1. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 2.3. 2016

Z dvojice úloh **A** a **B** je druhá obtížnější a je určena těm, pro které je prvá úloha jednoduchá. Stačí, když odevzdáte řešení jedné z nich.

1A. Mějme prosté lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ a vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ lineárně nezávislé v prostoru U, jsou lineárně nezávislé také vektory $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\ldots$,$\varphi(u_k)$ v prostoru V.

Najděte příklad nenulového lineárního zobrazení φ a vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k$ lineárně nezávislých v U a takových, že $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\ldots$,$\varphi(u_k)$ jsou lineárně závislé v prostoru V.

1B. Nechť U a V jsou vektorové podprostory v prostoru W. Nechť $w_1, w_2, \ldots, w_k$ je báze podprostoru $U \cap V$, nechť $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_n$ je báze podprostoru U a konečně nechť $w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_m$ je báze podprostoru V. Dokažte, že $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots, v_m$ je báze podrostoru $U + V$.

2A. Z definice spojitosti dokažte: Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě a, pak existuje $K > 0$ a $\delta_o > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \delta_o, a + \delta_o)$ platí

$$|f(x)| \leq K.$$

2B. Dokažte z definice spojitosti. Je-li funkce f spojitá v bodě a a $f(a) \neq 0$, pak je v bodě a spojitá i funkce $\frac{1}{f}$.

3. Dokažte, že množina kladných reálných čísel je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, jestliže jako sčítání vektorů bereme násobení kladných čísel a jako násobení skalárem bereme umocnění na reálné číslo. Dokažte, že zobrazení $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení z tohoto vektorového prostoru do standardního vektorového prostoru $\mathbb{R}$.