$ s touto vlastností je kvadratickou formou $F$ určena jednoznačně. Buď $A$ matice symetrické bilineární formy $f$ v bázi $\alpha$. To znamená, že máme $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,n}$, kde pro každá $i, j \in \{1, \dots, n\}$ je $a_{ij} = f(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$. Je tedy $A$ čtvercová symetrická matice řádu $n$ nad $\mathbb{R}$. Pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a jeho souřadnice $(\mathbf{u})_\alpha$ v bázi $\alpha$ zapsané do sloupce pak máme vztah

$$F(\mathbf{u}) = (\mathbf{u})_\alpha^\top \cdot A \cdot (\mathbf{u})_\alpha.$$

Buď dále $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na vektorovém prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ definovaný tím, že $A$ je jeho maticí ve výše zvolené bázi $\alpha$ prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$, tedy takový, že $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$. Pak pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, jeho souřadnice $(\mathbf{u})_\alpha$ v bázi $\alpha$ zapsané do sloupce a pro souřadnice $(\varphi(\mathbf{u}))_\alpha$ jeho obrazu při lineárním zobrazení $\varphi$ rovněž v bázi $\alpha$ zapsané taktéž do sloupce máme vztah

$$(\varphi(\mathbf{u}))_\alpha = A \cdot (\mathbf{u})_\alpha.$$

Poněvadž ovšem matice $A$ je symetrická a $\alpha$ je ortonormální báze euklidovského prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$, je $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ samoadjungovaný operátor na euklidovském prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$. Připomeňme v této souvislosti znovu, že všechna vlastní čísla symetrické matice $A$ řádu $n$ nad $\mathbb{R}$ jsou reálná a že jejich počet, berou-li se v potaz i jejich algebraické násobnosti, je roven $n$. Vlastní čísla této symetrické matice $A$ řádu $n$ nad $\mathbb{R}$ jsou ovšem právě vlastní čísla výše definovaného samoadjungovaného operátoru $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$. Pro každé vlastní číslo tohoto samoadjungovaného operátoru $\varphi$ dále platí, že jeho algebraická násobnost je rovna jeho geometrické násobnosti. Navíc vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům zmíněného samoadjungovaného operátoru $\varphi$ jsou navzájem ortogonální.

Nechť tedy $\mu_1, \dots, \mu_k$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla výše zmíněné symetrické matice $A$ a nechť $\ell_1, \dots, \ell_k$ jsou po řadě jejich algebraické násobnosti. Nechť pro každé $\iota \in \{1, \dots, k\}$ je

$$\mathbf{V}_\iota = \{\mathbf{u} \in \mathbf{U} : \varphi(\mathbf{u}) = \mu_\iota \cdot \mathbf{u}\}$$

podprostor všech vlastních vektorů samoadjungovaného operátoru $\varphi$ příslušných vlastnímu číslu $\mu_\iota$. Pak pro každé $\iota \in \{1, \dots, k\}$ je $\ell_\iota$ dimenze uvedeného invariantního podprostoru $\mathbf{V}_\iota$. Navíc pak $\mathbf{U} = \mathbf{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_k$ je ortogonální součet těchto invariantních podprostorů. Vyberme pro každé $\iota \in \{1, \ldots, k\}$ ortonormální bázi $\beta_\iota = (\mathbf{h}_{\iota 1}, \ldots, \mathbf{h}_{\iota \ell_\iota})$ zmíněného invariantního podprostoru $\mathbf{V}_\iota$. Pak posloupnost vektorů

$$\beta = (\mathbf{h}_{11}, \ldots, \mathbf{h}_{1\ell_1}, \ldots, \mathbf{h}_{k1}, \ldots, \mathbf{h}_{k\ell_k})$$

je ortonormální bází celého euklidovského prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ složenou z vlastních vektorů samoadjungovaného operátoru $\varphi$. Tento operátor $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ má tedy v bázi $\beta$ diagonální matici, řekněme matici $B$, na jejíž diagonále se objevují postupně vlastní čísla $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Každé vlastní číslo $\mu_\iota$, kde $\iota \in \{1, \ldots, k\}$, se přitom objeví tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost $\ell_\iota$.

Nechť $P = (\mathrm{id}_{\mathbf{U}})_{\alpha,\beta}$ je matice přechodu od báze $\beta$ k původní ortonormální bázi $\alpha$ euklidovského prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$. Pak $P$ je ortogonální matice, takže pro ni platí rovnost $P^{-1} = P^\top$. Mezi maticemi $A$ a $B$ jakožto maticemi téhož lineárního operátoru $\varphi$ na vektorovém prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ v bázích $\alpha$ a $\beta$ pak platí vztah

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^\top \cdot A \cdot P.$$

Druhé z těchto vyjádření matice $B$ ovšem podle poznatků o kongruentních maticích znamená, že $B$ je matice shora uvedené symetrické bilineární formy $f$ na vektorovém prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ v bázi $\beta$, a je to tedy též matice touto bilineární formou určené kvadratické formy $F$ na vektorovém prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ v bázi $\beta$. Jiným způsobem lze tuto skutečnost nahlédnout též takto. Uvažme pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ jeho souřadnice $(\mathbf{u})_\alpha$ v bázi $\alpha$ a též jeho souřadnice $(\mathbf{u})_\beta$ v bázi $\beta$, obojí zapsané do sloupců. Pak z vlastností matice přechodu $P$ plyne, že mezi těmito souřadnicemi platí vztah

$$(\mathbf{u})_\alpha = P \cdot (\mathbf{u})_\beta.$$

Podle shora uvedeného vyjádření hodnoty kvadratické formy $F$ na vektoru $\mathbf{u}$ pak vychází

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &= (\mathbf{u})_\alpha^\top \cdot A \cdot (\mathbf{u})_\alpha \\ &= (P \cdot (\mathbf{u})_\beta)^\top \cdot A \cdot P \cdot (\mathbf{u})_\beta \\ &= (\mathbf{u})_\beta^\top \cdot P^\top \cdot A \cdot P \cdot (\mathbf{u})_\beta \\ &= (\mathbf{u})_\beta^\top \cdot B \cdot (\mathbf{u})_\beta. \end{aligned}$$

Rozepíšeme-li souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\beta$ ve tvaru $(\mathbf{u})_\beta = (y_1, \ldots, y_n)^\top$, pak vzhledem k výše popsanému diagonálnímu tvaru matice $B$ můžeme právě zjištěnou hodnotu kvadratické formy $F$ na vektoru $\mathbf{u}$ vyjádřit též ve tvaru

$$F(\mathbf{u}) = \mu_1 y_1^2 + \cdots + \mu_1 y_{\ell_1}^2 + \cdots + \mu_k y_{\ell_1 + \cdots + \ell_{k-1} + 1}^2 + \cdots + \mu_k y_n^2.$$

Tomuto vyjádření kvadratické formy $F$ říkáme též kanonický (diagonální) tvar kvadratické formy $F$, ortonormální bázi $\beta$ euklidovského prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$, v níž kvadratická forma $F$ tohoto vyjádření nabývá, nazýváme polární bází kvadratické formy $F$, a poněvadž matice přechodu $P$ mezi ortonormálními bázemi $\beta$ a $\alpha$ je ortogonální a realizuje výše uvedenou transformaci souřadnic vektorů v těchto bázích, mluvíme zde o převodu kvadratické formy $F$ na kanonický tvar ortogonální transformací souřadnic.