6. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 20.4. 2016

Z dvojice úloh **A** a **B** je druhá obtížnější a je určena těm, pro které je prvá úloha jednoduchá. Stačí, když odevzdáte řešení jedné z nich.

1A. Na základě toho, že každá posloupnost čísel v intervalu $[0,1]$ obsahuje konvergentní podposloupnost, dokažte: Jsou-li I_j otevřené intervaly a

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,$$

pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j.$$

Návod: Předpokládejme, že takové n neexistuje. Zvolme posloupnost

$$x_n \in [0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j.$$

Její podposloupnost x_{n_k} konverguje k nějakému $x \in [0,1]$. Odtud a z předpokladů odvoďte spor.

1B. Mějme metrický podprostor M s vlastností, že z každého otevřeného pokrytí prostoru M lze vybrat konečné podpokrytí. Dokažte, že pak z každé posloupnosti bodů z M lze vybrat konvergentní podposloupnost.