Domácí úkoly ke cvičení č. 9

1. V každém z následujících případů této úlohy nejprve ověřte, že zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definované uvedeným předpisem je skutečně korektně definovaným lineárním operátorem na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ všech polynomů jedné proměnné x s reálnými koeficienty stupně nejvýše 2. Poté najděte matici $A = (\varphi)_{\zeta,\zeta}$ tohoto lineárního operátoru φ ve standardní bázi $\zeta = (1, x, x^2)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}_2[x]$. Najděte všechna vlastní čísla matice A, a to i když ji uvažujete jako matici nad tělesem všech komplexních čísel. Přesvědčte se, že ve všech případech v této úloze všechna vlastní čísla matice A, to jest všechna vlastní čísla lineárního operátoru φ jsou reálná. Konečně najděte invariantní podprostory vlastních vektorů lineárního operátoru φ příslušné všem vlastním číslům matice A. Porovnejte algebraické a geometrické násobnosti těchto vlastních čísel v jednotlivých případech této úlohy.

(a) Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ je pro všechny polynomy $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ definováno předpisem

$$\varphi(f(x)) = (1 + 2x + 2x^2)\cdot f(x) + (1 - 2x^3)\cdot f'(x) \\ - (x^3 - x^4)\cdot f''(x).$$

(b) Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ je pro všechny polynomy $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ definováno předpisem

$$\varphi(f(x)) = 4\cdot(1 + x + 2x^2)\cdot f(x) + (1 - 8x^3)\cdot f'(x) \\ - (1 + 3x + 5x^2 + 2x^3 - 4x^4)\cdot f''(x).$$

(c) Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ je pro všechny polynomy $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ definováno předpisem

$$\varphi(f(x)) = 2\cdot(1 + x - x^2)\cdot f(x) + 2\cdot(1 + x^3)\cdot f'(x) \\ - (x^3 + x^4)\cdot f''(x).$$

2. V obou následujících případech této úlohy nejprve ověřte, že zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definované uvedeným předpisem je skutečně korektně definovaným lineárním operátorem na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ všech polynomů jedné proměnné x s reálnými koeficienty stupně nejvýše 2. Poté najděte matici $A = (\varphi)_{\zeta,\zeta}$ tohoto lineárního operátoru φ ve standardní bázi $\zeta = (1, x, x^2)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}_2[x]$. Najděte všechna vlastní čísla matice A, a to i když ji uvažujete jako matici nad tělesem všech komplexních čísel. Přesvědčte se, že v obou případech v této úloze mezi vlastními čísly matice A, to jest mezi vlastními čísly lineárního operátoru φ vystupuje jedno reálné číslo a dále jedna dvojice navzájem komplexně sdružených čísel. Nakonec najděte jednorozměrný invariantní podprostor vlastních vektorů lineárního operátoru φ příslušný ke zmíněnému reálnému vlastnímu číslu matice A a také dvourozměrný invariantní podprostor lineárního operátoru φ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ odpovídající zmíněné dvojici vzájemně komplexně sdružených vlastních čísel matice A.

(a) Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ je pro všechny polynomy $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ definováno předpisem

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)) = (1 + 2x - 2x^2)\cdot f(x) + (1 + 2x^3)\cdot f'(x) \\ + (2 - x^3 - x^4)\cdot f''(x).\end{aligned}$$

(b) Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ je pro všechny polynomy $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ definováno předpisem

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)) = (1 + 2x^2)\cdot f(x) + (1 + x - 2x^3)\cdot f'(x) \\ - (1 - x^4)\cdot f''(x).\end{aligned}$$