M2B02: Diferenciální a integrální počet II

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

Dvojné a trojné integrály (26. dubna 2016)

CZ.1.07/2.3.00/30.0009
Zaměstnáním čerstvých absolventů doktorského studia k vědecké excelenci

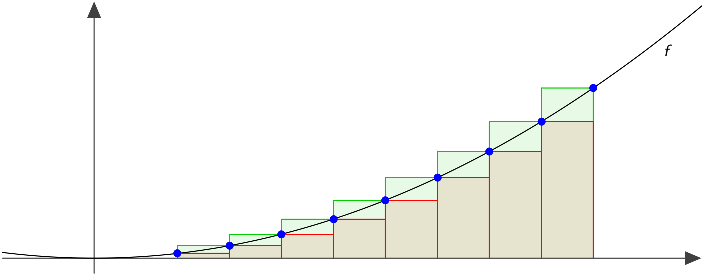
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tato práce byla podpořena z projektu „Zaměstnáním čerstvých absolventů doktorského studia k vědecké excelenci“ (CZ.1.07/2.3.00/30.0009), který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Obsah

Jak se definoval Riemannův integrál v $\mathbb{R}$? Nechť f je ohraničená funkce (zejména spojitá) na intervalu $[a, b]$.



$$D: \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad d(I_k) = x_k - x_{k-1},$$

$$m_k := \inf\left\{f(x) : \; x \in I_k\right\}, \quad M_k := \sup\left\{f(x) : \; x \in I_k\right\}, \quad c \leq f(x) \leq d,$$

$$s(D, f) = \sum_{k=1} m_k d(I_k), \quad S(D, f) = \sum_{k=1} M_k d(I_k),$$

$$c(b-a) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq d(b-a),$$

$$D_1 \subseteq D_2 : \; s(D_1, f) \leq s(D_2, f) \; \& \; S(D_1, f) \geq S(D_2, f),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{ s(D,f) :\ D \in \mathcal{D} \right\}, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\left\{ S(D,f) :\ D \in \mathcal{D} \right\}.$$

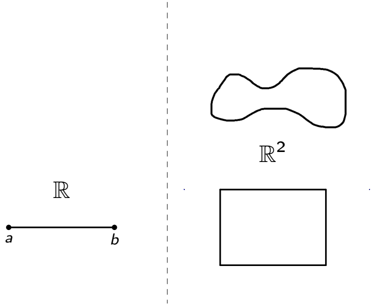
Je-li $\{D_n\}$ tzv. nulová (normální) posloupnost dělení, pak

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pokud $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, pak definujeme

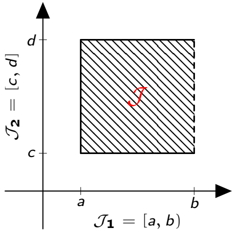
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jak tento postup zobecnit v $\mathbb{R}^2$?
Zásadní rozdíl:



Definice 2.6(i)

Intervalem v rovině (nebo také *dvojrozměrným intervalem*) rozumíme množinu $\mathcal{J}$, která je kartézským součinem dvou intervalů $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq \mathbb{R}$. Tedy platí $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$.



Intervaly $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ mohou být libovolného typu (otevřené, uzavřené, polootevřené, omezené). Je-li některý z nich degenerovaný (tj. pouze bod) nazýváme dvojrozměrný interval $\mathcal{J}$ také *degenerovaný* (to tedy může být bod, úsečka, polopřímka, přímka).

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x < b, \ c \leq y \leq d\right\}$$

Obdélník=nedegenerovaný dvojrozměrný uzavřený a omezený interval.

Nechť $a < b$, $c < d$ jsou reálná čísla a $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$ je obdélník. Zvolme

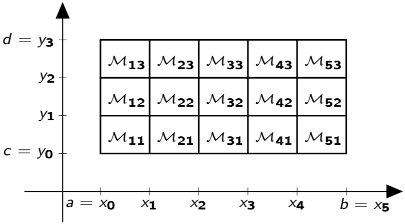
$$D_x: \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad D_y: \; c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

dělení intervalu $[a, b]$ a $[c, d]$ a označme $D = D_x \times D_y$.

Definujme $\mathcal{M}_{ik} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$, kde $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $k \in \{1, \ldots, n\}$. Obdélníky $\mathcal{M}_{ik}$ nazýváme *dílky* dělení D. Systém těchto dílků

$$\left\{\mathcal{M}_{ik}: \; i = 1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, n\right\}$$

nazýváme *dělením* obdélníku $\mathcal{M}$.



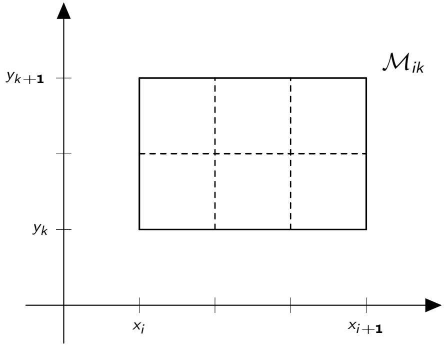
Normou dělení $D = D_x \times D_y$ rozumíme číslo

$$\nu(D) := \max\left\{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}: \; i = 1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, n\right\},$$

tj. délku nejdelší z uhlopříček všech jednotlivých dílků dělení D.

Uvažme posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost dělení se nazývá *nulová (normální)*, jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Symbolem $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ označíme množinu všech dělení obdélníku $\mathcal{M}$.

Dělení $D_1 = D_x^1 \times D_y^1$ se nazývá *zjemnění* dělení D, jestliže D_x^1 je zjemněním dělení D_x a D_y^1 je zjemněním dělení D_y. V takovém případě je každý dílek $\mathcal{M}_{ik}$ z dělení D rozdělen na konečný počet dílků dělení D_1.



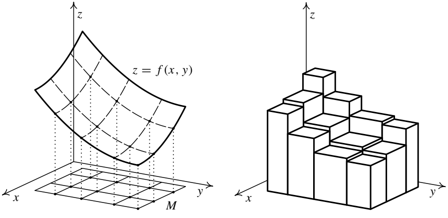
Ke každým dvěma dělením $D_1 = D_x^1 \times D_y^1$ a $D_2 = D_x^2 \times D_y^2$ z $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ existuje jejich společné zjemnění (tím je např. dělení $\widetilde{D} = \widetilde{D}_x \times \widetilde{D}_y$, kde $\widetilde{D}_x$ je tvořeno všemi dělicími body dělení D_x^1 a D_x^2 a dělení $\widetilde{D}_y$ je tvořeno všemi dělicími body dělení D_y^1 a D_y^2).

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných ohraničená na obdélníku $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$, tj. existují konstanty $w, W \in \mathbb{R}$ takové, že $w \leq f(x, y) \leq W$ pro všechny $[x, y] \in \mathcal{M}$, a nechť $D = D_x \times D_y$ je dělení obdélníku $\mathcal{M}$ s dílky $\mathcal{M}_{ik}$ pro $i = 1, \dots, m$ a $k = 1, \dots, n$. Označme

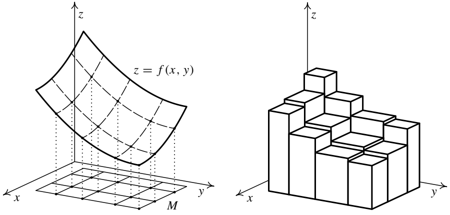
$$m_{ik} = \inf\big\{ f(x, y) : \ [x, y] \in \mathcal{M}_{ik} \big\} \quad \text{a} \quad M_{ik} = \sup\big\{ f(x, y) : \ [x, y] \in \mathcal{M}_{ik} \big\}.$$

Pak můžeme definovat *dolní součet funkce f při dělení D*

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} m_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})$$



a) b)



a) b)

a také *horní součet funkce f při dělení D*

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} M_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}).$$

Obrázky převzaty z: J. Kalas, J. Kuben, *Integrální počet funkcí více proměnných*.

Pro každou ohraničenou funkci pak platí:

- $s(D, f) \leq S(D, f)$ pro každé dělení $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$;
- Jsou-li $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ a D_2 je zjemněním dělení D_1, pak

$$s(D_1, f) \leq s(D_2, f) \quad \text{a} \quad S(D_1, f) \geq S(D_2, f);$$

- Jsou-li $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ libovolná, pak

$$s(D_1, f) \leq S(D_2, f).$$

Zvolme nyní pevně dělení $D_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ obdélníku $\mathcal{M}$. Potom tedy platí

$$s(D, f) \leq S(D_0, f)$$

pro každé dělení $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$. To ale znamená, že množina $\{s(D, f) : \ D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\}$ je neprázdná a shora omezená. Proto existuje $\sup\{s(D, f) : \ D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\}$ a můžeme definovat *dolní integrál ohraničené funkce f na obdélníku $\mathcal{M}$* jako

$$\underline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y := \sup\big\{s(D, f) : \ D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\big\} \leq S(D_0, f)$$

Ovšem dělení D_0 je zvoleno libovolně, proto

$$S(D,f) \geq \underline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

pro každé dělení $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.To ale znamená, že množina všech horních součtů funkce f je neprázdná a zdola ohraničená. Proto existuje $\inf\{S(D,f) :\ D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\}$ a můžeme definovat *horní integrál ohraničené funkce f na obdélníku $\mathcal{M}$* jako

$$\overline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \inf\big\{S(D,f) :\ D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\big\}.$$

Z definice plyne, že určitě platí

$$\underline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \overline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Definice 2.12(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená. Funkce f se nazývá *integrovatelná* na obdélníku $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$, jestliže

$$\underline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V takovém případě definujeme *dvojný (dvojrozměrný) integrál* funkce f na obdélníku $\mathcal{M}$ vztahem

$$\iint_{\mathcal{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \underline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Funkce f se nazývá *integrand* a obdélník $\mathcal{M}$ *integrační obor.*

Příklad

Nechť $\mathcal{M} = [0, 1] \times [0, 1]$. Rozhodněme o integrovatelnosti funkce $f(x, y)$ na $\mathcal{M}$, je-li

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \;\; \& \;\; y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 2.12(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená na obdélníku $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$. Pak f je integrovatelná na $\mathcal{M}$ právě tehdy, když ke každému ϵ existuje takové dělení $D \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, že platí $S(D, f) - s(D, f) < \epsilon$.

Věta 2.13(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená na obdélníku $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$. Pak pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $\{D_n\}$ obdélníku $\mathcal{M}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \underline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \overline{\iint_{\mathcal{M}}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Jestliže navíc alespoň pro jednu nulovou posloupnost dělení $\{D_n\}$ obdélníku $\mathcal{M}$ platí $\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(D_n, f)$, pak je funkce f integrovatelná na obdélníku $\mathcal{M}$.

Jaká podmínka nám zaručí integrovatelnost?

Věta 2.13(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na obdélníku $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$. Pak f je integrovatelná na $\mathcal{M}$.

Jak ovšem takový integrál prakticky spočítat?

Věta 2.13(ii)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na obdélníku $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$. Pak platí

$$\iint_{\mathcal{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Toto tvrzení se nazývá *Fubiniova věta pro spojitou funkci na obdélníku*. Integrály na pravé straně se označují jako *dvojnásobné*. (Důkaz?)

Příklad

Vypočtěme

$$\text{(a)} \iint\limits_{\mathcal{M}} (x + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{pro} \quad \mathcal{M} = [-1, 3] \times [0, 2],$$

$$\text{(b)} \iint\limits_{\mathcal{M}} xy^2 \mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{pro} \quad \mathcal{M}:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1.$$

Věta 2.14(i)

Nechť $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné na obdélníku $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$.

- Funkce $f(x, y) \pm g(x, y)$ je také integrovatelná na $\mathcal{M}$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{M}} \big[f(x, y) \pm g(x, y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint\limits_{\mathcal{M}} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Je-li $c \in \mathbb{R}$ konstanta, je funkce $cf(x, y)$ je také integrovatelná na $\mathcal{M}$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{M}} cf(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c \iint\limits_{\mathcal{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Funkce $|f(x, y)|$ je také integrovatelná na $\mathcal{M}$ a platí

$$\left| \iint\limits_{\mathcal{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \le \iint\limits_{\mathcal{M}} |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 2.15(i)

Nechť $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ jsou obdélníky, funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ohraničená na $\mathcal{M}_1$ a současně $f(x, y) = 0$ pro všechny $[x, y] \in \mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$. Pak funkce f je integrovatelná na $\mathcal{M}_1$ právě tehdy, když funkce f je integrovatelná na $\mathcal{M}_2$. V takovém případě navíc platí

$$\iint\limits_{\mathcal{M}_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{M}_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 2.15(ii)

Nechť $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné na obdélníku $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$.

- Je-li $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro všechny $[x, y] \in \mathcal{M}$, potom

$$\iint\limits_{\mathcal{M}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint\limits_{\mathcal{M}} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Funkce $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou integrovatelné na $\mathcal{M}$.

Obsah množiny: ohraničená množina $\longrightarrow$ nezáporné číslo.

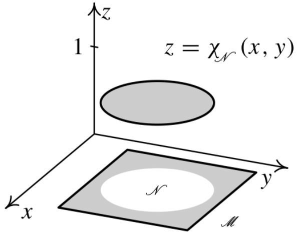
Definice 2.17(i)

Nechť $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina. Funkce $\mathcal{X}_{\mathcal{N}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$\mathcal{X}_{\mathcal{N}}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y] \in \mathcal{N}, \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin \mathcal{N} \end{cases}$$

se nazývá *charakteristická funkce množiny* $\mathcal{N}$.

Je-li množina $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničená, pak jistě existuje obdélník $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d]$ takový, že $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, přičemž $\mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ je definována i na $\mathcal{M}$.



Obrázek převzat z: J. Kalas, J. Kuben, *Integrální počet funkcí více proměnných*.

Definice 2.18(i)

Řekneme, že omezená množina $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$ je *(jordanovsky) měřitelná*, jestliže pro nějaký obdélník $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{N}$ je charakteristická funkce $\mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ množiny $\mathcal{N}$ integrovatelná na obdélníku $\mathcal{M}$, přičemž klademe

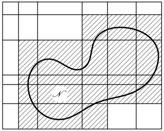
$$m(\mathcal{N}) := \iint_{\mathcal{M}} \mathcal{X}_{\mathcal{N}}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

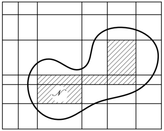
Číslo $m(\mathcal{N})$ nazýváme *(Jordanovou) mírou* množiny $\mathcal{N}$.

Je předchozí definice korektní?

Speciálně pokud $\mathcal{N}$ je obdélník $[a, b] \times [c, d]$, pak lze volit přímo $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ a platí

$$m(\mathcal{N}) = \iint_{\mathcal{M}} \mathcal{X}_{\mathcal{N}}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{N}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)(d-c).$$





Obrázek převzat z: J. Kalas, J. Kuben, *Integrální počet funkcí více proměnných*.

Platí např.: je-li $m^*(\mathcal{N}) = 0$, pak $\mathcal{N}$ je měřitelná a $m(\mathcal{N}) = 0$.

Základní vlastnosti Jordanovy míry:

Věta 2.19(i)

Omezená množina $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když $m(h(\mathcal{N})) = 0$.

- $m(\emptyset) = 0$;
- jsou-li množiny $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$ měřitelné, pak $m(\mathcal{N}_1) \leq m(\mathcal{N}_2)$;
- je-li $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ a je-li $\mathcal{N}_2$ měřitelná a současně $m(\mathcal{N}_2) = 0$, pak také množina $\mathcal{N}_1$ je měřitelná a platí $m(\mathcal{N}_1) = 0$;
- jsou-li množiny $\mathcal{N}_1$ a $\mathcal{N}_2$ měřitelné, pak také množiny $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ a $\mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{N}_2$ (nebo $\mathcal{N}_2 \setminus \mathcal{N}_1$) jsou měřitelné;
- je-li $y = g(x)$ spojitá funkce pro $x \in [\alpha, \beta]$, pak její graf, tj. množina $G = \{[x, g(x)] \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [\alpha, \beta]\}$, je měřitelná a platí $m(G) = 0$,
- je-li $x = h(y)$ spojitá funkce pro $y \in [\gamma, \delta]$, pak její graf, tj. množina $H = \{[g(y), y] \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [\gamma, \delta]\}$, je měřitelná a platí $m(H) = 0$,
- jsou-li množiny $\mathcal{N}_1$ a $\mathcal{N}_2$ měřitelné, pak

$$m(\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2) = m(\mathcal{N}_1) + m(\mathcal{N}_2) - m(\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2) \leq m(\mathcal{N}_1) + m(\mathcal{N}_2),$$
$$m(\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2) = m(\mathcal{N}_1) + m(\mathcal{N}_2) \quad \text{pokud} \quad m(\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2) = 0,$$
$$m(\mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{N}_2) = m(\mathcal{N}_1) - m(\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2),$$
$$m(\mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{N}_2) = m(\mathcal{N}_1) - m(\mathcal{N}_2) \quad \text{pokud} \quad \mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{N}_1.$$

Z předchozího vyplývá, že pro systém jordanovsky měřitelných množin platí:

- s každými dvěma množinami $\mathcal{N}_1$ a $\mathcal{N}_2$ obsahuje i jejich rozdíl $\mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{N}_2$,
- s libovolnou konečnou posloupností měřitelných množin $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k$ obsahuje i jejich sjednocení $\bigcup_{n=1}^{k} \mathcal{N}_n$ a průnik $\bigcap_{n=1}^{k} \mathcal{N}_n$.

Tedy systém jordanovsky měřitelných množin je uzavřený vzhledem k rozdílu a konečným sjednocením a průnikům, tzv. *množinový okruh*.

Z praktického hlediska se však tyto vlastnosti ukázaly jako nedostatečné (množina jordanovsky měřitelných množin je celkem „malá“). Je-li systém množin uzavřený i vzhledem ke spočetným sjednocením (a vzhldem k první vlastnosti také průnikům), hovoříme o σ-okruhu. Obecnější koncepty míry (zejména *Lebesgueovy*) se pak budují na tzv. *σ-algebře* měřitelných množin, což je σ-okruh, který obsahuje sjednocení všech svých prvků.

Příklad

Uveďme příklad (spočetných) posloupností jordanovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^2$ takových, že

- jejich sjednocení je neomezená množina,
- jejich sjednocení je omezená množina, která však není měřitelná.

Věta 2.21(i)

Každá podmnožina $\mathbb{R}^2$ obsahující pouze konečný počet prvků má nulovou míru.

Příklad

Může mít i množina s nekonečným počtem prvků nulovou míru?

Pro nás budou důležité množiny následujícího typu.

Definice 2.21(i)

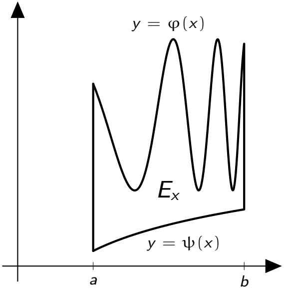
Nechť $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ takové, že $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Množina

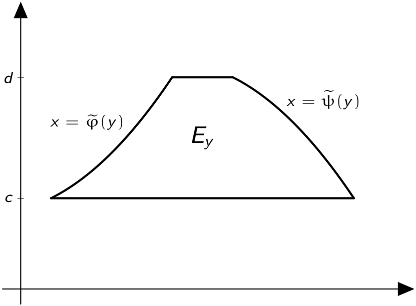
$$E_x := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a, b] \;\; \& \;\; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}$$

se nazývá *elementární vzhledem k ose x*.
Podobně, nechť jsou $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité funkce na intervalu $[c, d]$ takové, že $\widetilde{\varphi}(y) \leq \widetilde{\psi}(y)$ pro každé $y \in [c, d]$. Množina

$$E_y := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [c, d] \;\; \& \;\; \widetilde{\varphi}(y) \leq x \leq \widetilde{\psi}(y)\right\}$$

se nazývá *elementární vzhledem k ose y*.
Množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá *elementární*, jestliže je elementární vzhledem k ose x nebo y.





Věta 2.22(i)

Každá elementární množina je měřitelná.

Poznámka

- Obrazce známé z elementární geometrie (trojúhelník, čtverec, obdélník, mnohoúhelník, kruh atd.) jsou elementární množiny.
- Sjednocení konečného počtu elementárních množin je měřitelná množina.

Příklad

Vyjádřeme následující množiny vymezené danými křivkami jako elementární

$$\text{(a)}\quad \mathcal{N}:\quad 2x-y=1,\ 2x-y=5, x=0,\ x=2,$$

$$\text{(b)}\quad \mathcal{N}:\quad x^2+y^2=9,\ y^2-x^2=1.$$

Definice 2.24(i)

Nechť $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená na $\mathcal{N}$. Funkci f nazveme *integrovatelnou na množině* $\mathcal{N}$, jestliže funkce $\mathcal{X}_{\mathcal{N}} f$ určená předpisem

$$(\mathcal{X}_{\mathcal{N}} f)(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{pro} \quad [x,y] \in \mathcal{N}, \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] \notin \mathcal{N}, \end{cases}$$

je integrovatelná na nějakém obdélníku $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{N}$. *Dvojný integrál funkce* f *na množině* $\mathcal{N}$ pak definujeme jako

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{M}} (\mathcal{X}_{\mathcal{N}} f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

I tato definice je korektní.

Zejména je-li $\mathcal{N}$ obdélník, pak lze volit $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{M}} (\mathcal{X}_{\mathcal{N}} f)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

pokud alespoň jeden z těchto integrálů existuje.

Postačující podmínky integrovatelnosti na měřitelné množině?

Věta 2.25(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je (*skoro všude*) spojitá a ohraničená na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak funkce f je integrovatelná na $\mathcal{N}$.

Důsledek 2.25(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak funkce f je integrovatelná na $\mathcal{N}$.

Příklad

Rozhodněme o existenci $\iint\limits_{\mathcal{N}} \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$, jestliže

$$\text{(a)}\quad \mathcal{N}:\ x^2+(y-1)^2 \leq 1/4, \qquad \text{(b)}\quad \mathcal{N}:\ x^2+y^2 \leq 1.$$

Rozhodněme o existenci $\iint\limits_{\mathcal{N}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$, jestliže

$$\mathcal{N}:\ x^2+y^2 \leq 4.$$

Základní vlastnosti dvojného integrálu.

Věta 2.26(i)

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$.

- Funkce $f(x,y) \pm g(x,y)$ jsou integrovatelné na $\mathcal{N}$ a platí (tzv. *aditivita vzhledem k integrandu*)

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} [f(x,y) \pm g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint\limits_{\mathcal{N}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Je-li $c \in \mathbb{R}$ konstanta, pak funkce $cf(x,y)$ je integrovatelná na $\mathcal{N}$ a platí (tzv. *homogenita*)

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c \iint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Funkce $|f(x,y)|$ je integrovatelná na $\mathcal{N}$ a platí

$$\left| \iint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leq \iint\limits_{\mathcal{N}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Je-li $f(x,y) \leq g(x,y)$ pro všechny $[x,y] \in \mathcal{N}$, pak

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint\limits_{\mathcal{N}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Základní vlastnosti dvojného integrálu (pokrač.).

Věta 2.27(i)

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$.

- Je-li $k \in \mathbb{R}$ konstanta, pak

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} k \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\, m(\mathcal{N}).$$

- Je-li funkce $f(x, y)$ ohraničená na množině $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, která má nulovou míru, pak je funkce $f(x, y)$ integrovatelná na $\mathcal{N}_1$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{N}_1} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

- Je-li funkce $f(x, y)$ integrovatelná na měřitelné množině $\mathcal{N}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ i na měřitelné množině $\mathcal{N}_3 \subseteq \mathbb{R}^2$, přičemž $m(\mathcal{N}_2 \cap \mathcal{N}_3) = 0$, pak funkce $f(x, y)$ je integrovatelná na $\mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{N}_2} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\mathcal{N}_3} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(tato vlastnost se v případě $\mathcal{N}_2 \cap \mathcal{N}_3 = \emptyset$ nazývá aditivitou integrálu vzhledem k integračnímu oboru).

Věta 2.28(i)

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak i jejich součin $(fg)(x, y)$ je integrovatelný na $\mathcal{N}$.

Věta 2.28(ii)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je integrovatelná na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$ a nechť $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$ je její měřitelná podmnožina. Pak funkce f je integrovatelná i na množině $\mathcal{N}_1$.

Jak se změní integrovatelnost/hodnota integrálu funkce $f(x, y)$ na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$, pokud změním hodnotu funkce $f(x, y)$ na množině nulové míry?

Věta 2.28(iii)

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou definované na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$, přičemž f je integrovatelná na $\mathcal{N}$, g je ohraničená na $\mathcal{N}$ a $m(\mathcal{N}_1) = 0$, kde $\mathcal{N}_1 = \{[x, y] \in \mathcal{N} : \ f(x, y) \neq g(x, y)\}$. Pak funkce g je také integrovatelná na $\mathcal{N}$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{N}} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Speciálně uvažme funkci $g(x, y) \equiv 0$.

Z integrálního počtu v $\mathbb{R}$ známe (Věta o střední hodnotě): Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné funkce na intervalu $[a, b]$ a nechť $g(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$. Pak existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\inf\big\{f(x) : \ x \in [a, b]\big\} \leq c \leq \sup\big\{f(x) : \ x \in [a, b]\big\}$$

a platí

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = c \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Věta 2.29(i)

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$ a nechť $g(x, y) \geq 0$ pro všechna $[x, y] \in \mathcal{N}$. Pak existuje číslo $\mu \in \mathbb{R}$ takové, že $\mu \in [\alpha, \beta]$, kde $\alpha = \inf\{f(x, y) : \ [x, y] \in \mathcal{N}\}$ a $\beta = \sup\{f(x, y) : \ [x, y] \in \mathcal{N}\}$, a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x, y)\, g(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu \iint\limits_{\mathcal{N}} g(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Speciálně pro spojitou funkci $f(x, y)$ a $g(x, y) \equiv 1$ platí, že existuje $[x_0, y_0] \in \mathcal{N}$ tak, že $\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_0, y_0) m(\mathcal{N})$.

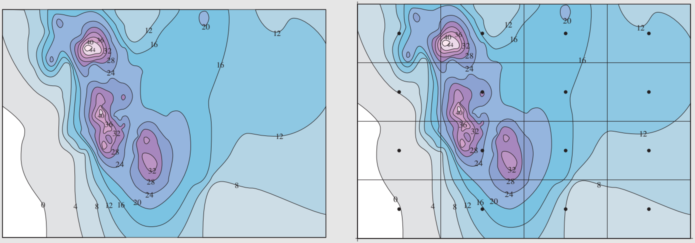
Příklad

Ukažme, že pro $\mathcal{M} = [-1, 1] \times [-1, 2]$ platí

$$1 \leq \iint\limits_{\mathcal{M}} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 6.$$

Příklad

Na obrázku je sněhová mapa (údaje jsou v cm) státu Colorado ve dnech 20.–21. prosince 2006 (stát Colorado má tvar obdélníku o délce 612 km a šířce 451 km). S využitím této mapy určete průměrnou výšku sněhové pokrývky ve státě Colorado v uvedených dnech.



Obrázky převzaty z: J. Stewart, *Calculus*, sedmé vydání.

Jak ale dvojný integrál spočítat? Dvojný integrál $\rightsquigarrow$ dvojnásobný integrál = Fubiniova věta.

Věta 2.31(i)

Nechť $\mathcal{N}$ je elementární množina v $\mathbb{R}^2$ vzhledem k ose x, tj.

$$\mathcal{N} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\},$$

kde $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na $[a, b]$ takové, že $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá na $\mathcal{N}$, pak platí

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

Podobně, nechť $\widetilde{\mathcal{N}}$ je elementární množina v $\mathbb{R}^2$ vzhledem k ose y, tj.

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [c, d], \ \widetilde{\varphi}(y) \leq x \leq \widetilde{\psi}(y)\right\},$$

kde $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na $[c, d]$ takové, že $\widetilde{\varphi}(y) \leq \widetilde{\psi}(y)$ pro každé $y \in [c, d]$. Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá na $\widetilde{\mathcal{N}}$, pak platí

$$\iint\limits_{\widetilde{\mathcal{N}}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\widetilde{\varphi}(y)}^{\widetilde{\psi}(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

Speciálně uvažme funkci $f(x, y) = h(x)\, g(y)$.

Důkaz? ■

Příklad

Zaměňme pořadí integrace

$$(a)\ I=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,\quad (b)\ I=\int_0^3\left[\int_{(x-1)^2}^{x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$(c)\ I=\int_0^4\left[\int_0^{y/2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y+\int_4^6\left[\int_0^{6-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Příklad

Vypočtěme $\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, jestliže

(a) $f(x,y)=x+y$, $\mathcal{N}$ je vymezena křivkami $y=x^2$ a $y=x$,

(b) $f(x,y)=xy$, $\mathcal{N}$ je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[1,1]$ a $[2,0]$,

(c) $f(x,y)=x^2y$, $\mathcal{N}$ je vymezena nerovnostmi $1\geq y\geq x^2$,

(d) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $\mathcal{N}$ je vymezena křivkami $y=2x-x^2$ a $y=-x$.

Pro funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se trojný integrál na kvádru $\mathcal{M} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ zavádí a počítá zcela analogickým způsobem. Je-li funkce f spojitá pak platí (přičemž všechny permutace jsou možné; trojný integrál $\rightsquigarrow$ trojnásobný integrál)

$$\iiint\limits_{\mathcal{M}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Příklad

Pro $\mathcal{M} = [1, 3] \times [-1, 1] \times [0, 2]$ vypočtěme

$$\iiint\limits_{\mathcal{M}} (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Charakteristická funkce $\mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ množiny $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^3$ se definuje analogicky jako v Definici 2.17(i) a její *(Jordanova) míra*

$$m(\mathcal{N}) = \iiint\limits_{\mathcal{M}} \mathcal{X}_{\mathcal{N}}(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{N}$ je libovolný kvádr.

Potom trojný integrál z ohraničené funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^3$ definujeme jako (pokud existuje)

$$\iiint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\mathcal{M}} (\mathcal{X}_{\mathcal{N}} f)(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{N}$ je libovolný kvádr a funkce $\mathcal{X}_N f$ je definováno podobně jako v Definici 2.24(i). Trojný integrál pak má podobné vlastnosti jako dvojný integrál (platí analogická tvrzení).

Příklad

Rozhodněme o existenci $\iiint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, jestliže

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(1+x+z)^3}$, $\mathcal{N}$: $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 0$, $-2 \leq z \leq 2$,

(b) $f(x,y,z) = x + yz$, $\mathcal{N}$: $x^2 \leq y \leq 2$, $z \geq 3$,

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-9}$, $\mathcal{N}$: $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$.

Definice 2.36(i)

Nechť $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$ je elementární množina v $\mathbb{R}^2$ (vzhledem k ose x nebo y) a nechť $\Phi(x,y)$ a $\Psi(x,y)$ jsou spojité funkce na $\mathcal{N}$ takové, že platí $\Phi(x,y) \leq \Psi(x,y)$ pro všechna $[x,y] \in \mathcal{N}$. Množina

$$E_{xy} = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ [x,y] \in \mathcal{N},\ \Phi(x,y) \leq z \leq \Psi(x,y)\Big\}$$

se nazývá *elementární vzhledem k rovině xy v* $\mathbb{R}^3$. Analogicky se definuje *elementární množinu vzhledem k rovině xz v* $\mathbb{R}^3$ nebo *vzhledem k rovině yz v* $\mathbb{R}^3$. *Elementární množinou v* $\mathbb{R}^3$ rozumíme elementární množinu v $\mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině xy, xz nebo yz.

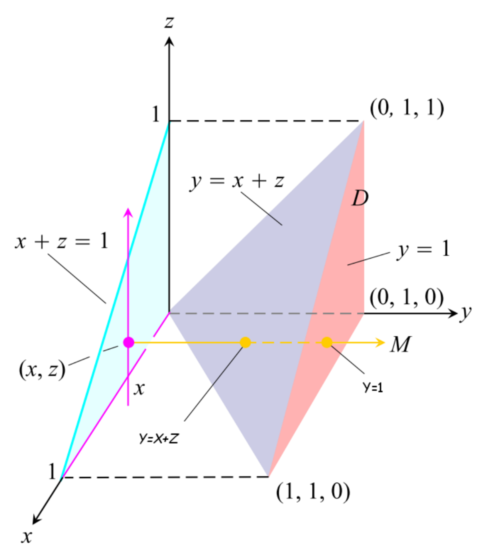
Poznámka

Elementární množina v $\mathbb{R}^3$ je měřitelná a funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spojitá na elementární množině v $\mathbb{R}^3$ je integrovatelná.

Příklad

Popišme jako elementární množinu:

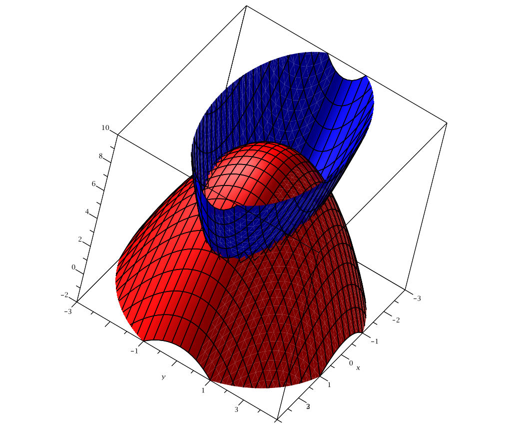
- čtyřstěn s vrcholy $[0,0,0]$, $[1,1,0]$, $[0,1,0]$ a $[0,1,1]$.



Příklad

Popišme jako elementární množinu:

- množinu vymezenou plochami $z = x^2 + 3y^2$ a $z = 8 - x^2 - y^2$.



Trojný integrál $\rightsquigarrow$ trojnásobný integrál = Fubiniova věta.

Věta 2.39(i)

Nechť Ω je elementární množina v $\mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině xy, tj.

$$\Omega = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ [x,y] \in \mathcal{N}, \ \Phi(x,y) \leq z \leq \Psi(x,y) \right\},$$

kde $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na $\mathcal{N}$ takové, že $\Phi(x,y) \leq \Psi(x,y)$ pro všechna $[x,y] \in \mathcal{N}$, přičemž $\mathcal{N}$ je elementární množina v $\mathbb{R}^2$. Je-li funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spojitá na Ω, pak

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\mathcal{N}} \left[\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Speciálně, je-li $\mathcal{N}$ např. elementární množina vzhledem k ose x, tj.

$$\mathcal{N} = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b] \ \ \& \ \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\},$$

kde $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na $[a,b]$ takové, že $\varphi(x) \leq \psi(x)$ na $[a,b]$, potom

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Příklad

Vypočtěme $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, jestliže

(a) $f(x,y,z) = x - y + 2z$,

$$\Omega:\ 1 \le x \le 2,\ x \le y \le 2x,\ x+y \le z \le 2x+3y,$$

(b) $f(x,y,z) = y$,

$$\Omega:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2,$$

(c) $f(x,y,z) = y\cos(x+z)$,

$$\Omega:\ y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x+z = \pi/2,$$

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{xy^3z}{(1+z^2)^2}$,

$$\Omega:\ z = 2,\ z^2 = x^2 + y^2,\ x = 0,\ y = 0.$$

Příklad

Určeme objem tělesa vzniklého průnikem $x^2+y^2=1$ a $x^2+z^2=1$.

Příklad

Pomocí trojného integrálu vyjádřeme objem „kornoutu se zmrzlinou“.

Poznámka

Zcela analogickým způsobem se zavádí obecný n-rozměrný integrál pro $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ovšem již bez „geometrické představy“).

Pro výpočet určitého integrálu funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ máme dva hlavní nástroje:

- *per-partes*

  Nechť funkce $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají derivaci na intervalu $[a, b]$ a nechť funkce u', v' jsou integrovatelné na $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

- *substituční metoda* (tzv. metoda záměny proměnných)

  Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Nechť funkce φ má derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, která je na tomto intervalu integrovatelná, a nechť $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Pak platí

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- *substituční metoda* (alternativní formulace)

  Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na intervalu I a má derivaci $\varphi(t)$ spojitou a různou od nuly v každém bodě $t \in I$. Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na intervalu $\varphi(I)$, pak platí

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Definice 2.43(i)

Nechť $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou funkce definované na množině $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť $F : B \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení takové, že $[u, v] \xmapsto{F} \big[g(u, v), h(u, v)\big]$, tj. $F = (g, h)$. Zobrazení F se nazývá *spojitě diferencovatelné na* B, jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g, h lze rozšířit na Ω takovým způsobem, že funkce g, h mají v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle obou proměnných u, v.

Definice 2.43(ii)

Nechť zobrazení $F : B \to \mathbb{R}^2$ je spojitě diferencovatelné na B. Pak se matice

$$J(u, v) := \begin{pmatrix} g_u(u, v) & g_v(u, v) \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{pmatrix}$$

nazývá *Jacobiho maticí* a její determinant *jakobián* zobrazení F, přičemž $\det J : B \to \mathbb{R}$.

Definice 2.43(iii)

Spojitě diferencovatelné zobrazení $F : B \to \mathbb{R}^2$, kde B je otevřená množina, se nazývá *regulární*, jestliže je jeho jakobián různý od nuly v každém bodě množiny B.

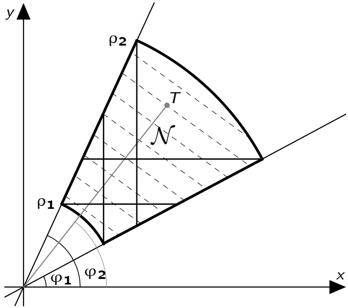
Věta 2.44(i)

Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina taková, že $B \subseteq \Omega$. Nechť $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení takové, že $F(u,v) = \big[g(u,v), h(u,v)\big]$ pro každé $[u,v] \in B$. Je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá funkce na množině $A = F(B)$, pak platí

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B f\big(g(u,v), h(u,v)\big) \times |\det J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Poznámka

Proč $\det J(u,v)$?



Lze $\mathcal{N}$ vyjádřit jako elementární množinu?

Polární souřadnice

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ a (obvykle) $\varphi \in [0, 2\pi)$. Pak

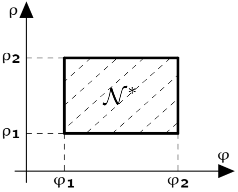
$$\det J(\rho, \varphi) = = \det \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho$$

Místo množiny $\mathcal{N}$ pak máme

$$\mathcal{N}^* = \{[\varphi, \rho] : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \ \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}.$$



Je pak mnohem jednodušší integrovat přes množinu $\mathcal{N}^*$ než množinu $\mathcal{N}$.

Ověřit předpoklady Věty 2.44(i) není zcela triviální. Dokonce toto tvrzení zůstává v platnosti i při oslabení některých předpokladů.

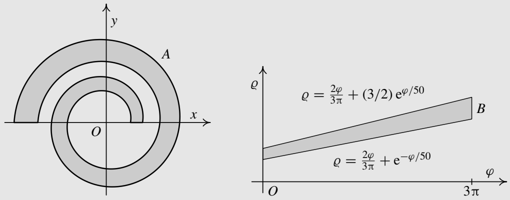
Věta 2.46(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$, kterou lze v polárních souřadnicích vyjádřit jako obdélník $\mathcal{M} = [\alpha, \beta] \times [a, b]$, kde $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ a $0 \leq a \leq \rho \leq b$, přičemž $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Potom

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,\mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\varphi.$$

Poznámka

Můžeme také pracovat s následující množinou



a) Kartézské souřadnice $[x, y]$ b) Polární souřadnice $[\varphi, \varrho]$

Obrázek převzat z: J. Kalas, J. Kuben, *Integrální počet funkcí více proměnných*.

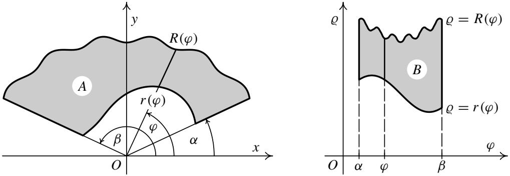
Příklad

Vypočtěme

(a) $$\iint_{\mathcal{N}} (3x + 4y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathcal{N}:\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0,$$

(b) $$\iint_{\mathcal{N}} 2(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathcal{N}:\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq |x|.$$

Obecněji, množina $\mathcal{N}$ se může po transformaci do polárních souřadnic stát pouze elementární množinou v rovině $\varphi\rho$ (nikoli výhradně obdélníkem), tj.



Obrázek převzat z: J. Kalas, J. Kuben, *Integrální počet funkcí více proměnných*.

Věta 2.48(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$, kterou lze v polárních souřadnicích vyjádřit jako elementární množinu

$$\mathcal{N}^* = \{[\varphi, \rho] \in \mathbb{R}^2 : \ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \ r(\varphi) \leq \rho \leq R(\varphi)\},$$

kde $r, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na intervalu $[\varphi_1, \varphi_2]$ takové, že $r(\varphi) \leq R(\varphi)$ pro každé $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Potom

$$\iint\limits_{\mathcal{N}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{r(\varphi)}^{R(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,\mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\varphi.$$

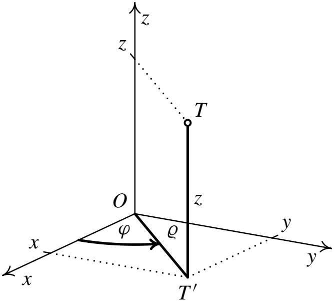
Příklad

Vypočtěme

$$\text{(a)} \quad \iint\limits_{\mathcal{N}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \ \mathcal{N}: \ x^2+y^2-2x \le 0,$$

$$\text{(b)} \quad \iint\limits_{\mathcal{N}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \ \mathcal{N}: \ x^2+y^2=4, \ y \ge 1, \ y \le \sqrt{3}x.$$

Pro trojnásobný integrál se používají zejména transformace do válcových a sférických souřadnic.



Válcové (cylindrické) souřadnice

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$, (obvykle) $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $z \in \mathbb{R}$. Pak

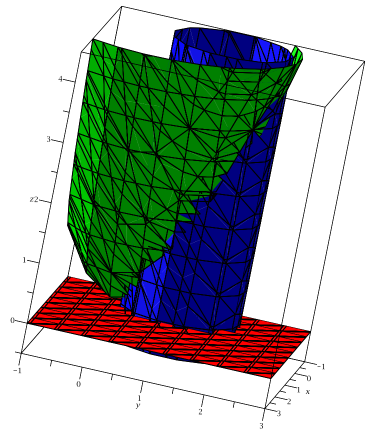
$$\det J(\rho, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho.$$

Obrázek převzat z: J. Kalas, J. Kuben, *Integrální počet funkcí více proměnných*.

Příklad

Vyjádřeme jako elementární množinu ve válcových souřadnicích množinu $\mathcal{N}$ vymezenou plochami $z = 0$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$ a plochou $z = x^2 + y^2$.



Věta 2.52(i)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitá na množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^3$, kterou lze ve válcových souřadnicích vyjádřit jako elementární množinu

$$\mathcal{N}^* = \big\{[\varphi, \rho, z] \in \mathbb{R}^3 : \ \alpha \leq \varphi \leq \beta, \ r(\varphi) \leq \rho \leq R(\varphi), \\ h(\varphi, \rho) \leq z \leq H(\varphi, \rho)\big\},$$

kde $r, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na intervalu $[\alpha, \beta]$ takové, že $r(\varphi) \leq R(\varphi)$ pro každé $\varphi \in [\alpha, \beta]$, a funkce $h, H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou spojité na množině

$$\mathcal{N}_1 = \big\{[\varphi, \rho] \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha \leq \varphi \leq \beta, \ r(\varphi) \leq \rho \leq R(\varphi)\big\}$$

a platí $h(\varphi, \rho) \leq H(\varphi, \rho)$ pro každé $[\varphi, \rho] \in \mathcal{N}_1$. Potom

$$\iiint\limits_{\mathcal{N}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{r(\varphi)}^{R(\varphi)} \left[\int_{h(\varphi,\rho)}^{H(\varphi,\rho)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\varphi.$$

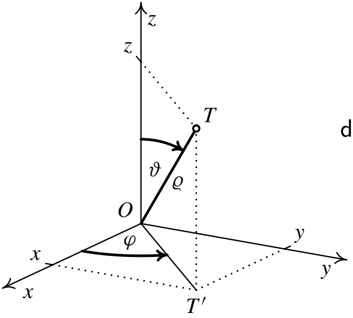
Příklad

Vypočtěme

$$\int_{-2}^{2}\left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

Příklad

Vypočtěme $\iiint\limits_{\mathcal{N}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina $\mathcal{N}$ je vymezena nerovnostmi $x^2+y^2\leq 1$, $z\leq 1-y$ a $z\geq 0$.



Sférické (kulové) souřadnice

$$x = \rho \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = \rho \cos \vartheta,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$, (obvykle) $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $\vartheta \in [0, \pi]$. Pak

$$\det J(\rho, \varphi, \vartheta) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta & -\rho \sin\varphi \sin\vartheta & \rho \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta & \rho \cos\varphi \sin\vartheta & \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\rho \sin\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= -\rho^2 \sin\vartheta.$$

Obrázek převzat z: J. Kalas, J. Kuben, *Integrální počet funkcí více proměnných*.

Věta 2.55(i)

Nechť funkce $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je spojitá na množině $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^3$, kterou lze ve sférických souřadnicích vyjádřit jako elementární množinu

$$\mathcal{N}^*=\big\{[\varphi,\vartheta,\rho]\in\mathbb{R}^3:\ \alpha\le\varphi\le\beta,\ c\le\vartheta\le d,\\ g(\varphi,\vartheta)\le\rho\le G(\varphi,\vartheta)\big\},$$

kde funkce $g,G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jsou spojité na množině

$$\mathcal{N}_1=\big\{[\varphi,\vartheta]\in\mathbb{R}^2:\ \alpha\le\varphi\le\beta,\ c\le\vartheta\le d\big\}$$

a platí $g(\varphi,\vartheta)\le G(\varphi,\vartheta)$ pro každé $[\varphi,\vartheta]\in\mathcal{N}_1$. Potom

$$\iiint\limits_{\mathcal{N}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=\int_c^d\left[\int_\alpha^\beta\left[\int_{g(\varphi,\vartheta)}^{G(\varphi,\vartheta)} f(\rho\cos\varphi\sin\vartheta,\rho\sin\varphi\cos\vartheta,\rho\cos\vartheta)\,\rho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}\vartheta.$$

Příklad

Vypočtěme

$$\iiint_{\mathcal{N}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz, \quad \mathcal{N} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Příklad

Určeme objem „kornoutu se zmrzlinou“ (viz sld. 40).

Příklad

Vypočtěme

$$\iiint_{\mathcal{N}} z^2\,dxdydz,$$

kde množina $\mathcal{N}$ je vymezena nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z.$$