

2. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 9.3. 2016, opravená verze

Z dvojice úloh **A** a **B** je druhá obtížnější a je určena těm, pro které je první úloha jednoduchá. Stačí, když odevzdáte řešení jedné z nich.

1A. Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \text{ iracionální,} \\ \frac{1}{n}, & \text{pro } x = \frac{m}{n} \text{ racionální, } m \text{ a } n \text{ nesoudělná, } n \geq 0. \end{cases}$$

Dokažte, že pro $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L > 0.$$

1B. Pro funkci definovanou v úloze 1A dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

2A. Dokažte z definice spojitosti. Je-li funkce f spojitá v bodě a a $f(a) \neq 0$, pak je v bodě a spojitá i funkce $\frac{1}{f}$.

2B. Necht' $\varphi : U \rightarrow U$ je lineární zobrazení s vlastností $\varphi \circ \varphi = \text{id}$. Potom je vektorový prostor U direktním součtem dvou (obecně netriviálních) podprostorů $V_1 \oplus V_2$ takových, že pro oba platí $\varphi(V_i) \subseteq V_i$. Najděte je a tvrzení dokažte.