# Samoadjungované operátory na euklidovských prostorech

Nechť $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ jsou euklidovské prostory, tj. vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel konečných dimenzí se zadanými skalárními součiny. Nechť $\alpha$, resp. $\beta$ jsou zvolené ortonormální báze v $(\mathbf{U}, +, \cdot)$, resp. ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Nechť $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Nechť $A = (\varphi)_{\beta,\alpha}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi$ v bázích $\alpha$ a $\beta$ uvedených euklidovských prostorů. Uvažujme lineární zobrazení $\varphi^* : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ definované tím, že transponovaná matice $A^\top$ je jeho maticí v bázích $\beta$ a $\alpha$ uvažovaných euklidovských prostorů, to jest určené tím, že platí $A^\top = (\varphi^*)_{\alpha,\beta}$. Vezměme dále libovolné vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a uvažme jejich souřadnice $(\mathbf{u})_\alpha$ a $(\mathbf{v})_\beta$ ve zmíněných ortonormálních bázích uvedených euklidovských prostorů. Uvažme rovněž souřadnice $(\varphi(\mathbf{u}))_\beta$ a $(\varphi^*(\mathbf{v}))_\alpha$ obrazů těchto vektorů při výše uvedených lineárních zobrazeních, samozřejmě v odpovídajících bázích daných euklidovských prostorů. Všechny souřadnice zapisujeme jako sloupce. Víme, že pak platí

$$(\varphi(\mathbf{u}))_\beta = A \cdot (\mathbf{u})_\alpha \quad \text{a} \quad (\varphi^*(\mathbf{v}))_\alpha = A^\top \cdot (\mathbf{v})_\beta.$$

Dále víme, že pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ a pro jejich skalární součiny v euklidovských prostorech $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ platí

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle = (\mathbf{u})_\alpha^\top \cdot (\mathbf{u}')_\alpha \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle = (\mathbf{v})_\beta^\top \cdot (\mathbf{v}')_\beta.$$

Odtud plyne, že pro vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle &= (\varphi(\mathbf{u}))_\beta^\top \cdot (\mathbf{v})_\beta \\ &= (\mathbf{u})_\alpha^\top \cdot A^\top \cdot (\mathbf{v})_\beta \\ &= (\mathbf{u})_\alpha^\top \cdot (\varphi^*(\mathbf{v}))_\alpha = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy rovnost

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle$$

platnou pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, kde nalevo vystupuje skalární součin v euklidovském prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a napravo vystupuje skalární součin v euklidovském prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$. Touto podmínkou je přitom lineární zobrazení $\varphi^* : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ k danému lineárnímu zobrazení $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ určeno jednoznačně. Nezávisí tedy toto lineární zobrazení $\varphi^* : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ na počáteční volbě ortonormálních bází $\alpha$, resp. $\beta$ euklidovských prostorů $(\mathbf{U}, +, \cdot)$, resp. $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Lineární zobrazení $\varphi^* : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ se nazývá adjungované zobrazení k lineárnímu zobrazení $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$.

Mějme nyní jeden euklidovský prostor $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ se zadaným skalárním součinem. Nechť $\alpha$ je libovolná ortonormální báze v $(\mathbf{U}, +, \cdot)$. Mějme dále lineární zobrazení $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$, to jest lineární operátor na euklidovském prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$. Nechť $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je matice tohoto lineárního operátoru $\varphi$ v bázi $\alpha$. Pochopitelně tak jako výše existuje i tady adjungované lineární zobrazení $\varphi^* : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$, tj. lineární operátor $\varphi^*$ na prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ adjungovaný k lineárnímu operátoru $\varphi$. Maticí tohoto adjungovaného lineárního operátoru v bázi $\alpha$ je pak matice $A^\top$ transponovaná k matici $A$, takže máme $A^\top = (\varphi^*)_{\alpha,\alpha}$. Adjungovaný lineární operátor $\varphi^*$ je prostřednictvím skalárního součinu v euklidovském prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ jednoznačně určen rovností

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle$$

platnou pro všechny dvojice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$. Znovu tedy nezávisí tento adjungovaný lineární operátor $\varphi^*$ na volbě ortonormální báze $\alpha$ euklidovského prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$. Nyní lineární operátor $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na euklidovském prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ se nazývá samoadjungovaný, jestliže platí $\varphi = \varphi^*$, to jest, platí-li rovnost

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle$$

pro všechny dvojice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$. Je jasné, že lineární operátor $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je samoadjungovaný právě tehdy, když pro jeho matici $A$ v ortonormální bázi $\alpha$ prostoru $(\mathbf{U}, +, \cdot)$ platí rovnost $A = A^\top$. Čtvercová matice $A$ nad $\mathbb{R}$ splňující zmíněnou rovnost $A = A^\top$ se nazývá symetrická.

Je známo, že všechna vlastní čísla symetrické matice $A$ nad $\mathbb{R}$ jsou reálná, a to i tehdy, když tuto matici $A$ chápeme jako matici nad $\mathbb{C}$. Navíc pro každé vlastní číslo symetrické matice $A$ nad $\mathbb{R}$ platí, že jeho algebraická násobnost je rovna jeho geometrické násobnosti. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům symetrické matice $A$ jsou navzájem ortogonální.