M2B02: Diferenciální a integrální počet II

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

Diferenciální počet v $\mathbb{R}^n$ (21. března 2016)

CZ.1.07/2.3.00/30.0009
Zaměstnáním čerstvých absolventů doktorského studia k vědecké excelenci

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tato práce byla podpořena z projektu „Zaměstnáním čerstvých absolventů doktorského studia k vědecké excelenci“ (CZ.1.07/2.3.00/30.0009), který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Obsah

Jak je definována funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Definice 1.4(i)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ a $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných*. Množina M se nazývá definiční obor funkce f a značí se $D(f)$, tj.

$$D(f) := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists z \in \mathbb{R} \text{ taková, že } f(x) = z\right\}.$$

Poznámka

Jinými slovy můžeme pomocí funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ zavést relaci na $D(f) \times \mathbb{R}$ (označme ji jako f), kdy uvažujeme uspořádané dvojice $[x, z] \in D(f) \times \mathbb{R}$. Tato relace má následující vlastnosti:

(i) $x \in D(f)$, $z \in \mathbb{R}$,

(ii) pro každé $x \in D(f)$ existuje právě jedno číslo $z \in \mathbb{R}$ takové, že $[x, z] \in f$.

Obraz bodu $x = [x_1, \dots, x_n] \in D(f)$ v zobrazení f (tj. číslo $z \in \mathbb{R}$ takové, že $[x, z] \in f$) označujeme jako $f(x)$ nebo $f(x_1, \dots, x_n)$ (zcela formálně $f([x_1, \dots, x_n])$) a nazývá se *hodnota funkce f v bodě x* (též funkční hodnota), tedy můžeme stručně psát $z = f(x)$. *Oborem hodnot* rozumíme množinu

$$H(f) := \{z \in \mathbb{R} : \ \exists x \in D(f) \text{ takové, že } f(x) = z\}.$$

Značení

Pro $n = 2$ se proměnné obvykle značí jako x, y, tj. píšeme $f(x, y)$.
Pro $n = 3$ se proměnné obvykle značí jako x, y, z, tj. píšeme $f(x, y, z)$.
Pro $n \geq 4$ se proměnné obvykle značí pomocí indexů jako $x_1, \dots, x_n$.

Definiční obor

Z Definice 1.4(i) vyplývá, že funkce f je jednoznačně určena udáním definičního oboru $D(f)$ a předpisem, který každému bodu $x = [x_1, \dots, x_n] \in D(f)$ přiřadí hodnotu $f(x_1, \dots, x_n)$. Pokud je předpis dán vzorcem a není udán definiční obor $D(f)$, pak jej chápeme jako množinu všech bodů $x \in \mathbb{R}^n$, pro než má tento vzorec smysl.

Příklad

Určeme a načrtněme definiční obory funkcí

$$\text{(a) } f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}, \quad \text{(b) } f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(9-x^2-y^2)},$$

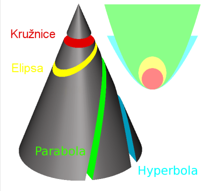
$$\text{(c) } f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2),$$

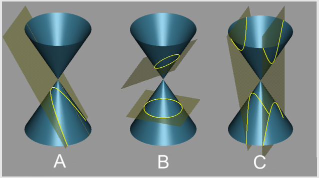
$$\text{(d) } f(x,y) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right)(x^2+y^2-6x)}.$$

Kuželosečky a kvadriky

K vyšetřování definičních oborů (případně grafickému znázorňování dalších vlastností) funkcí více proměnných si připomeňme analytická vyjádření (v tzv. normálním tvaru) některých důležitých obrazců z $\mathbb{R}^2$ (kuželosečky) a $\mathbb{R}^3$ (kvadriky).

Kuželosečky





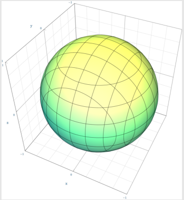
$x^2 + y^2 = r^2$	kružnice
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	elipsa
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbola
$x^2 + 2py = 0$	parabola
$y^2 + 2px = 0$	parabola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	dvojice reálných různoběžek
$x^2 - c^2 = 0$	dvojice reálných rovnoběžek
$x^2 = 0$	dvojnásobná přímka

kde pro konstanty platí $a, b, c, r > 0$, $p \neq 0$. Obrázky jsou převzaty z `http://goo.gl/qb5YKo`.

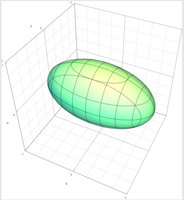
Kvadriky (i)

Pro všechny níže vystupující konstanty platí $a, b, c, d, r > 0$, $p, q \neq 0$. Obrázky jsou převzaty z `http://goo.gl/6rrX5p`.

Kulová plocha: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

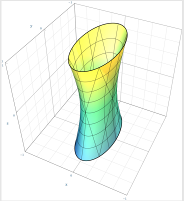


Elipsoid:



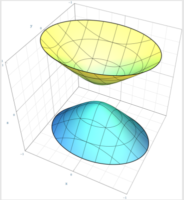
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Jednodílný hyperboloid: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

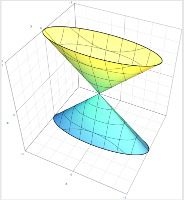


Kvadriky (ii)

Dvojdílný hyperboloid: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

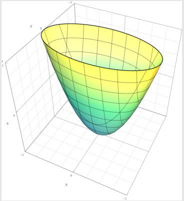


Kužel:



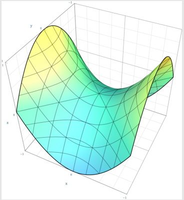
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Eliptický paraboloid: $$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$

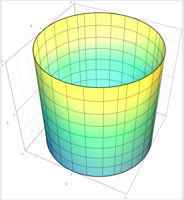


Kvadriky (iii)

Hyperbolický paraboloid: $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$

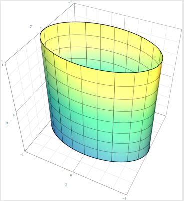


Rotační válec:



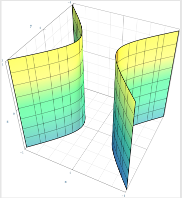
$x^2 + y^2 = r^2$

Eliptický válec: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

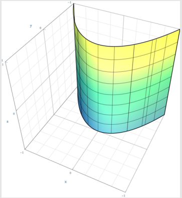


Kvadriky (iv)

Hyperbolický válec: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Parabolický válec:



$y^2 = 2px$ nebo $x^2 = 2qy$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$	dvojnásobný bod
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	dvojnásobná přímka
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	dvojice různoběžných rovin
$x^2 - d^2 = 0$	dvojice rovnoběžných rovin
$x^2 = 0$	dvojnásobná rovina

Graf funkce

Grafem funkce f rozumíme množinu

$$G(f) := \Big\{ \big[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\big] \in \mathbb{R}^{n+1} : \; [x_1, \dots, x_n] \in \mathrm{D}(f) \Big\}$$

(tedy hodnotu $f(x_1, \dots, x_n)$ chápeme jako $n+1$ souřadnici).

Poznámka

Pro $n = 2$ si lze graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ představit jako rovinu nebo její část zakřivenou v $\mathbb{R}^3$. Ovšem pro $n > 2$ již tuto možnost názorné představy ztrácíme, a proto graf funkce ztrácí na významu jako prostředek k získání představy o chování funkce n proměnných. Jediný graf funkce tří proměnných, který ještě dokážeme „znázornit“, je graf funkce $f(x, y, z) \equiv 0$ (co je jejím grafem?).

Příklad

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(x, y) = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Načrtněme její graf.

Pro $n = 2, 3$ můžeme získat docela dobrou představu o grafu funkce již pomocí vrstevnic.

Definice 1.12(i)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných definovaná na množině M a $c \in \mathbb{R}$. Množina

$$f_c := \left\{[x_1, \dots, x_n] \in M : \ f(x_1, \dots, x_n) = c\right\}$$

se nazývá *vrstevnicí funkce f na úrovni c*.

Příklad

- Načrtněme vrstevnice pro funkci $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x/(x^2+y^2)}$.
- Mořští biologové pozorovali, že pokud žraloci zjistí přítomnost krve ve vodě, pak plavou směrem, kde koncentrace roste nejrychleji. Empiricky bylo zjištěno, že koncentrace krve (v 10^6 jednotek) od počátečního bodu P na hladině je dána vztahem

  $$C(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+2y^2)/10^4},$$

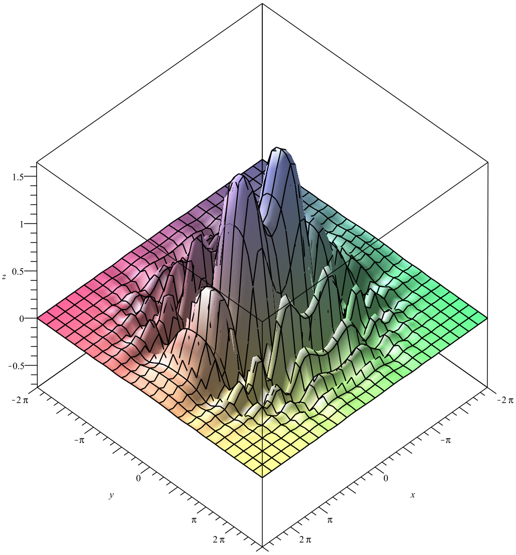
  kde x, y je vzdálenost od bodu P v kartézských souřadnicích. Načrtněme vrstevnice.

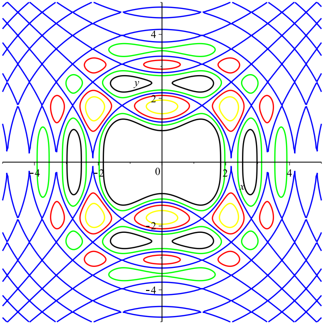
Příklad

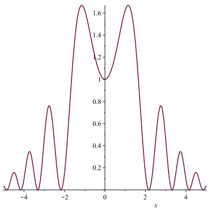
- Pomocí vrstevnic a řezů rovinami ρ_{xz}, ρ_{yz} zobrazme graf funkce
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$
- Zobrazme v $\mathbb{R}^3$ graf funkce $f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, kde $a,b>0$.
- Zobrazme v $\mathbb{R}^3$ graf funkce $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

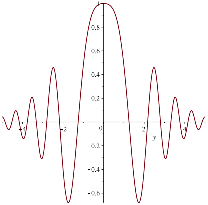
Funkce mohou mít i mnohem komplikovanější chování, ačkoli jsou zadány jednoduchým předpisem.

$$z = e^{-(x^2+y^2)/8}(\sin(x^2) + \cos(y^2))$$

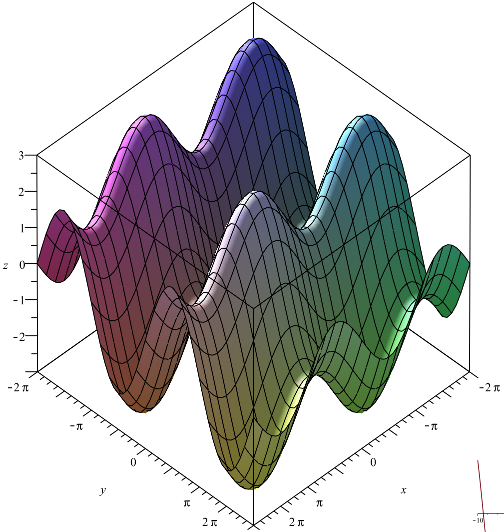




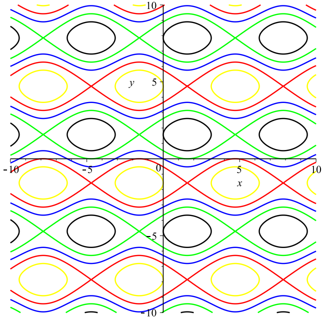




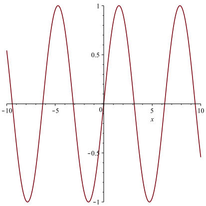
$$z = \sin(x) + 2\sin(y)$$



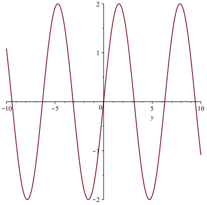
z
3
2
1
0
-1
-2
-2π
-π
0
π
2π
y
x



10
5
y
-10
-5
0
5
10
x
-5
-10

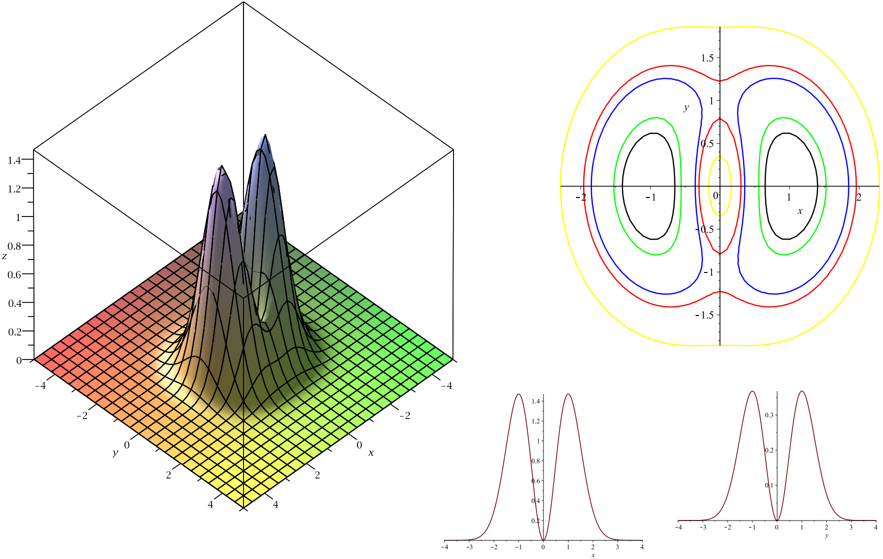


1
0.5
-0.5
-1
-10
-5
0
5
10
x

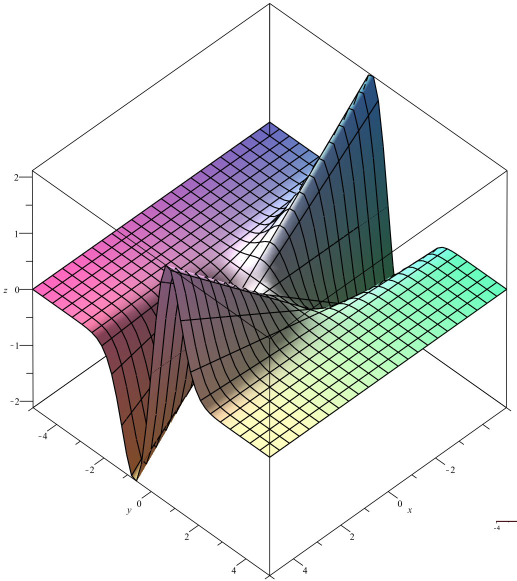


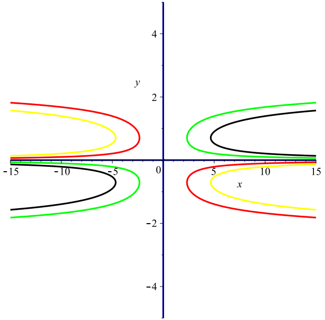
2
1
-1
-2
-10
-5
0
5
10
y

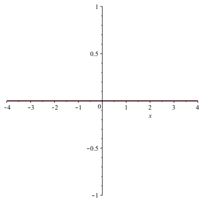
$$z = (4x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

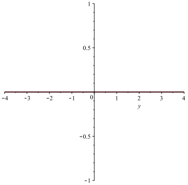


$$z = xye^{-y^2}$$









Pojem limity patří k základním stavebním kamenům diferenciálního počtu v $\mathbb{R}$. S jeho pomocí lze analyzovat chování funkce v ryzím okolí daného bodu. V $\mathbb{R}$ je ε-ové okolí bodu x_0 (srov. ryzí ε-ové okolí x_0) vlastně interval

$$|x_0 - x| < \varepsilon$$

(jsou to všechny body *vzdálené* od bodu x_0 o méně než ε). Jak ale měřit vzdálenost v $\mathbb{R}^n$?

Metrika

Nechť P je neprázdná množina a zobrazení $\rho : P \times P \to \mathbb{R}$ splňuje pro každé $x, y \in P$ následující tři axiomy

- $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (axiom totožnosti);
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axiom symetrie);
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (trojúhelníková nerovnost).

Dvojice (P, ρ) se nazývá *metrický prostor*. Zobrazení ρ se nazývá *metrika* a číslo $\rho(x, y)$ se nazývá *vzdálenost* bodů x, y v prostoru (P, ρ).
Z těchto axiomů také vyplývá

$$2\,\rho(x, y) = \rho(x, y) + \rho(x, y) = \rho(x, y) + \rho(y, x) \geq \rho(x, x) = 0,$$

tedy nezápornost čísla $\rho(x, y)$.

Příklady metrik (i)

- Dvojice (P, ρ) se nazývá *diskrétní (triviální) metrický prostor*, je-li $P \neq \emptyset$ a zobrazení $\rho : P \times P \to \mathbb{R}$ definované jako
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$
- Dvojice $(\mathbb{R}^n, \rho_E)$ se nazývá *Eukl(e)idovský (metrický) prostor*, je-li zobrazení $\rho_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované pro $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a $y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ jako
$$\rho_E(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$
Toto zobrazení splňuje všechny tři axiomy (důkaz?). Speciálně, je-li $n = 2$, $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$, pak
$$\rho_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$
Podobně, je-li $n = 3$, $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$, pak
$$\rho_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$
(geometrická interpretace?)

Příklady metrik (ii)

- Na $\mathbb{R}^n$ můžeme definovat i další metriky. Zejména tzv. *součtovou metriku* $\rho_\Sigma(x,y)$ a tzv. *maximální metriku* $\rho_{\max}(x,y)$ jako

$$\rho_\Sigma(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \quad \& \quad \rho_{\max}(x,y) = \max_{1\le k\le n} |x_k - y_k|.$$

(Důkaz? Geometrická interpretace? $\rho_\Sigma(x,y)$ se pro $n=2$ nazývá taxikářská/listonošská metrika.)
Poznamenejme, že pro $n=1$ metriky ρ_Σ, ρ_E a $\rho_{\max}$ splývají.
Metriky lze definovat i na jiných množinách (kružnice, spojité funkce, ohraničené posloupnosti aj.).

Ekvivalence metrik ρ_Σ, ρ_E a $\rho_{\max}$

Uvažme posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metrickém prostoru (P,ρ). O posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ řekneme, že *konverguje* k bodu $x_0 \in P$ (je konvergentní, má limitu x_0, píšeme $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$), jestliže

$$\rho(x_0, x_n) \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty$$

(limita číselné posloupnosti). Uvažme dvě metriky ρ_1 a ρ_2 na množině $P \neq \emptyset$. Tyto metriky se nazývají *ekvivalentní*, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0 \iff x_n \xrightarrow{\rho_2} x_0.$$

Lze ukázat, že metriky ρ_Σ, ρ_E a $\rho_{\max}$ jsou ekvivalentní (tedy existence limity nezávisí na konkrétní volbě metriky).

Okolí

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak ε-ové *okolí* bodu $a \in \mathbb{R}^n$ s metrikou ρ je množina

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

(obvykle budeme index ε vynechávat). *Ryzím okolím* bodu a rozumíme množinu $\mathcal{O}^*(a) := \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$.

Příklad

Jak vypadá $\mathcal{O}(a)$ v $\mathbb{R}^2$ v metrikách ρ_Σ, ρ_E a $\rho_{\max}$?

Volba metriky

Vzhledem k ekvivalentnosti metrik ρ_Σ, ρ_E a $\rho_{\max}$ si pro jednoduchost zvolíme v následujících úvahách maximální metriku $\rho_{\max}$ (nebude-li explicitně řečeno jinak), tj. ε-ovým *okolím* bodu $a = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ budeme mít na mysli

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) := \{x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : \ \max_{1 \le k \le n} |x_k - a_k| < \varepsilon\}.$$

Nevlastní body

Podobně jako v případě $n = 1$ budeme symbolem $(\mathbb{R}^*)^n$ značit množinu $\mathbb{R}^n$ společně s nevlastními body, tj.

$$(\mathbb{R}^*)^n = \underbrace{\mathbb{R}^* \times \cdots \times \mathbb{R}^*}_{\text{n-krát}}, \quad \text{kde } \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

V $\mathbb{R}^2$ rozumíme okolím bodu $[+\infty, +\infty]$ libovolnou množinu typu $(a, +\infty) \times (b, +\infty)$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ (dle maximální metriky). Analogicky definujeme okolí dalších nevlastních bodů v $\mathbb{R}^2$, tj. $[-\infty, +\infty]$, $[+\infty, -\infty]$ a $[-\infty, -\infty]$. Podobnou úvahou lze definovat okolí nevlastních bodů v $(\mathbb{R}^*)^n$.

Hromadný bod

Pro následující definici limity potřebujeme, aby uvažovaná funkce byla definována alespoň v jednom bodě libovolně malého ryzího okolí daného bodu z definičního oboru. To znamená, že budeme uvažovat pouze *hromadné body* definičního oboru (=bod, jehož každé ryzí okolí obsahuje alespoň jeden bod z této množiny – v takovém případě jich obsahuje dokonce nekonečně mnoho). Hromadný bod může (ale nemusí) být prvkem dané množiny (je to buď vnitřní nebo hraniční bod).

Definice 1.24(i)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a x^* je hromadným bodem $D(f)$. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* L, kde $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}^*(x^*) \cap D(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. V takovém, případě píšeme

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = L.$$

Terminologie

- $L \in \mathbb{R}$ = *vlastní limita*;
- $L \in \{\pm\infty\}$ = *nevlastní limita*;
- $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ = *limitní bod*.

Poznámka

- Kdyby bod x^* nebyl hromadným bodem, existovalo by ryzí okolí takové, že $\mathcal{O}^*(x^*) \cap D(f) = \emptyset$ (=*izolovaný bod* – ten je vždy prvkem dané množiny a současně je hraničním bodem), a definici by vyhovovala každá hodnota L. Proto budeme-li v dalším text hovořit o limitě funkce, bude vždy limitní bod současně bodem hromadným.
- Kromě požadavku, že x^* je hromadným bodem, žádná další omezení na bod x^* nejsou kladena. Funkce f nemusí být v tomto bodě ani definována, a je-li definována, pak hodnota limity nezávisí na funkční hodnotě.

Takto formulovaná definice funguje zcela univerzálně v $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ atd. Uveďme také analogii tzv. $\varepsilon - \delta$ definice vlastní limity ve vlastním bodě.

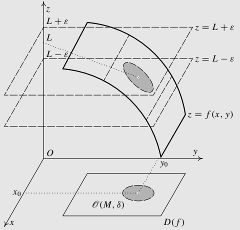
Definice 1.25(i)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $M = [x_0, y_0] \in D(f)$ *limitu* rovnu číslu $L \in \mathbb{R}$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $[x, y] \in \mathcal{O}^*_\delta(M) \cap D(f)$ platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. V takovém případě píšeme

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Poznámka

- S volbou maximální metriky lze požadavek $[x, y] \in \mathcal{O}^*_\delta(M) \cap D(f)$ také zapsat tak, že uvažujme body $[x, y] \in D(f) \setminus \{[x_0, y_0]\}$ splňující $|x_0 - x| < \delta$ a $|y_0 - y| < \delta$.
- Nerovnost $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ je totéž jako $f(x, y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.



Obrázek převzat z: J. Kuben, Š. Mayerová, P. Račková a P. Šarmanová, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, dostupné z `http://goo.gl/ss16OK`

Příklad

- Pomocí definice popišme
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = +\infty.$$
- Dokažme, že
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty.$$

Limita funkce více proměnných má podobné vlastnosti jako v $\mathbb{R}$. Pro jednoduchost jsou tvrzení zformulovaná v $\mathbb{R}^2$ (analogická tvrzení platí ale i ve vyšších dimenzích). Důkazy jsou podobná odpovídajícím tvrzením z $\mathbb{R}$.

Věta 1.27(i)

Nechť $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou funkce dvou proměnných.

- Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ nejvýše jednu limitu. (Důkaz?)
- Nechť platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \quad \& \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2,$$

  kde $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)] = c_1 L_1 + c_2 L_2,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)\, g(x,y)] = L_1 L_2.$$

  Je-li $L_2 \neq 0$, pak také

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Příklad

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+y+1}{x+y+3}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Věta 1.28(i)

Nechť $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou funkce dvou proměnných.

- Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0, y_0]$ (tj. existuje konstanta $K \geq 0$ taková, že platí $|g(x,y)| \leq K$ v tomto okolí $\cap\, D(f)$). Potom
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\, g(x,y) = 0.$$
- Nechť $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0, y_0]$ a současně platí
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L.$$
Pak také
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$
- Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0] \in (\mathbb{R}^*)^2 \cap D(f)$ vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je funkce f ohraničená.

Příklad

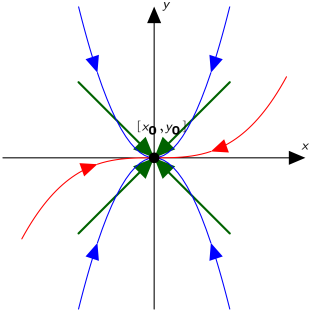
$$\text{(a)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin\frac{1}{x}\, \sin\frac{1}{y}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x}.$$

Limity v nevlastních bodech

Pro limity v nevlastních bodech se obvykle využívá substituce pomocí $1/u$, $1/v$, např.

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = \lim_{\substack{u>0,v>0\\(u,v)\to(0,0)}} f(1/u,1/v)$$

Zásadní rozdíl mezi limitami v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 2$ spočívá v dimenzi okolí limitního bodu. U funkce jedné proměnné jsme se do limitního bodu mohli blížit pouze po přímce (zprava nebo zleva, pokud se rovnají, má funkce limitu), zatímco u funkce dvou a více proměnných se do limitního bodu můžeme dostat v nekonečně mnoha směrech – po přímkách, parabolách, kubických křivkách,... Ovšem existence limity musí být nezávislá na cestě, po které se do limitního bodu blížíme.



Pokud se nám tedy podaří najít dvě různé křivky takové, že při přibližování do limitního bodu po těchto křivkách dostaneme různé (částečné) limity (ty bude obvykle mnohem jednodušší určit), tak samotná limita nemůže existovat.

Obvykle se za tyto křivky volí přímky $y = k(x - x_0) + y_0$ (typicky $y = kx$). S jejich pomocí lze ukázat neexistenci limity (pokud výraz závisí na k).

Příklad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4}.$$

Ovšem to, že výsledná limita nezávisí na k pro libovolnou přímku, ještě neznamená, že daná limita existuje (museli bychom vyšetřit všechny možné křivky).

Příklad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2}.$$

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limita ve smyslu Definice 1.24(i) nebo Definice 1.25(i) se nazývá *dvojná*. Limitní proces také můžeme aplikovat postupně.

Definice 1.32(i)

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limity

$$L_{yx} = \lim_{x \to x_0} \Big(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \Big) \quad \& \quad L_{xy} = \lim_{y \to y_0} \Big(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \Big)$$

se nazývají *dvojnásobné* (též postupné).

Jaký je vztah mezi L_{xy}, L_{yx} a $L := \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$?

Věta 1.32(i)

(A) Nechť existují limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} = L_{yx}$. Pak limita L nemusí existovat.

(B) Nechť existuje limita L. Pak L_{xy} a L_{yx} nemusí existovat.

(C) Existují-li limity L_{xy}, L_{yx} a L, pak $L_{xy} = L_{yx} = L$.

(D) Nechť existují limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} \neq L_{yx}$. Pak limita L neexistuje.

Poznámka

Poslední část předchozí věty nám dává nutnou podmínku pro existenci limity L.

Příklad

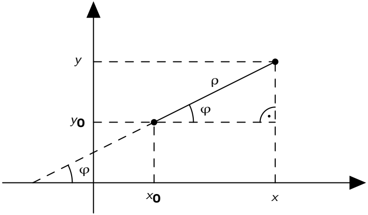
$$\text{(a)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2-3y^2}{x^2+2y^2}, \quad \text{(b)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y},$$

$$\text{(c)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right), \quad \text{(d)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2},$$

Ovšem výpočet konkrétní limity v $\mathbb{R}^n$ může být značně obtížný (zejména když nemáme ani l'Hospitalovo pravidlo). Velmi účinným nástrojem v $\mathbb{R}^2$ je tzv. transformace do *polárních souřadnic*

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi,$$

kde $[x_0, y_0]$ je limitní bod, $\rho \in [0, \infty)$ popisuje vzdálenost bodu $[x, y]$ od pevného bodu $[x_0, y_0]$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá polopřímka z bodu $[x_0, y_0]$ procházející bodem $[x, y]$ s kladnou částí osy x.



Věta 1.34(i)

Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce $g(\rho)$ taková, že

$$\lim_{\rho\to 0+} g(\rho) = 0 \quad \& \quad |f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého ryzího okolí 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Poznámka

Zejména pokud po transformaci do polárních souřadnic platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0+} h(\varphi)g(\rho),$$

kde $\lim_{\rho\to 0+} g(\rho) = 0$ a funkce $h(\varphi)$ je ohraničená pro $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

Pomocí transformace do polárních souřadnic převedeme výpočet limity funkce dvou proměnných na výpočet limity $\lim_{\rho\to 0+} g(\rho)$, k čemuž již můžeme využít i l'Hospitalovo pravidlo.

Příklad

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

$$\text{(c)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+(y-1)^2 y}{x^2+(y-1)^2}, \quad \text{(d)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

Poznámka

Podobně lze postupovat i v $\mathbb{R}^3$, kde se využívá transformace do *sférických souřadnic*

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = z_0 + \rho\cos\vartheta.$$

Definice 1.37(i)

Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$, jestliže platí jedno z následujících tvrzení

(A) bod x^* je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$, existuje v tomto bodě vlastní limita a platí
$$\lim_{x\longrightarrow x^*} f(x) = f(x^*);$$

(B) bod x^* je izolovaným bodem definičního oboru $D(f)$.

Poznámka

- Z části (A) vyplývá, že f musí být definována v bodě x^*, musí mít v tomto bodě limitu a tato čísla si musí být rovna.
- Část (B) zahrnuje body, v nichž nelze limitu počítat.

Příklad

Určeme body nespojitosti funkcí
$$\text{(a) } f(x,y) = \frac{2x-5y}{x^2+y^2-1}, \quad \text{(b) } f(x,y) = \frac{\sin(x^2y+xy^2)}{\cos(x-y)}.$$

Poznámka

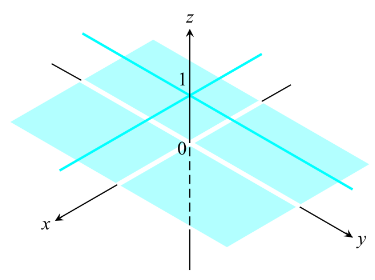
Nechť funkce $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $x^* \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$, ve kterém je funkce f ohraničená (tj. existuje číslo $K \geq 0$ takové, že $\forall x \in \mathcal{O}(x^*) \cap D(f)$ platí $|f(x)| \leq K$). Je-li navíc $f(x^*) \neq 0$, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$, ve kterém funkce f nemění znaménko.

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, pak jsou spojité i funkce jedné proměnné $g(x) = f(x, y_0)$ a $h(y) = f(x_0, y)$. Tedy spojitá funkce dvou proměnných je zároveň spojitou funkcí v proměnné x při konstantním y a také spojitou funkcí v proměnné y při konstantním x (analogické tvrzení platí i pro funkce více proměnných). Opačné tvrzení ale neplatí.

Příklad

Rozhodněme o spojitosti funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0, \\ 1 & xy = 0. \end{cases}$$



Příklad

Rozhodněme o spojitosti funkcí

$$\text{(a) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]; \end{cases}$$

$$\text{(b) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Věta 1.40(i)

Nechť jsou funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$. Pak jsou v bodě x^* spojité také funkce $f \pm g$, fg, a je-li $g(x^*) \neq 0$, pak i funkce f/g.

Nyní se podíváme blíže na některé vlastnosti spojitých funkcí dvou proměnných (analogická tvrzení platí i pro funkce více proměnných).

Věta 1.40(ii)

Nechť $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Položme $u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$ a nechť funkce f je spojitá v bodě $[u_0, v_0]$. Pak je v bodě $[x_0, y_0]$ také spojitá složená funkce $F(x, y) = f\big(g(x, y), h(x, y)\big)$.

Definice 1.40(i)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je *spojitá na množině* $M \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$ platí

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Limitní vztah z předchozí definice chápeme takto: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in \mathcal{O}_\delta([x_0, y_0]) \cap M$ platí $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, viz Definici 1.25(i).

Z teorie funkcí jedné proměnné známe (Weierstrassova věta):

Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na uzavřeném intervalu (jednostranná spojitost v krajních bodech intervalu), pak funkce f je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty. Co bude analogií uzavřeného intervalu?

Definice 1.41(i)

Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *kompaktní*, jestliže množina A spolu s metrikou ρ je kompaktní metrický prostor. Je-li $P = \mathbb{R}^n$, pak množina $A \subseteq P$ je *kompaktní* právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená.

Věta 1.41(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak funkce f je na množině M ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty (tj. existují čísla $k, K \in \mathbb{R}$ taková, že $k \leq K$ a $k \leq f(x,y) \leq K$ pro každé $[x,y] \in M$).

Důkaz? ■

Příklad

Rozhodněme, zda funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

nabývá své největší a nejmenší hodnoty na množině $M : x^2 + y^2 \leq 1$.

Z teorie funkcí jedné proměnné známe (Bolzanova věta):

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ (jednostranná spojitost v krajních bodech intervalu), pak funkce f nabývá všech hodnot mezi svojí největší a nejmenší hodnotou (tj. pro libovolné body $x_1, x_2 \in [a, b]$ a číslo c ležící mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ existuje $x_3 \in [a, b]$ takové, že $f(x_3) = c$).

Definice 1.42(i)

Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *souvislý*, jestliže P nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních podmnožin P, které jsou uzavřené v P. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *souvislá*, jestliže metrický prostor (A, ρ) je souvislý (tedy A nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních podmnožin A, které jsou uzavřené v A). Otevřená množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je souvislá právě tehdy, když každé dva body z A lze spojit lomenou čarou, která leží celá v A.

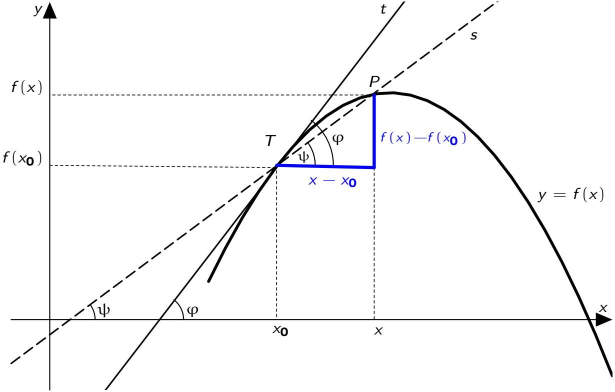
Věta 1.42(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť pro body $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu c ležícímu mezi hodnotami $f(A)$ a $f(B)$ existuje bod $C \in M$ takový, že $f(C) = c$.

Zejména pro $f(A)\, f(B) < 0$ existuje C takové, že $f(C) = 0$.

Derivace funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě x_0 je definována jako

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



Geometrický význam: číslo $f'(x_0)$ je směrnicí tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, tj. $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$.

Pro funkce více proměnných se ovšem k uvažovanému bodu můžeme blížit z nekonečně mnoha směrů. Je zcela přirozené nejdříve uvažovat situaci, kdy se do daného bodu budeme přibližovat ve směru rovnoběžném s některou ze souřadných os (pro nezávisle proměnné). V takovém případě hovoříme o *parciální* (částečné) *derivaci*. V případě pohybu do daného bodu ve směru daném vektorem $\vec{u}$ hovoříme o *směrové derivaci*.

Definice 1.45(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) := f(x, y_0)$. Má-li funkce $\varphi(x)$ derivaci v bodě x_0, nazýváme ji *parciální derivací funkce f podle proměnné x v bodě* $[x_0, y_0]$ a označujeme ji jako $f_x(x_0, y_0)$ nebo $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Tedy

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) := f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme ji *parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě* $[x_0, y_0]$ a označujeme ji jako $f_y(x_0, y_0)$ nebo $f'_y(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Pro nás budou důležité především vlastní derivace, proto budeme slovem „derivace" vždy mít na mysli „vlastní derivaci".

Více proměnných

Parciální derivace pro funkce n proměnných se definují zcela analogicky. Pro $f(x_1, \dots, x_n)$ a vhodný bod $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ definujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) := \lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{x_i - x_i^*},$$

kde $i \in \{1, \dots, n\}$.

Poznámka

Při výpočtu parciální derivace podle nějaké proměnné tedy postupujeme tak, že všechny ostatní proměnné považujeme za konstanty. Proto lze předpoklady Definice 1.45(i) oslabit:

Pro parciální derivaci podle x postačuje, aby společně s bodem $[x_0, y_0]$ náležely do definičního oboru i body ve tvaru $[x, y_0]$ pro x blízká x_0, tj. nějaká malá úsečka se středem v $[x_0, y_0]$, která je rovnoběžná s osou x. Toto bude splněno např. ve chvíli, kdy bod $[x_0, y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru funkce f. Podobné požadavky postačují pro parciální derivaci vzhledem k y.

Poznámka

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké množiny $B \subseteq D(f)$, jsou tyto derivace funkcemi proměnných x, y. Tyto funkce značíme jako $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$, příp. $f'_x(x, y)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ nebo $f'_y(x, y)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Protože se vlastně jedná o derivování funkce jedné proměnné, nemusíme se učit žádná nová pravidla pro derivování.

Věta 1.47(i)

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají parciální derivace podle proměnné x_i, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, na otevřené množině M. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl (pokud $g(x) \neq 0$) má na M také parciální derivaci podle x_i, přičemž pro všechna $x \in M$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f(x) \pm g(x)\big] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f(x)\, g(x)\big] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) g(x) + f(x) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) g(x) - f(x) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right)}{g^2(x)}.$$

Příklad

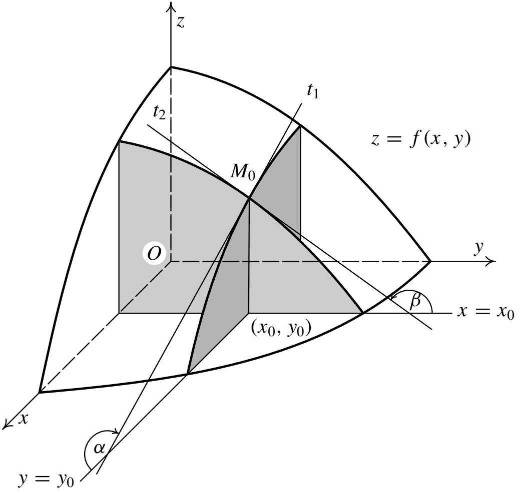
Vypočtěme parciální derivace pro funkce

$$\text{(a)}\ f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{(b)}\ f(x,y) = x^y,\ x > 0,$$

$$\text{(c)}\ f(x,y) = (x^2 + y^2)^3/2\ \text{ v bodě } [1,1], \quad \text{(d)}\ f(x,y) = x \ln(x^2 - y^2),$$

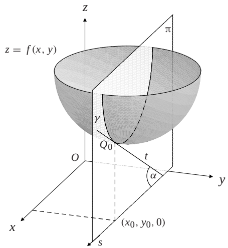
$$\text{(e)}\ f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\ \mathrm{e}^{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Jaký je geometrický význam parciální derivace?



Průnikem roviny $\pi : y = y_0$ a plochy dané jako graf funkce $f(x, y)$ je křivka γ, která je grafem funkce $\varphi(x)$. Pak parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny t_1 k této křivce v bodě $M_0 = \left[x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right]$, tj. $\operatorname{tg} \alpha = f_x(x_0, y_0)$.

Analogicky parciální derivace $f_y(x_0, y_0)$ určuje směrnici tečny t_2 vedené bodem M_0 ke křivce, která vznikne průnikem roviny $x = x_0$ a grafem funkce $f(x, y)$, tj. $\operatorname{tg} \beta = f_y(x_0, y_0)$.



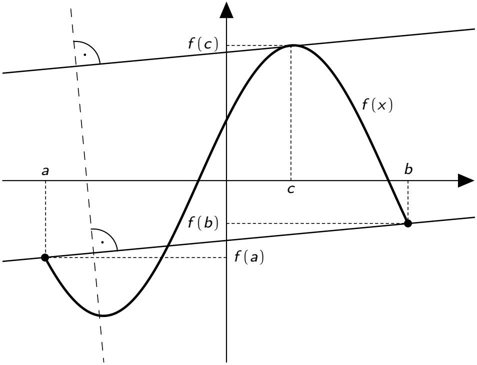
$\uparrow$ Obrázek převzat z: J. Kuben, Š. Mayerová, P. Račková a P. Šarmanová, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, dostupné z `http://goo.gl/ssl6OK`. $\uparrow$

$\longrightarrow$ Obrázek převzat z: Z. Došlá, R. Plch a P. Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, dostupné z `http://goo.gl/x9eRgT`. $\longrightarrow$

Z teorie funkcí jedné proměnné známe (Lagrangeova věta = věta o střední hodnotě):

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ (jednostranná spojitost v krajních bodech intervalu) a má-li v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x)$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{tj.} \quad f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$



Věta 1.50(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má parciální derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$ v libovolném bodě obdélníku $M \subset \mathbb{R}^2$ (tedy jeho strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami) a nechť $[x_0, y_0], [x_1, y_1] \in M$. Pak existují reálná čísla $\xi \in \big(\min\{x_0, x_1\}, \max\{x_0, x_1\}\big)$ a $\eta \in \big(\min\{y_0, y_1\}, \max\{y_0, y_1\}\big)$ taková, že

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_1)\,(x_1 - x_0) + f_y(x_0, \eta)\,(y_1 - y_0).$$

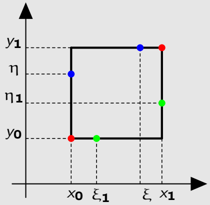
Důkaz? ■

Poznámka

Body $[\xi, y_1]$ a $[x_0, \eta]$ leží na sousedních stranách obdélníku určeného body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$. Při nepatrně odlišném postupu důkazu dostaneme velmi podobné tvrzení

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi_1, y_0)\,(x_1 - x_0) + f_y(x_1, \eta_1)\,(y_1 - y_0),$$

kde body $[\xi_1, y_0]$ a $[x_1, \eta_1]$ leží na zbývajících stranách obdélníku.



Poznámka

Pro funkci n proměnných lze Lagrangeovu větu zformulovat takto:
Nechť pro funkci $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ existují parciální derivace (prvního řádu) podle všech proměnných na n-rozměrném kvádru $M:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$, kde $a_i<b_i$ pro $i\in\{1,\dots,n\}$, a nechť $x=[x_1,\dots,x_n]$, $y=[y_1,\dots,y_n]\in M$. Pak existují reálná čísla $\xi_i\in\big(\min\{x_i,y_i\},\max\{x_i,y_i\}\big)$ pro $i\in\{1,\dots,n\}$ taková, že

$$f(y)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(z_i)\,(y_i-x_i)=f_{x_1}(z_1)\,(y_1-x_1)+\cdots+f_{x_n}(z_n)\,(y_n-x_n),$$

kde $z_i=[y_1,\dots,y_{i-1},\xi_i,x_{i+1},\dots,x_n]$ pro $i\in\{1,\dots,n\}$ jsou vnitřní body hrany kvádru M, tedy úseček, jejichž koncové body mají souřadnice $[y_1,\dots,y_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n]$ a $[y_1,\dots,y_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n]$.

Z teorie funkcí jedné proměnné známe:

Má-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá. Opačné tvrzení již neplatí (např. $f(x) = |x|$). Požadavek existence „vlastní" derivace je důležitý, neboť při existenci pouze nevlastní derivace tvrzení nemusí platit (např. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ vs. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ pro $x_0 = 0$).

Poznámka

Ovšem pro parciální derivace funkce více proměnných podobné tvrzení již neplatí. Na sld. 38 jsme ukázali, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0, \\ 1 & xy = 0. \end{cases}$$

není spojitá v bodě $[0,0]$. Ovšem platí $f_x(0,0) = 0$ a $f_y(0,0) = 0$ (proč?). Toto je ale zcela přirozené, neboť parciální derivace nám dávají informace pouze o chování dané funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami, přičemž v jiných směrech může být chování i „velmi divoké".

Pomocí Lagrangeovy věty ovšem můžeme odvodit postačující podmínku pro spojitost.

Důsledek 1.53(i)

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ohraničené parciální derivace na otevřené množině $K \subseteq \mathbb{R}^2$, je funkce f na množině K spojitá.

Důkaz? ■

Poznámka

Všimněme si, že tvrzení Důsledku 1.53(i) není v rozporu s nespojitostí funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0, \\ 1 & xy = 0. \end{cases}$$

Pomocná funkce (jedné proměnné) $\varphi(x) = f(x, y_0)$, kde $y_0 \neq 0$ nemá totiž vlastní derivaci v bodě $x = 0$, protože je zde nespojitá, tj. $f_x(0, y_0) = \varphi'(x)$ pro $y_0 \neq 0$ neexistuje. Podobně je tomu pro $f_y(x_0, 0)$, kde $x_0 \neq 0$. Na ose y tudíž neexistuje vlastní f_x s výjimkou počátku a na ose x neexistuje vlastní f_y s výjimkou počátku. V bodech, kde f_x a f_y existuje, je samozřejmě nulová, tj. ohraničená. Avšak nejsme schopni nalézt okolí počátku (tedy otevřenou množinu), v jehož každém bodě by f_x a f_y existovaly. Nejsou tedy splněny požadavky Důsledku 1.53(i).

Důsledek 1.53(ii)

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parciální derivace v okolí bodu $[x_0, y_0]$, které jsou v tomto bodě spojité, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$, na němž je funkce $f(x,y)$ spojitá.

Důkaz? ■

Z teorie funkcí jedné proměnné známe:

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$. Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na (a, b), je f na (a, b) konstantní.

Důsledek 1.54(i) Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na otevřené souvislé množině $M \subseteq D(f)$ všechny parciální derivace nulové. Pak je funkce f na množině M konstantní.

Důkaz? ■

Důsledek 1.54(ii) Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mají na otevřené souvislé množině $M \subseteq D(f) \cap D(g)$ totožné všechny parciální derivace. Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že na množině M platí $f(x, y) = g(x, y) + c$.

Důkaz? ■

Definice 1.54(i) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť v bodě $x^* \in D(f)$ existují všechny parciální derivace prvního řádu. Pak vektor

$$\operatorname{grad} f(x^*) := \left(f_{x_1}(x^*), \dots, f_{x_n}(x^*)\right)^\top$$

se nazývá *gradientem* funkce f v bodě x^*.

Podobně jako pro funkce jedné proměnné můžeme uvažovat i „derivace derivací" (nyní ovšem máme různé permutace).
Jak jsme již diskutovali (viz sld. 46), pokud existuje f_x ve všech bodech nějaké množiny M, pak dostáváme na M novou funkci $f_x(x, y)$, jejíž definiční obor je $D(f_x)$, přičemž obecně platí $D(f) \neq D(f_x)$ (např. $f(x) = \sqrt{x + \sin xy}$). Pro tuto funkci můžeme také uvažovat parciální derivace.

Definice 1.56(i)

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $[x_0, y_0] \in D(f)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme ji *parciální derivací druhého řádu podle proměnné x funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značíme jako $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme ji *smíšenou parciální derivací druhého řádu funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značíme jako $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Poznámka

- Parciální derivace druhého řádu $f_{yx}(x_0, y_0)$ a $f_{yy}(x_0, y_0)$ jsou definovány zcela analogicky.
- Parciální derivace m-tého řádu ($m \geq 3$) definujeme jako parciální derivace derivací $(m-1)$-ho řádu. Kolik má funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivací m-tého řádu?

Příklad

Vypočtěme parciální derivace druhého řádu pro funkce (viz sld. 47)

$$\text{(a) } f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \text{(b) } f(x,y) = x^y,\ x > 0.$$

Příklad

Ukažme, že funkce $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ splňuje rovnost $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

Záleží u smíšených parciálních derivací na pořadí derivování?

Příklad

Vypočtěme smíšené parciální derivace druhého řádu v bodě $[0,0]$ pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Věta 1.57(i)

Nechť pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existují v nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0,y_0)$ bodu $[x_0,y_0] \in D(f)$ smíšené parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x,y)$ a $f_{yx}(x,y)$, které jsou spojité v bodě $[x_0,y_0]$. Pak platí

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

(tedy smíšené parciální derivace druhého řádu jsou zaměnitelné).

Důkaz? ■

Tedy spojitost smíšených parciálních derivací f_{xy} a f_{yx} postačuje pro jejich rovnost. K tomu je ovšem potřeba spočítat f_{xy} a f_{yx} – jenže z toho už bezprostředně poznáme jejich (ne-)rovnost. Tedy použití Věty 1.57(i) není příliš efektivní, naštěstí máme užitečnější tvrzení.

Věta 1.58(i)

Nechť v nějaké okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0] \in D(f)$ pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí:

- existují parciální derivace prvního řádu $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$,
- existuje smíšená parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x, y)$ (s případnou výjimkou samotného bodu $[x_0, y_0]$),
- existuje
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{xy}(x, y) = K.$$

Pak obě smíšené parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x_0, y_0)$ a $f_{yx}(x_0, y_0)$ existují a platí
$$f_{xy}(x_0, y_0) = K = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Poznámka

Poslední předpoklad je splněn zejména ve chvíli, je-li smíšená parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x, y)$ spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. Pak Věta 1.58(i) ukazuje, že z existence a spojitosti jedné smíšené parciální derivace druhého řádu již plyne existence druhé a jejich rovnost.

Důkaz? ■

Podobné tvrzení i pro smíšené parciální derivace vyšších řádů. Pro nás bude postačující následující formulace tohoto tvrzení.

Věta 1.59(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na otevřené množině M spojité všechny parciální derivace až do řádu m, kde $m \in \mathbb{N}$ a $m \geq 2$. Pak hodnoty všech smíšených parciálních derivací funkce f až do řádu m nezávisí na pořadí derivování, ale pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle proměnné x a kolikrát podle proměnné y.

Důkaz? ■

Analogická tvrzení platí i pro funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Kolik nejvýše může mít funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ různých parciálních derivací m-tého řádu při splnění požadavků Věty 1.59(i)?

Parciální derivace funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $x^* \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je vlastně obyčejná derivace, kterou získáme zúžením definičního oboru funkce f na přímku jdoucí bodem x^* a rovnoběžnou s i-tou souřadnou osou. Nyní provedeme podobné zúžení, ovšem přímka bude mít směr vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{V}^2 \setminus \{0\}$, kde $\mathbb{V}^2$ je množina vektorů v $\mathbb{R}^2$. Tedy místo funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ budeme vyšetřovat funkci $\varphi(t) = f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$.

Definice 1.61(i)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, x^* je vnitřní bod $D(f)$ a $\vec{u} \in \mathbb{V}^n \setminus \{0\}$. Položme $\varphi(t) := f(x^* + t\vec{u})$. Má-li funkce $\varphi(t)$ derivaci pro $t = 0$, nazýváme ji *směrovou derivací funkce f v bodě x^** (nebo derivací funkce f ve směru vektoru $\vec{u}$) a značíme jako $f_{\vec{u}}(x^*)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x^*)$, tj.

$$f_{\vec{u}}(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^* + t\vec{u}) - f(x^*)}{t}.$$

Poznámka

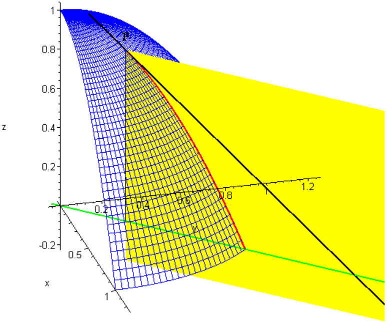
- Jestliže $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ je standardní báze prostoru $\mathbb{V}^n$, tj. vektor $\vec{e}_i$ má pro $i \in \{1, \dots, n\}$ na i-té pozici jedničku a na zbývajících pozicích nuly, pak pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $f_{\vec{e}_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*)$. Zejména tedy pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dostáváme rovnosti $f_{(1,0)^\top}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ a $f_{(0,1)^\top}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$.
- Jestliže $f_{\vec{u}}(x^*)$ existuje, znamená to, že funkce $\varphi(t)$ je definována v okolí nuly. Proto místo podmínky, že x^* je vnitřní bod $D(f)$, stačí pouze předpokládat, že funkce $D(f)$ obsahuje úsečku, která má střed v bodě x^* a je rovnoběžná s vektorem $\vec{u}$.

Poznámka

Vzhledem k tomu, že i směrová derivace je vlastně definována jako obyčejná derivace funkce $\varphi(t)$, platí pro její počítání následující pravidla. Nechť pro $x^* \in \mathbb{R}^n$ existuje $f_{\vec{u}}(x^*)$ a $g_{\vec{u}}(x^*)$, pak

- pro každé $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje $f_{c\vec{u}}(x^*)$ a platí $f_{c\vec{u}}(x^*) = c\, f_{\vec{u}}(x^*)$,
- $(f \pm g)_{\vec{u}}(x^*) = f_{\vec{u}}(x^*) \pm g_{\vec{u}}(x^*)$,
- $(fg)_{\vec{u}}(x^*) = f_{\vec{u}}(x^*)\, g(x^*) + f(x^*)\, g_{\vec{u}}(x^*)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)_{\vec{u}}(x^*) = \dfrac{f_{\vec{u}}(x^*)\, g(x^*) + f(x^*)\, g_{\vec{u}}(x^*)}{g^2(x^*)}$, je-li $g(x^*) \neq 0$.

Geometrický význam směrové derivace: $\operatorname{tg} \alpha = f_{\vec{u}}(x^*)$.



Poznámka

Jestliže je vektor grad $f(x)$ spojitý v bodě x^*, pak platí

$$f_{\vec{u}}(x^*) = \langle \operatorname{grad} f(x^*),\ \vec{u} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^*)\, u_k,$$

kde $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \vec{u}^\top \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ je skalární součin.

Příklad

Vypočtěme směrovou derivaci $f_{\vec{u}}(x_0, y_0)$, je-li dáno:

(a) $f(x,y) = x^2 - 3xy - 2y^2,\ [x_0, y_0] = [-1, 1],\ \vec{u} = (2, -1)^\top,$

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2),\ [x_0, y_0] = [1, -1],\ \vec{u} = (1, 2)^\top,$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},\ [x_0, y_0] = [1, 1],\ \vec{u} = (2, 1)^\top,$

(d) $f(x,y) = x^2 y \ln \dfrac{x}{y},\ [x_0, y_0] = [2, 3],\ \vec{u} = (1, -2)^\top,$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^4}{x^2 + y^2} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0], \end{cases}\quad [x_0, y_0] = [0, 0],\ \vec{u} = (3, 1)^\top.$

Poznámka

Je-li $\operatorname{grad} f(x)$ spojitý v bodě x^*, pak ze vzorce pro odchylku dvou vektorů $\cos\varphi = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$, kde $\|\vec{u}\| := \sqrt{\langle \vec{u},\ \vec{u}\rangle}$, a z předchozí rovnosti plyne

$$f_{\vec{u}}(x^*) = \langle \operatorname{grad} f(x^*),\ \vec{u}\,\rangle = \|\operatorname{grad} f(x^*)\|\,\|\vec{u}\|\cos\varphi, \tag{1}$$

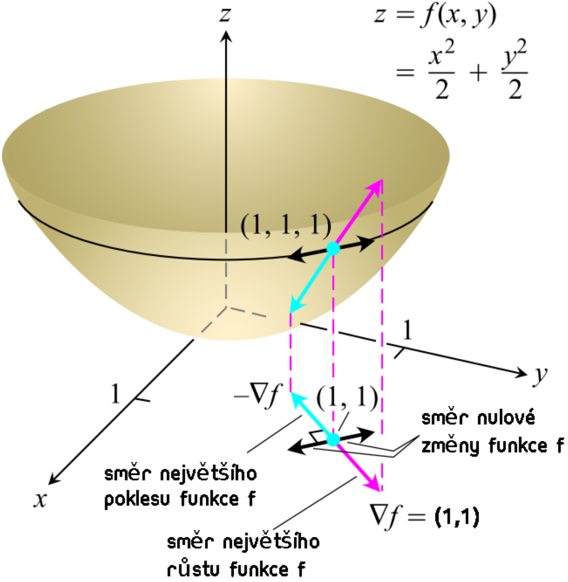
$\varphi \in [0, \pi]$ je odchylka vektorů $\operatorname{grad} f(x^*)$ a $\vec{u}$.

Směrová derivace (podobně jako obyčejná a parciální derivace) udává rychlost změny funkce f ve směru vektoru $\vec{u}$. Uvažme nyní všechny vektory $\vec{u}$ s konstantní délkou, pak hodnota $f_{\vec{u}}(x^*)$ bude podle (1) maximální, jestliže $\varphi = 0$ (skalární součin $\langle \operatorname{grad} f(x^*),\ \vec{u}\,\rangle$ nabývá pro vektory $\vec{u}$ největší hodnoty, jestliže jsou vektory $\operatorname{grad} f(x^*)$ a $\vec{u}$ lineárně závislé). Proto $\operatorname{grad} f(x^*)$ udává směr, ve kterém funkce f v bodě x^* roste nejrychleji. Podobně $-\operatorname{grad} f(x^*)$ je směr nejrychlejšího poklesu funkce f v bodě x^*. Je-li $\vec{u} \perp \operatorname{grad} f(x^*)$, pak $f_{\vec{u}}(x^*) = 0$, tedy v tomto směru se hodnota funkce f v bodě x^* nemění. Nebo-li platí následující věta.

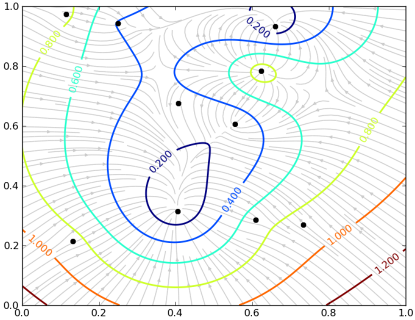
Věta 1.64(i)

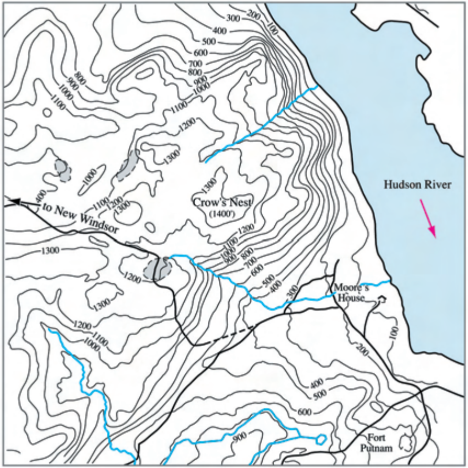
Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a nechť vektor $\operatorname{grad} f(x, y)$ je spojitý a nenulový v bodě $[x_0, y_0]$. Pak směrová derivace $f_{\vec{u}}(x_0, y_0)$ ve směru jednotkového vektoru $\vec{u}$ nabývá největší hodnoty pro $\vec{u} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|}$ a nejmenší hodnoty pro $\vec{u} = -\frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|}$. Maximální hodnota potom je $f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|$ a minimální $f_{\vec{u}}(x_0, y_0) = -\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|$.

Ilustrace významu **grad** f pro $f(x,y) = x^2/2 + y^2/2$ v bodě $[1,1]$. Definujeme $\nabla f(x) := (\mathbf{grad}\, f(x))^\top$, tj. ∇ značí tzv. Hamiltonův *nabla* operátor $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.



Gradient vlastně udává směr největšího sklonu/spádu. Také platí, že vektor **grad** $f(x^*)$ je normálou (tj. kolmý k tečně) pro vrstevnici funkce f, která prochází bodem x^*.





Příklad

Najděme jednotkový vektor $\vec{u}$, pro který je směrová derivace funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+4}$ v bodě $[2,1]$ největší, a určeme její hodnotu.

Poznámka

Vedle identit uvedených na sld. 62 již však nemusí platit aditivita směrových derivací vzhledem k vektorům určujícím směr derivace. Jestliže existují $f_{\vec{u}}(x^*)$ a $f_{\vec{v}}(x^*)$, nemusí existovat $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^*)$. A i když existuje $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^*)$ může být $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^*) \neq f_{\vec{u}}(x^*) + f_{\vec{v}}(x^*)$. Ovšem platí:

Nechť $f_{\vec{u}}(x^*)$ je spojitá v nějakém okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* a nechť existuje $f_{\vec{v}}(x^*)$. Potom platí $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^*) = f_{\vec{u}}(x^*) + f_{\vec{v}}(x^*)$.

Příklad

Nechť

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & [x,y]\neq[0,0],\\ 0 & [x,y]\neq[0,0]\end{cases}$$

$[x_0,y_0]=[0,0]$, $\vec{u}=(1,0)^\top$ a $\vec{v}=(0,1)^\top$. Ukažme, že existují $f_{\vec{u}}(0,0)$, $f_{\vec{v}}(0,0)$, $f_{\vec{u}+\vec{v}}(0,0)$, avšak $f_{\vec{u}+\vec{v}}(0,0) \neq f_{\vec{u}}(0,0) + f_{\vec{v}}(0,0)$.

Poznámka

Již víme, že z existence všech parciálních derivací prvního řádu funkce f v bodě x^* neplyne spojitost funkce f v bodě x^* (viz sld. 52). Ovšem ani existence směrové derivace $f_{\vec{u}}(x^*)$ v libovolném směru neimplikuje spojitost funkce f v bodě x^*. Toto může být na první pohled překvapující, protože nyní již zahrnujeme všechny směry přiblížení. Ovšem všechny tyto směry reprezentují přiblížení po přímkách, přičemž definice limity (s jejíž pomocí je definována spojitost) zahrnuje všechny způsoby přiblížení do bodu x^* (paraboly, kubické křivky, ...).

Příklad

Ukažme, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ směrovou derivaci $f_{\vec{u}}(0,0)$ pro libovolném směr $\vec{u} \in \mathbb{V}^2 \setminus \{0\}$, ovšem není v tomto bodě spojitá.

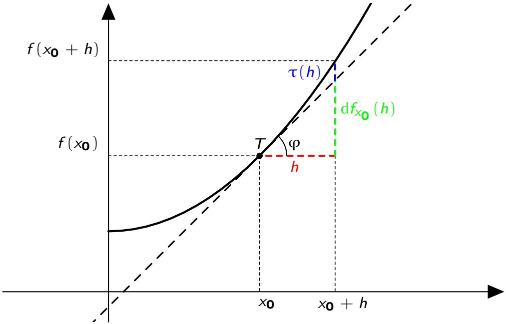
Poznámka

Podobně jako u parciálních derivací lze definovat také směrové derivace vyšších řádů, např. $f_{\vec{u}\vec{v}}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial u \partial v}(x^*)$. Navíc i pro směrové derivace vyšších řádu lze dokázat obdobná tvrzení jako ve Větách 1.57(i), 1.58(i) a 1.59(i).

Pro funkci jedné reálné proměnné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferenciál $\mathrm{d}f_{x_0}(h)$ definován jako přírůstek funkce na tečně t ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$. Chceme vlastně najít číslo $A \in \mathbb{R}$ takové, aby přibližně platilo

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq Ah,$$

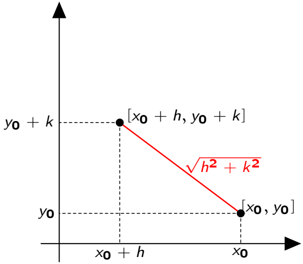
kde $|h|$ je malé reálné číslo. Při této aproximaci se ovšem dopustíme chyby $\tau(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah$ a je rozumné požadovat, aby $\lim_{h\to 0} \tau(h)/h = 0$ (pak totiž existuje nejvýše jedno číslo A s požadovanými vlastnostmi). Pokud takové číslo $A \in \mathbb{R}$ existuje, nazývá se funkce f *diferencovatelná* a lineární funkce $\mathrm{d}f_{x_0}(h) := Ah$ se nazývá *diferenciál funkce f v bodě x_0*. Navíc existence diferenciálu je pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekvivalentní s existencí vlastní derivace funkce f v bodě x_0, přičemž platí rovnost $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = f'(x_0)\, h$.



Na úvod poznamenejme, že se v této kapitole zaměříme výhradně na funkce dvou proměnných – pro funkce více proměnných lze postupovat analogickým způsobem.

Uvidíme, že pro funkce více proměnných představuje diferenciál z geometrického pohledu opět náhradu funkce tečnou (nad-)rovinou, ovšem jeho souvislost s parciálními derivacemi je mnohem komplikovanější.

Uvažme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a zvolme pevně bod $[x_0, y_0] \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, v jehož nějakém okolí je funkce f definována. Vezměme nyní malá reálná čísla h, k (kladná, záporná, alespoň jedno nenulové) a posuňme se z bodu $[x_0, y_0]$ do bodu $[x_0 + h, y_0 + k]$ (viz obrázek níže pro $h < 0$ a $k > 0$).



Čísla h, k se nazývají *přírůstkem nezávisle proměnných*. Pokud $x = x_0 + h$ a $y = y_0 + k$, pak $h = x - x_0$ a $k = y - y_0$. Analogicky se rozdíl funkčních hodnot v bodech $[x_0, y_0]$ a $[x_0 + h, y_0 + k]$, tj. číslo $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ nazývá *přírůstkem závisle proměnné*.

Nyní bychom chtěli nahradit funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v jistém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0]$ lineární funkcí (jejímž grafem bude rovina). Tedy chceme najít taková čísla $A, B \in \mathbb{R}$, aby v „dostatečné blízkosti" bodu $[x_0, y_0]$ platilo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \doteq Ah + Bk.$$

Při tomto nahrazení se přirozeně dopustíme jisté chyby (pokud není sama funkce f lineární). Tato chyba závisí na hodnotách h, k. Označíme ji proto jako $w(h, k)$, přičemž platí

$$w(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk.$$

Zajímá nás nyní, zda existují čísla A, B taková, že $w(h, k)$ nabývá pro „dostatečně malé" hodnoty $|h|$ a $|k|$ hodnot blízkých nule. Co zde rozumíme pojmem „malá" hodnota? Ukazuje se rozumné (podobně jako pro funkci jedné proměnné) požadovat, aby limita funkce $w(h, k)$ dělená vzdáleností bodů $[x_0, y_0]$ a $[x_0 + h, y_0 + k]$ (měřené nyní v Euklidovské metrice, tj. $\sqrt{h^2 + k^2}$) se rovnala nule pro $h \to 0$ a $k \to 0$, tedy

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{w(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Definice 1.73(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém okolí bodu $\mathcal{O}(x_0, y_0)$. Existují-li taková konečná čísla $A, B \in \mathbb{R}$, že pro funkci $w(h,k)$ definovanou jako

$$w(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk$$

platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{w(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0, \tag{2}$$

pak říkáme, že funkce f je v bodě $[x_0, y_0]$ *diferencovatelná*. Lineární funkci $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) = Ah + Bk$ nazýváme *totálním diferenciálem funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$.

Totální diferenciál z Definice 1.73(i) se často označuje pouze jako *diferenciál*, příp. *silný* nebo *Fréchetův* diferenciál. Existují i jiné (obecnější) diferenciály, např. tzv. slabý (Gâteauxův) diferenciál.

Poznámka

Ve jmenovateli limity (2) je výraz $\sqrt{h^2 + k^2}$, který souvisí s volbou metriky ρ_E. Pokud zvolíme maximální metriku ρ_∞, tj. nahradíme jej výrazem $\max\{h, k\}$, nebo součtovou metriku, tj. nahradíme jej výrazem $|h| + |k|$, obdržíme ekvivalentní definici diferenciálu (vždyť tyto metriky jsou ekvivalentní).

Podobně jako v $\mathbb{R}$ diferencovatelnost funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ úzce souvisí s parciálními derivacemi.

Věta 1.74(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Pak jsou čísla A, B ve vztahu (2) určena jednoznačně, existují parciální derivace $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ a platí

$$A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0).$$

Tedy pro diferenciál funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ dostáváme

$$\mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(h, k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Důkaz? ■

Již víme, že existence parciálních/směrových derivací není dostačující pro spojitost funkce f. A diferencovatelnost?

Věta 1.74(ii)

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz? ■

Příklad

Ukažme, že funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & xy\neq 0,\\ 1 & xy=0.\end{cases}$$

není v bodě $[0,0]$ diferencovatelná (viz sld. 38).

Jak ale poznáme, že daná funkce je diferencovatelná v nějakém bodě? Z předchozího plyne, že funkce musí být v tomto bodě spojitá a musí zde mít parciální derivace prvního řádu. To ale není postačující.

Příklad

Ověřme, že funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & [x,y]\neq[0,0],\\ 0 & [x,y]=[0,0],\end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0,0]$, má v tomto bodě obě parciální derivace prvního řádu, ale není zde diferencovatelná (viz sld. 35).

Věta 1.75(i)

Má-li funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ spojité parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0,y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

Důkaz? ■

Příklad

Ověřme, že funkce $f(x, y)$ je v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná a vypočtěme $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k)$, jestliže

$$\text{(a) } f(x,y) = 2xy - 3x^2y + y\ln x,\ \ [x_0,y_0] = [1,2],$$
$$\text{(b) } f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ \ [x_0,y_0] = [1,-1].$$

Příklad

Ovšem Věta 1.75(i) dává pouze postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Uvažme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$$f(x,y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \text{kde} \quad \varphi(t) = \begin{cases} t^2 \sin\frac{1}{t} & t \neq 0, \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

Předchozí výsledky ukazující souvislost mezi spojitostí, existencí parciálních derivací a diferencovatelností funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ můžeme tedy shrnout:

$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ existuje	$\Rightarrow$	existují $f_x(x_0,y_0)$ a $f_y(x_0,y_0)$, viz Věta 1.74(i)
$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ existuje	$\Rightarrow$	funkce f je spojitá v $[x_0,y_0]$, viz Věta 1.74(ii)
$f_x(x_0,y_0)$ a $f_y(x_0,y_0)$ existují	potom	$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ nemusí existovat, viz Příklad na sld. 75
f je spojitá a $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ existují	potom	$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ nemusí existovat, viz Příklad na sld. 75
$f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ jsou spojité	$\Rightarrow$	$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ existuje, viz Věta 1.75(i)
$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ existuje	potom	$f_x(x_0,y_0)$ a $f_y(x_0,y_0)$ nemusí být spojité, viz Příklad na sld. 76

Z existence diferenciálu tedy také plyne existence obou tečen t_1 a t_2 z obrázku na slidu 48. Nyní si ukážeme, že rovina určená těmito přímkami je skutečně tečnou ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě M_0.

Definice 1.78(i)

Rovina $\tau: z = Ax + By + C$ se nazývá *tečnou rovinou* funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $M_0 = \big[x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big]$, jestliže

- rovina τ prochází bodem M_0,
- platí $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$

Druhá podmínka vlastně vyjadřuje, že poměr vertikální vzdálenosti mezi grafem funkce $f(x,y)$ a rovinou τ v bodě $[x,y]$ a vzdáleností bodů $[x,y]$ a $[x_0,y_0]$ se blíží k nule, jestliže se bod $[x,y]$ blíží k $[x_0,y_0]$, tj. čitatel se blíží k nule rychleji než jmenovatel.

Z první podmínky plyne, že $f(x_0,y_0) = Ax_0 + By_0 + C$, tedy $C = f(x_0,y_0) - Ax_0 - By_0$, což po dosazení dává

$$\tau: \; z = A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Dosazením předchozího vyjádření C do limity ve druhé podmínce obdržíme požadavek

$$0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x-x_0) - B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \left| \begin{matrix} x=x_0+h \\ y=y_0+k \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

což je shodné s podmínkou v Definici 1.73(i). Tedy existence tečné roviny je ekvivalentní s existencí totální diferenciálu $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$. Navíc podle Věty 1.74(i) musí platit $A = f_x(x_0,y_0)$ a $B = f_y(x_0,y_0)$.

Věta 1.79(i)

Tečná rovina τ ke grafu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $\big[x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big]$ existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Její rovnice je potom

$$\tau: \ z = f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0) + f(x_0,y_0),$$

nebo-li volbou $z_0 := f(x_0,y_0)$ dostáváme

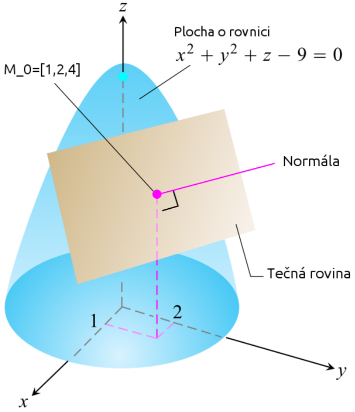
$$\tau: \ z - z_0 = \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0).$$

Je-li τ tečná rovina ke grafu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $M_0 = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, pak přímka procházející bodem dotyku M_0 a kolmá k rovině τ se nazývá *normála* ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě M_0. Protože normálový vektor roviny τ je $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$, parametrické rovnice normály jsou

$$n:\; x = x_0 + t\, f_x(x_0, y_0), \quad y = y_0 + t\, f_y(x_0, y_0), \quad z = z_0 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jsou-li navíc $f_x(x_0, y_0) \neq 0 \neq f_y(x_0, y_0)$, pak lze parametr t vyloučit, čímž dostaneme

$$n:\; f(x_0, y_0) - z = \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)}.$$



Příklad

Určeme rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce

$$f(x,y) = 2x^2y - 3xy^3 + \frac{x}{y} + e^{x+2y}$$

v bodě $[-2, 1, ?]$.

Příklad

Najděme rovnici tečné roviny ke grafu funkce

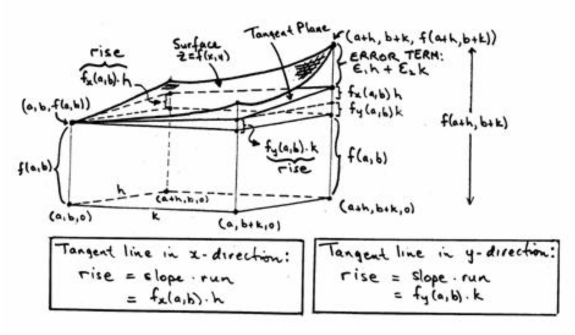
$$f(x,y) = 2x^2 - y^2,$$

která je rovnoběžná s rovinou $\rho:\ 8x - 6y - z - 15 = 0$.

Z geometrického hlediska je tedy opět diferenciál funkce v daném bodě přírůstkem funkce na tečné rovině. Funkce $w(h,k)$ určuje rozdíl mezi skutečným přírůstkem a přírůstkem na tečné rovině, tj. platí

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) + w(h,k),$$

kde $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ představuje lineární část přírůstku (je to lineární funkce) a $w(h,k)$ představuje nelineární část přírůstku.



Obrázek převzat z `http://goo.gl/mDqrHd`.

Rovnice tečné roviny je nejlepší lineární aproximace funkce $f(x,y)$ v okolí bodu $[x_0,y_0]$.

Pokud není tečná rovina τ rovnoběžná s osou x nebo y, tj. $f_x(x_0, y_0) \neq 0 \neq f_y(x_0, y_0)$, je nelineární část přírůstku $w(h, k)$ menší než lineární část $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k)$, čehož se dá využít ke stanovení přibližné funkční hodnoty

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k) \quad \text{pro } [x, y] \text{ blízké } [x_0, y_0].$$

Toto použití již dnes ztratilo smysl, ovšem diferenciál se využívá např. při náhradě složitých nelineárních úloh jednoduššími (i když méně přesnými) lineárními. Diferenciál se také často používá k aproximaci absolutních a relativních změn veličin, tj.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \quad \text{a} \quad \frac{\Delta f(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}.$$

Pak totiž platí

$$\Delta f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k) \quad \text{a} \quad \frac{\Delta f(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} = \frac{\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k)}{f(x_0, y_0)}.$$

Při těchto aproximacích se dopustíme jisté chyby, která je dána funkcí $w(h, k)$ v případě absolutní změny a podílem $\frac{w(h,k)}{f(x_0,y_0)}$ v případě relativní změny.

Příklad

Pomocí diferenciálu vypočtěme přibližně

$$\text{(a) } 1,04^{2,02}, \quad \text{(b) } \sqrt{2,98^2 + 4,05^2}.$$

Příklad

Válcová plocha měla mít podle plánu poloměr 1 dm a výšku 5 dm. Nepřesností výroby je poloměr větší o 0,03 dm a výška menší o 0,1 dm. Odhadněme pomocí diferenciálu absolutní a relativní změnu objemu.

Mějme zadáno

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y, \tag{3}$$

kde $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou spojité funkce na otevřené jednoduše souvislé množině Ω, které zde mají spojité parciální derivace $P_y(x,y)$ a $Q_x(x,y)$. Je výraz (3) totálním diferenciálem nějaké funkce $H(x,y)$? Ano právě tehdy, když platí

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \quad \text{pro všechny } [x,y] \in \Omega.$$

Hledaná funkce $H(x,y)$ se nazývá *kmenová funkce*.

Pro funkce jedné proměnné platí:

Nechť funkce $u = g(x)$ má vlastní derivaci v bodě x_0. Má-li funkce $y = f(x)$ vlastní derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$, pak složená funkce $y = F(x) = f\big(g(x)\big)$ má vlastní derivaci v x_0 a platí $y'(x_0) = f'(u_0)\, g(x_0)$.

Jak derivovat složené funkce více proměnných?

Věta 1.87(i)

Nechť funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Položme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Nechť funkce $f(u, v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$. Pak složená funkce $F(x, y) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$ má parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

nebo-li zkráceně

$$F_x = f_u\, u_x + f_v\, v_x, \quad F_y = f_u\, u_y + f_v\, v_y$$

Příklad

Vypočtěme F_x a F_y, jestliže $F(x, y) = f(u, v)$, kde $f(u, v) = u^2 + v^2$, $u(x, y) = x - y$ a $v(x, y) = x/y$.

Příklad

Pomocí transformace do polárních souřadnic $x = \rho \cos \varphi$ a $y = \rho \sin \varphi$ najděme všechny diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující rovnost

$$y\, f_x(x, y) - x\, f_y(x, y) = 0.$$

Pro funkce jedné proměnné platí:

Nechť má funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ včetně pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ a ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x.

Věta 1.89(i)

Nechť funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má v bodě $[x_0,y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně pro $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Pak pro každý bod $[x,y]$ z tohoto okolí platí

$$f(x,y)=T_n(x,y)+R_n(x,y),$$

kde pro $h=x-x_0$, $k=y-y_0$ a $\vartheta\in(0,1)$ klademe

$$\begin{aligned}T_n(x,y)&=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\right)+\\&\quad+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right)+\\&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\,\partial y^j}(x_0,y_0)h^{n-j}k^j,\\R_n(x,y)&=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\,\partial y^j}(x_0+\vartheta h,y_0+\vartheta k)h^{n+1-j}k^j.\end{aligned}$$

Nechť $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Jaké vlastnosti funkce F zaručí, že rovnice $F(x, y) = 0$ je jednoznačně řešitelná vzhledem k y, tedy existuje spojitá funkce $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že rovnost $F(x, y) = 0$ je ekvivalentní s $y = g(x)$?
Nebo uvažme množinu (křivku)

$$M = \{[x, y] \in D(f): \ F(x, y) = 0\},$$

např. pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je M jednotková kružnice se středem v počátku. Zvolme nějaký bod na křivce M a chtějme vyšetřit chování křivky v okolí tohoto bodu (např. rovnici tečny a zda funkce leží nad/pod tečnou). Platí-li $F(x, y) = y - g(x)$, pak je křivka M přímo grafem nějaké funkce jedné proměnné a problém lze snadno vyřešit pomocí g' a g''. V některých jednoduchých případech to opravdu je možné (např. právě pro kružnici). Ovšem co když např. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$?

Definice 1.91(i)

Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $M = \{[x, y] \in D(f) : \ F(x, y) = 0\}$. Jestliže existuje nějaké okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0) = \{[x, y] \in D(F) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že množina $M \cap \mathcal{O}(x_0, y_0)$ je totožná s grafem funkce $y = g(x)$ pro $|x - x_0| < \delta$, řekneme, že funkce g je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.

Věta 1.91(ii)

Nechť je funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá na čtverci $R = \{[x, y] \in D(F) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < a\}$ a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Dále předpokládejme, že funkce F má spojitou parciální derivaci $F_y(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ a platí $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna spojitá funkce $y = g(x)$. Má-li navíc F na čtverci R spojité parciální derivace 1. řádu, pak má funkce $g(x)$ v bodě x_0 derivaci a platí

$$g'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Hledání extrémů funkcí je jednou z nejdůležitějších aplikací diferenciálního počtu. Jedná se vlastně o nalezení řešení jisté optimalizační (max./min.) úlohy, se kterými se setkáme v řadě oblastí. Rozlišujeme několik typů extrémů:

- lokální,
- globální,
- vázané.

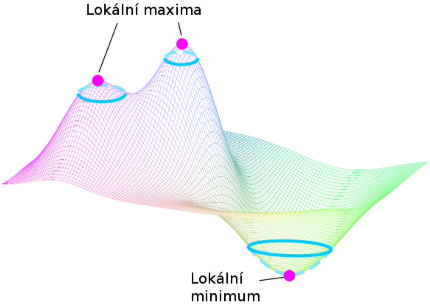
Definice 1.93(i)

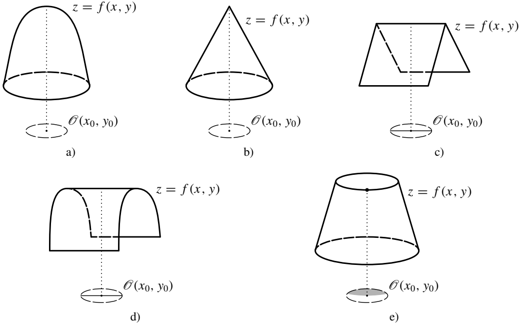
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ ($f(x) \geq f(x^*)$).
Jsou-li nerovnosti ostré pro $x \neq x^*$, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech. Pro (ostrá) lokální maxima a minima budeme užívat jednotné označení *(ostrý) lokální extrém*.

Poznámka

Z Definice 1.93(i) vyplývá, že bod x^* musí být vnitřním bodem $D(f)$, protože funkce f musí být definována na jistém okolí $\mathcal{O}(x^*)$. Definici by samozřejmě šlo změnit tak, aby zahrnovala i hraniční body (stačilo by místo $x \in \mathcal{O}(x^*)$ uvažovat $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap D(f)$), ale pro naše účely bude tato definice postačovat.

Představíme-li si graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jako plastickou mapu, hledáme vlastně kopečky (příp. pohoří) a ďolíky (příp. údolí).





Jak mohou lokální extrémy vypadat? (Obrázek převzat z: J. Kuben, Š. Mayerová, P. Račková a P. Šarmanová, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, dostupné z `http://goo.gl/ssl6OK`.)

Označení „ostrý“ nemá nic společného s tím, zda je graf „zakulacený“ či nikoli. Jde pouze o chování funkčních hodnot v okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^*.

Příklad

Rozhodněme, zda má funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lokální extrém v bodě $[0,0]$, jestliže

$$\text{(a)}\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{(b)}\ f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & [x,y] \neq [0,0], \\ 1 & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Vidíme, že pro existenci lokálního extrému v bodě x^* není nutná ani existence parciálních derivaci ani spojitost. Má-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě x^* lokální extrém, pak každá pomocná funkce jedné proměnné musí mít v tomto bodě také lokální extrém (pokud existují příslušné tečny, musí být vodorovné). To tedy znamená, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0$ (viz předchozí obrázek a, d) nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$ neexistuje (viz předchozí obrázek b, c, e). I zde však platí, že existuje-li tečná (nad-)rovina, musí být vodorovná. Pro nás bude dostačující věnovat pozornost funkcím, které mají v bodech lokálních extrémů všechny parciální derivace prvního řádu.

Definice 1.95(i)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $x^* \in \mathbb{R}^n$ je *stacionárním bodem funkce f*, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace prvního řádu a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, n.$$

Nyní můžeme zformulovat nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému.

Věta 1.96(i)

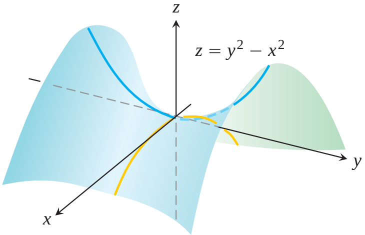
Nechť funkce $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f. Pak je x^* jejím stacionárním bodem.

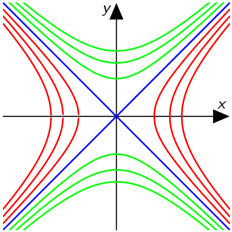
Důkaz? ■

Ovšem opačné tvrzení neplatí (stejně jako pro funkce jedné proměnné), tj. ne každý stacionární bod je lokálním extrémem.

Definice 1.96(i)

Nechť x^* je stacionárním bodem funkce $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Bod x^* se nazývá *sedlo* (nebo *sedlový bod*), jestliže každé jeho okolí obsahuje body $\bar{x}, \tilde{x}$, pro které platí $f(x^*) > f(\bar{x})$ a současně $f(x^*) < f(\tilde{x})$.





A jak garantovat existenci extrému ve stacionárním bodě? Pro funkci jedné proměnné $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lze o existenci extrému ve stacionárním bodě x_0, tj. $g'(x_0) = 0$, rozhodnout buď pomocí znaménkové změny první derivace v okolí bodu x_0 nebo pomocí druhé derivace, neboť platí:

Je-li bod $x_0 \in \mathbb{R}$ stacionárním bodem funkce g a současně $g''(x_0) < 0$ ($g''(x_0) > 0$), pak bod x_0 je ostré lokální maximum (minimum).

Věta 1.97(i)

Nechť bod $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je stacionárním bodem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Jestliže platí

$$\begin{aligned} D(x_0, y_0) &:= f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0, \end{aligned}$$

pak má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jedná se o minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jedná se o maximum. V případě $D(x_0, y_0) < 0$ má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ sedlový bod, zatímco v případě $D(x_0, y_0) = 0$ nelze rozhodnout.

Důkaz? ■

Poznámka

Ilustrujme poslední situaci z Věty 1.97(i). Uvažme funkce

$$\text{(a) } f(x,y) = x^4 + y^4, \quad \text{(b) } f(x,y) = x^3 + y^3.$$

Poznámka

V případě lokálního extrému je nutně $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$, protože jinak $D(x_0, y_0) = -\big[f_{xy}(x_0, y_0)\big]^2 < 0$, což je spor. Ze stejného důvodu také $f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$.

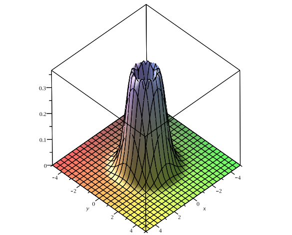
Navíc o typu lokálního extrému lze se stejnou klasifikací rozhodnout i pomocí $f_{yy}(x_0, y_0)$, neboť $f_{xx}(x_0, y_0)$ a $f_{yy}(x_0, y_0)$ musí mít stejné znaménko, jinak totiž $D(x_0, y_0) < 0$.

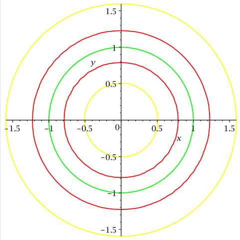
Příklad

Určeme lokální extrémy pro funkce

$$\text{(a) } f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y, \quad \text{(b) } f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

$$\text{(c) } f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$





Pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde $n \geq 3$, se postupuje podobně. Musíme určit stacionární bod (Definice 1.95(i)) a rozhodnout o definitnosti tzv. *Hessovy matice*

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) & \cdots & f_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & \cdots & \cdots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Lineární algebra

Matice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá *negativně semidefinitní*, pokud

$$z^\top Mz \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

a píšeme $M \leq 0$. Jestliže dokonce platí $z^\top Mz < 0$ pro všechny vektory $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, nazývá se matice M *negativně definitní* a zapisuje se jako $M < 0$. Analogicky definujeme *pozitivně (semi-)definitní* matice. Jestliže existují vektory $z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ takové, že platí $z^\top Mz > 0$ a $\tilde{z}^\top M\tilde{z} < 0$, pak se matice M nazývá *indefinitní*.

Jak poznat definitnost matice?

Věta 1.100(i)

Nechť matice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická.

- Potom platí $M < 0$ ($M > 0$) právě tehdy, když všechny její vlastní hodnoty (přičemž symetrie zaručuje, že to jsou reálná čísla) jsou záporné (kladné).
- Potom platí $M \leq 0$ ($M \geq 0$) právě tehdy, když všechny její vlastní hodnoty (přičemž symetrie zaručuje, že to jsou reálná čísla) jsou nekladné (nezáporné).
- Vedoucí hlavní submatice a minory (VHM):

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

(Jak vzniknou? Kolik jich je?)

Platí $M < 0$ ($M > 0$) právě tehdy, když VHM střídají znaménko počínaje záporným (všechny VHM jsou kladné).

Věta 1.101(i)

Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$ je stacionární bod funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť funkce f má v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Potom platí:

- má-li funkce f v bodě x^* lokální minimum (maximum), pak je příslušná Hessova matice v tomto bodě pozitivně (negativně) semidefinitní;
- je-li Hessova matice funkce f v tomto bodě pozitivně (negativně) definitní, nastává v bodě x^* ostré lokální minimum (maximum);
- je-li Hessova matice funkce f v tomto bodě indefinitní, nenastává v bodě x^* lokální extrém.

Poznámka

Předchozí věta nám ovšem nedává odpověď v situaci, kdy je příslušná Hessova matice semidefinitní ve stacionárním bodě x^*.

Příklad

Rozhodněme o lokálních extrémech pro funkce

(a) $f(x,y) = x^2 + y^4$, (b) $f(x,y) = x^2(1+y^2)$, (c) $f(x,y) = x^2 + y^3$.

Příklad

Určeme lokální extrémy pro funkci $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$.

Definice 1.103(i)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že bod $x^* \in M$ je bodem *globálního (absolutního) minima (maxima)* funkce f na množině M, jestliže $f(x^*) \leq f(x)$ $(f(x^*) \geq f(x))$ pro všechna $x \in M$. Jsou-li nerovnosti ostré pro $x \neq x^*$, hovoříme o *ostrých* globálních extrémech.

Poznámka

- Bod, ve kterém funkce nabývá globálního extrému nemusí být jediný, viz $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ na sld. 98. A funkční hodnota?
- Body globálního extrému nemusí pro danou funkci vůbec existovat, např. $f(x,y) = x + y$ na $\mathbb{R}^2$ nebo $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ na $\mathbb{R}^2$ nebo $f(x,y) = x + y$ na $(0,1) \times (0,1)$.

Jak ale prakticky postupovat při hledání globálních extrémů?

Věta 1.103(i)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých globálních extrémů buď v bodech lokálního extrému uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Důkaz? ■

Příklad

Určeme globální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na množině M, jestliže

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y, \\
&\qquad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 4 - x\}, \\
&\text{(b) } f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy, \\
&\qquad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 2 \leq y \leq 4\}.
\end{aligned}$$

Příklad

Je dán drát délky l, který rozdělíme nejvýše na tři části. Z jedné části utvoříme kruh, z druhé části utvoříme čtverec a ze třetí části utvoříme rovnostranný trojúhelník. Určeme délky jednotlivých částí tak, aby plocha vymezená těmito obrazci byla maximální/minimální.