# M2B02: Diferenciální a integrální počet II

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

## Funkční řady (10. května 2016)

**CZ.1.07/2.3.00/30.0009**
**Zaměstnáním čerstvých absolventů doktorského studia k vědecké excelenci**

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

*Tato práce byla podpořena z projektu „Zaměstnáním čerstvých absolventů doktorského studia k vědecké excelenci“ (CZ.1.07/2.3.00/30.0009), který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.*

## Obsah

1. Funkční řady a konvergence

2. Stejnoměrná konvergence, její kritéria a vlastnosti

3. Fourierovy řady
   - Obecný ortogonální systém $\{\varphi_n(x)\}$
   - Systém $\{\cos nx, \sin nx\}$
   - Konvergence

Již známe číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n$ jsou daná čísla pro $n \in \mathbb{N}$. Ovšem co když místo čísel $a_n$ budeme uvažovat funkce $f_n(x)$? Speciální případy: mocninné řady a Taylorova řada.

**Definice 3.4(i)**

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na intervalu $I$ a nechť $x_0 \in I$ je libovolné. Je-li číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, řekneme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentní v bodě* $x_0$.
Posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *bodově konvergentní k funkci* $f(x)$ *na intervalu* $I$, jestliže konverguje v každém bodě $x \in I$, tj. ke každému $x \in I$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. V takovém případě píšeme

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in I \qquad \text{nebo} \qquad f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ na } I.$$

**Poznámka**

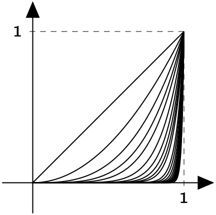
Na čem závisí volba čísla $n_0$ z předchozí definice?

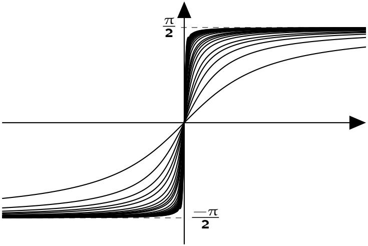
**Příklad**

Uvažme funkční posloupnosti

$$\text{(a)}\ f_n(x) = x^n \text{ pro } x \in [0,1], \quad \text{(b)}\ f_n(x) = \operatorname{arctg} nx \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

Spojitost?



**Definice 3.6(i)**

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na intervalu $I$. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{nebo} \quad f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

nazýváme *nekonečnou řadou funkcí*. Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$, nazýváme *posloupností částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
Jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pro všechna $x \in I$, řekneme, že nekonečná řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *bodově konverguje* na intervalu $I$ a funkci $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ nazýváme *součtem* řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Bodová konvergence posloupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ závisí na intervalu $I$. Největší množinu (vzhledem k množinové inkluzi), na níž posloupnost/řada bodově konverguje, nazýváme *oborem konvergence* dané posloupnosti/řady. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je opět funkce. Ovšem tento součet nemusí být definován na celém intervalu $I$ (kde jsou definování jednotliví sčítanci), ale (obecně) pouze na nějaké jeho podmnožině $I^* \subseteq I$ (tam, kde existuje limita $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$).

**Příklad**

Určeme obor konvergence pro funkční řady

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}.$$

**Příklad**

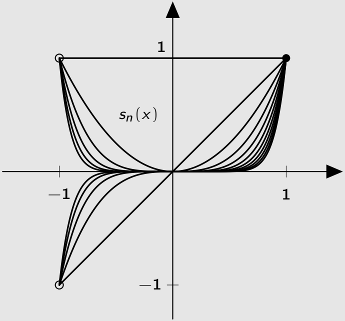
Určeme obor konvergence pro funkční řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nx^2}$.

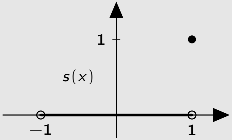
Je jasné, že některé vlastnosti jednotlivých členů se přenášejí i na limitní funkci (nezápornost, monotonie). Spojitost?

**Příklad**

Vyšetřeme funkční řadu

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$$



**Definice 3.10(i)**

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně k funkci* $f(x)$ *na intervalu* $I$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a všechna $x \in I$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. V takovém, případě píšeme

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{na} \quad I.$$

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* $I$ ke svému součtu $s(x)$, jestliže posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů konverguje stejnoměrně na $I$ k funkci $s(x)$.

Jinými slovy řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $I$ k funkci $f(x)$, jestliže má tuto vlastnost: uvážíme-li libovolně úzký pás obsahující funkci $f(x)$, pak vždy existuje takový člen $f_{n_0}(x)$ dané posloupnosti, že tento člen a všechny následující (tj. $f_{n_0+1}(x), f_{n_0+2}(x), \dots$) leží v tomto pásu pro všechna $x \in I$.

Bodová vs. stejnoměrná konvergence

$$f_n \to f \Leftrightarrow (\forall x \in I)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0): \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

tedy $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, zatímco

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0): \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

tedy $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Je zřejmé, že $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \to f$. Platí i opačná implikace?

**Příklad**

Rozhodněme, zda posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

je stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Cauchyho–Bolzanovo kritérium představuje (teoreticky) nejdůležitější kritérium konvergence pro číselné řady: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když posloupnost částečných součtů je cauchyovská, tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí $|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon$.

**Věta 3.12(i)**

Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $I$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, a pro všechna $x \in I$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

**Věta 3.12(ii)**

Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $I$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, libovolné $m \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in I$ platí $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$.

Jenže tato kritéria nejsou příliš použitelná v praxi.

**Věta 3.13(i)**

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na intervalu $I$. Nechť existuje posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a platí

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \text{pro všechna } x \in I \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $I$.

**Příklad**

Rozhodněme o stejnoměrné konvergenci pro

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2},\ x \in \mathbb{R}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \sin nx,\ x \in \mathbb{R},$$

$$\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1},\ x \in \mathbb{R}, \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

**Poznámka**

Weierstrassovo kritérium lze formulovat také pro posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na intervalu $I$. Pokud existuje posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že limita $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a platí

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \text{pro všechna } x \in I \text{ a } n \in \mathbb{N},$$

pak posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $I$ k funkci $f(x)$. Navíc lze ukázat, že v případě volby

$$a_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ x \in I\}$$

platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ právě tehdy, když $f_n \rightrightarrows f$ na $I$.

**Příklad**

Rozhodněme o stejnoměrné konvergenci pro

$$\text{(a)}\ f_n(x) = x^n \text{ pro } x \in [0,1), \quad \text{(b)}\ f_n(x) = \operatorname{arctg} nx \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

**Příklad**

Určeme obory bodové a stejnoměrné konvergence pro

$$\text{(a)}\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx},\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{(b)}\ f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx,\ x \in \mathbb{R},$$

$$\text{(c)}\ f_n(x) = \sin\frac{x}{n},\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{(d)}\ f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

Pro číselné řady platí: Je-li posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a platí jedna z podmínek

(i) posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$;

(ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená,

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je konvergentní.

Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na intervalu $I$ nazveme *neklesající* (*nerostoucí*), jestliže je číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající (nerostoucí) pro všechna $x_0 \in I$. Neklesající nebo nerostoucí posloupnost nazýváme souhrnně jako *monotónní* na intervalu $I$.
Pozor: klesající posloupnost vs. posloupnost klesajících funkcí, např. $f_n(x) = \sin x - 1/n$.

O posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na intervalu $I$ řekneme, že je na intervalu $I$ *stejnoměrně ohraničená*, jestliže existuje konstanta $k > 0$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in I$ platí $|f_n(x)| \leq k$.

**Věta 3.16(i)**

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti funkcí na $I$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní na $I$. Nechť je splněná některá z následujících podmínek:

(i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má stejnoměrně ohraničenou posloupnost částečných součtů a $g_n(x) \rightrightarrows 0$ na $I$.

(ii) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na $I$ a posloupnost $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně ohraničená na $I$.

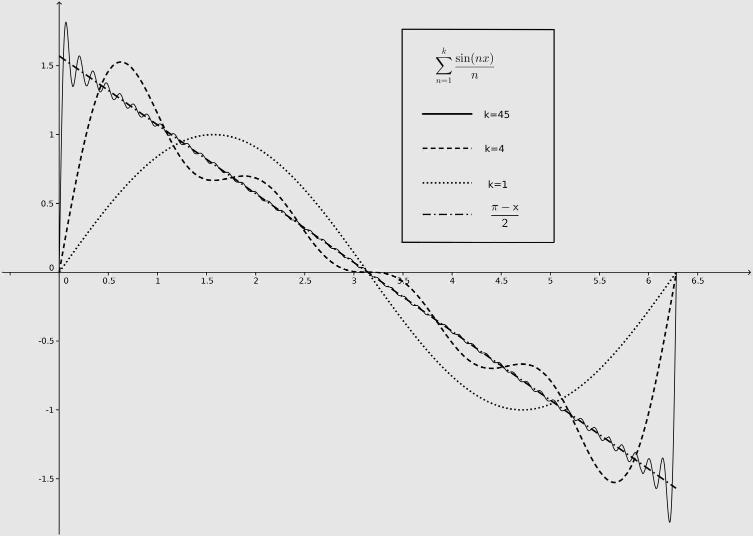
Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $I$.

---

Speciálně uvažme část (i) s $g_n(x) \equiv a_n$, kde číselná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Příklad**

Dokažme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[\delta, 2\pi-\delta]$, kde $0<\delta<\pi$.



**Příklad**

Rozhodněme o stejnoměrné konvergenci pro

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n,\ x \in [0,1], \quad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2},\ x \in \mathbb{R},$$

$$\text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1},\ x \in [-\delta,\delta],\ 0<\delta<1, \quad \text{(d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n+x}}.$$

Zpět ke spojitosti.

**Věta 3.19(i)**

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na intervalu $I$ k funkci $f(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na $I$, je i $f(x)$ spojitá na $I$.

Důkaz? ■

Tvrzení můžeme i otočit.

**Důsledek 3.19(i)**

Nechť funkce $f_n(x)$ jsou spojité na $I$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově k nespojité funkci $f(x)$ na $I$. Pak posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje stejnoměrně.

Tedy pouze pomocí limitní funkce lze rozhodnout o stejnoměrné konvergenci.

**Příklad**

Rozhodněme o stejnoměrné konvergenci pro

$$\text{(a)}\ f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1], \quad \text{(b)}\ f_n(x) = \operatorname{arctg} nx,\ x \in \mathbb{R},$$

$$\text{(c)}\ f_n(x) = \frac{1}{1+nx},\ x \in [0,1].$$

**Příklad**

Ovšem samotná spojitost limitní funkce *neimplikuje* nutně stejnoměrnou konvergenci. Uvažme např. $f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}$.

**Poznámka**

Tedy spojitost funkcí $f_n(x)$ a stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je *postačující* podmínkou pro spojitost limitní funkce. Ovšem ani jedna z těchto podmínek není nutnou:

- limitní funkce posloupnosti $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ je na intervalu $(0, 1)$ spojitá, ačkoli posloupnost $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ není stejnoměrně konvergentní.
- Dirichletova funkce

$$\mathcal{X}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

je nespojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, ovšem posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\mathcal{X}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k nulové funkci.

Kdy budou tyto podmínky i nutnými?

**Věta 3.21 (i)**

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ a nechť $f_n(x) \to f(x)$ na $[a, b]$. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na $[a, b]$, pak dokonce $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $[a, b]$.

**Poznámka**

Tvrzení zůstane v planosti i v případě, že interval $[a, b]$ nahradíme obecnou kompaktní „množinou“. Nicméně uzavřenost a ohraničenost (=kompaktnost) je podstatná, neboť např.

$$x^n \to 0 \text{ na } (0,1), \text{ ovšem } x^n \not\rightrightarrows 0 \text{ na } (0,1),$$

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \to x^2 \text{ na } \mathbb{R}_+, \text{ ovšem } \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \not\rightrightarrows x^2 \text{ na } \mathbb{R}_+.$$

Podobná tvrzení platí i pro řady funkcí.

**Věta 3.21 (ii)**

Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $I$ a má součet $s(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na $I$, pak je i funkce $s(x)$ spojitá na $I$.

**Důsledek 3.21 (i)**

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných (nekladných) spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ a nechť funkce $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá na $[a, b]$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $s(x)$ na $[a, b]$.

**Věta 3.22(i)**

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, b]$ k funkci $f(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ integrovatelné na $[a, b]$, je i $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \qquad (1)$$

Bez požadavku stejnoměrné konvergence tvrzení Věty 3.22(i) obecně neplatí.

**Příklad**

Uvažme posloupnost

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2} \text{ na intervalu } [0, 1].$$

Ovšem na druhou stranu stejnoměrná konvergence není pro platnost identity (1) nutnou podmínkou.

**Příklad**

Uvažme posloupnost

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \text{ na intervalu } [0, 1].$$

**Věta 3.23(i)**

Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, b]$ a má součet $s(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ integrovatelné na $[a, b]$, je i $s(x)$ integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

**Příklad**

Uvažme řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx = s(x)$, kde $0 < r < 1$. Ukažme, že funkce $s(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a vypočtěme $\int_0^{2\pi} s(x)\,\mathrm{d}x$.

**Věta 3.24(i)**

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu $I$ derivaci, a nechť je konvergentní na $I$. Nechť dále $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $I$. Pak funkce $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ má na intervalu $I$ derivaci a platí

$$f'(x) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

**Poznámka**

- Předpoklad konvergence $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je nutný, zatímco stejnoměrná konvergence $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nutná není, např. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ pro $x \in (0, 1)$.
- Ovšem pokud $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje stejnoměrně, nemusí tvrzení Věty 3.24(i) platit, např. $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin n(x + \pi/2)$ na $\mathbb{R}$.

**Věta 3.24(ii)**

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu $I$ derivaci, a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na $I$. Nechť dále $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na $I$. Pak funkce $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má na intervalu $I$ derivaci a platí

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Speciální příklad: mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Poloměr konvergence $R = 1/r$, kde

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

přičemž pro posloupnost kladných čísel $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Je-li $R > 0$, pak každá mocninná řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$ a její součet je spojitá funkce, která je integrovatelná i diferencovatelná.

Obzvláště: Taylorova (Maclaurinova) řada pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má v bodě $x_0$ derivace všech řádů,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

S pomocí mocninných řad tedy můžeme aproximovat funkce, které mají derivace libovolného řádu v bodě $x_0$ na nějakém jeho okolí.

1 Funkční řady a konvergence

2 Stejnoměrná konvergence, její kritéria a vlastnosti

3 Fourierovy řady
- Obecný ortogonální systém $\{\varphi_n(x)\}$
- Systém $\{\cos nx, \sin nx\}$
- Konvergence

Již víme, že pomocí Taylorovy řady

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

můžeme v okolí bodu $x_0$ aproximovat každou funkci mající derivace libovolného řádu právě v bodě $x_0$. V praktických úlohách se často vyskytují periodické funkce. Nyní si proto ukážeme, jak aproximovat periodické funkce. Nejjednoduššími příklady těchto funkcí jsou $\sin nx$ a $\cos nx$. Proto se přirozeně nabízí myšlenka aproximovat funkci pomocí trigonometrického polynomu (proč „polynom“?)

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

nebo trigonometrické řady

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

1. Funkční řady a konvergence
2. Stejnoměrná konvergence, její kritéria a vlastnosti
3. Fourierovy řady
   - Obecný ortogonální systém $\{\varphi_n(x)\}$
   - Systém $\{\cos nx, \sin nx\}$
   - Konvergence

**Definice 3.29(i)**

Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné funkce na intervalu $[a, b]$. Číslo

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

nazýváme *skalárním součinem* funkcí $f, g$. Funkce $f, g$ se nazývají *ortogonální* na $[a, b]$, jestliže $\langle f, g \rangle = 0$. *Normou funkce* $f$ rozumíme číslo

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Funkce $f$ se nazývá normovaná, jestliže $\|f\| = 1$.

**Definice 3.29(i)**

Nechť $\{\varphi_n(x)\}$ je konečná nebo spočetná posloupnost integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$. Tato posloupnost se nazývá *ortogonální*, jestliže každé dvě funkce $\varphi_m$ a $\varphi_n$, přičemž $m \neq n$, jsou ortogonální a každá funkce $\varphi_n$ má kladnou normu. Pokud navíc $\|\varphi_n\| = 1$, nazývá se tato posloupnost *ortonormální*.

Jinými slovy, posloupnost $\{\varphi_n(x)\}$ je ortonormální, jestliže

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Je-li $\{\varphi_n(x)\}$ ortogonální posloupnost, pak $\left\{ \frac{1}{\|\varphi_n\|}\, \varphi_n(x) \right\}$ je ortonormální posloupnost.

**Věta 3.30(i)**

Nechť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$ a nechť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Nechť dále řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

konverguje stejnoměrně na $[a, b]$ k funkci $f(x)$. Pak pro čísla $c_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$c_n = \frac{\langle f,\ \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n,\ \varphi_n \rangle} = \frac{\langle f,\ \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{2}$$

---

Speciálně je-li posloupnost $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální.

Důkaz? ■

**Definice 3.30(i)**

Nechť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$ a funkce $f$ integrovatelná na $[a, b]$. Pak čísla $c_n$ daná vztahem (2) nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce $f$ na $[a, b]$ vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a řadu

$$\Phi_f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

kde $c_n$ jsou tyto Fourierovy koeficienty, nazýváme *Fourierovou řadou funkce $f$* na $[a, b]$ vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Ovšem v tuto chvíli je přiřazení řady $\Phi_f$ k funkci $f$ pouze formální. Nevíme totiž, zda tato řada vůbec konverguje, a pokud konverguje, zda je jejím součtem právě funkce $f$. Z Věty 3.30(i) pouze plyne to, že k libovolné integrovatelné funkci $f$ existuje nejvýše jedna řada tvaru $\Phi_f$, která na $[a, b]$ konverguje stejnoměrně k funkci $f$.

Nicméně v následující větě ukážeme, že částečné součty Fourierovy řady funkce $f$ aproximují mezi všemi lineárními kombinacemi funkcí $\varphi_n$ v jistém smyslu nejlépe. „Jistý smysl“: *kvadratická odchylka* funkcí $f, g$

$$\|f - g\| = \left\{ \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2}.$$

**Věta 3.31(i)**

Nechť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$, funkce $f$ je integrovatelná na $[a, b]$ a $n \in \mathbb{N}$. Mezi všemi lineárními kombinacemi funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ má od funkce $f$ nejmenší kvadratickou odchylku ta, jejíž koeficienty jsou Fourierovými koeficienty funkce $f$ vzhledem k posloupnosti $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Důkaz? ■

1 Funkční řady a konvergence

2 Stejnoměrná konvergence, její kritéria a vlastnosti

3 Fourierovy řady
- Obecný ortogonální systém $\{\varphi_n(x)\}$
- Systém $\{\cos nx, \sin nx\}$
- Konvergence

Nyní budeme uvažovat Fourierovy řady vzhledem k systému

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}. \tag{3}$$

Protože jsou tyto funkce $2\pi$-periodické, půjde v tomto případě o aproximaci $2\pi$-periodických funkcí.

**Lemma 3.33(i)**

Nechť funkce $f$ je $2\pi$-periodická a na intervalu $[0, 2\pi]$ integrovatelná Potom pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Důkaz? ■

**Věta 3.33(i)**

Posloupnost (3) je ortogonální na libovolném intervalu $[c, c+2\pi]$ mající délku $2\pi$.

Důkaz? ■

Ze systému (3) pak dostaneme ortonormální posloupnost jako

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots\dots\right\}.$$

Nyní se omezíme pouze na interval $[-\pi, \pi]$, ovšem podobně lze postupovat na každém intervalu $[c, c+2\pi]$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

**Věta 3.34(i)**

Fourierova řada libovolné integrovatelné funkce $f$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ má vzhledem k systému (3) tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde $a_n$, $b_n$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $f$, pro něž platí

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz? ■

**Důsledek 3.34(i)**

Nechť funkce $f$ je integrovatelná na intervalu $[-\pi, \pi]$.

- Je-li funkce $f$ sudá, má její Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{kde } a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

- Je-li $f$ lichá, má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{kde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvažme integrovatelnou funkci $f$ na intervalu $[0,\pi]$. Položíme-li $f(x) = f(-x)$ pro $x \in [-\pi, 0)$, zkonstruujeme tzv. *sudé rozšíření* funkce $f$ na interval $[-\pi,\pi]$. Fourierově řadě sudého rozšíření funkce $f$ říkáme *rozvoj funkce $f$ v kosinovou řadu na intervalu* $[0,\pi]$.

Podobně, máme-li integrovatelnou funkci $f$ na intervalu $(0,\pi]$ a položíme-li $f(0) = 0$ a $f(x) = -f(-x)$ pro $x \in [-\pi, 0)$, sestrojíme tzv. *liché rozšíření* funkce $f$ na $[-\pi,\pi]$. Fourierově řadě lichého rozšíření funkce $f$ říkáme *rozvoj funkce $f$ v sinovou řadu na intervalu* $[0,\pi]$.

**Poznámka**

Jak nalézt Fourierovu řadu pro $2h$-periodickou funkci $f$, kde $h \neq \pi$? Nechť $f$ je integrovatelná na intervalu $[-h, h]$ a definujme funkci $g(t) := f\left(\frac{h}{\pi} t\right)$. Pak funkce $g(t)$ je $2\pi$-periodická a můžeme jí přiřadit Fourierovu řadu na $[-\pi,\pi]$. Pak zpětnou transformací $t = \frac{\pi}{h} x$ dostaneme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{h} x + b_n \sin \frac{n\pi}{h} x\right),$$

kde jsou Fourierovy koeficienty dány vztahy

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \cos \frac{n\pi}{h} x \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \sin \frac{n\pi}{h} x \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Funkční řady a konvergence

2. Stejnoměrná konvergence, její kritéria a vlastnosti

3. Fourierovy řady
   - Obecný ortogonální systém $\{\varphi_n(x)\}$
   - Systém $\{\cos nx, \sin nx\}$
   - Konvergence

Je zřejmé, že pokud Fourierova řada konverguje na intervalu $[-\pi, \pi]$, pak konverguje na celém $\mathbb{R}$ a její součet je $2\pi$-periodická funkce. Proto se opět zaměříme pouze na $2\pi$-periodické funkce. Navíc pro tuto funkci stačí, aby byla definovaná na intervalu $(-\pi, \pi]$ nebo $[-\pi, \pi)$, neboť pak je jednoznačně určeno její $2\pi$-periodické rozšíření.

Označme (pokud uvedená limita existuje)

$$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

Funkci $f$ nazveme *po částech spojitou na* $[a, b]$, pokud má na intervalu $[a, b]$ pouze konečně mnoho bodů nespojitosti, přičemž se jedná o neodstranitelné nespojitosti I. druhu (tj. „skok“).

Funkci $f$ nazveme *po částech monotónní na* $[a, b]$, pokud existuje dělení intervalu $[a, b]$ (s konečným počtem dělících bodů) takové, že uvnitř každého dělícího intervalu je funkce $f$ monotónní.

**Věta 3.38(i)**

Nechť funkce $f$ je po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada $\Phi_f(x)$ konverguje na $[-\pi, \pi]$ a platí:

- $\Phi_f(x_0) = f(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je $f$ spojitá,
- $\Phi_f(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right]$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je $f$ nespojitá,
- $\Phi_f(-\pi) = \Phi_f(\pi) = \frac{1}{2}\left[f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right]$.

**Poznámka**

Jsou-li splněny požadavky Věty 3.38(i), pak z této věty víme k jaké funkci konverguje $\Phi_f$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Na intervalu $(-\infty, \infty)$ konverguje tato řada k tzv. $2\pi$-periodickému rozšíření funkce $f$, tj. k funkci

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big), \ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)], & x = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Poznámka**

Zejména, máme-li $2\pi$-periodickou funkci $f$, která je současně po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[-\pi, \pi]$, pak její Fourierova řada $\Phi_f(x)$ konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ k aritmetickému průměru limity zprava a limity zleva funkce $f$, tj. platí

- $\Phi_f(x_0) = f(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, v němž je $f$ spojitá,
- $\Phi_f(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right]$ v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nespojitosti $f$.

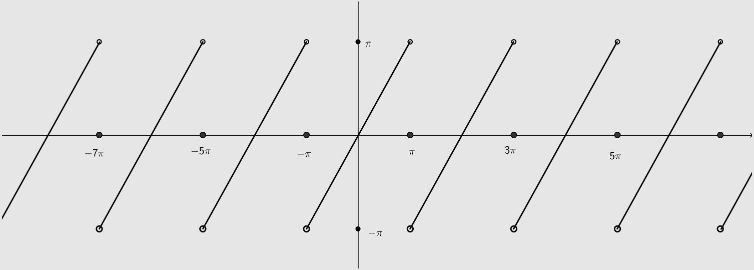
Je jasné, že pokud funkce $f$ je nespojitá alespoň v jednom bodě $x_0 \in [-\pi, \pi]$, pak její Fourierova řada nemůže konvergovat stejnoměrně, viz Větu 3.21(ii).

**Věta 3.39(i)**

Nechť $2\pi$-periodická funkce $f$ je spojitá na intervalu $[-\pi, \pi]$ a nechť její derivace $f'(x)$ na tomtéž intervalu existuje a je po částech spojitá. Pak Fourierova řada funkce $f$ konverguje k funkci $f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

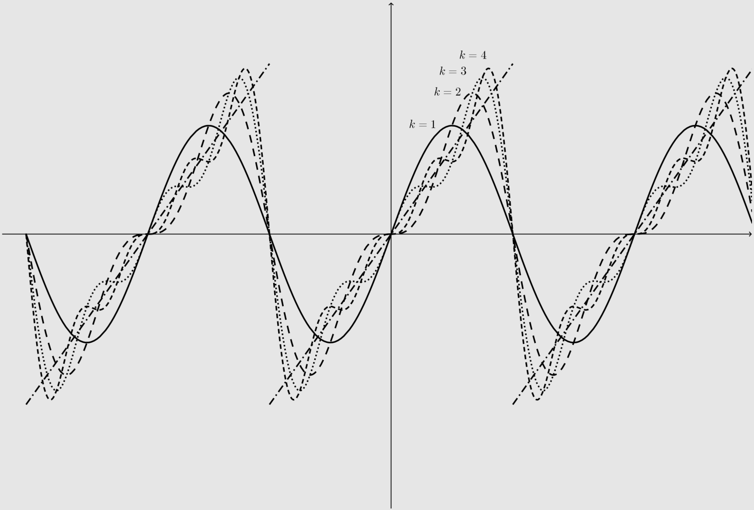
**Příklad**

Najděme Fourierovu řadu pro funkci $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ a určeme k jaké funkci konverguje Fourierova řada na $(-\infty, \infty)$.



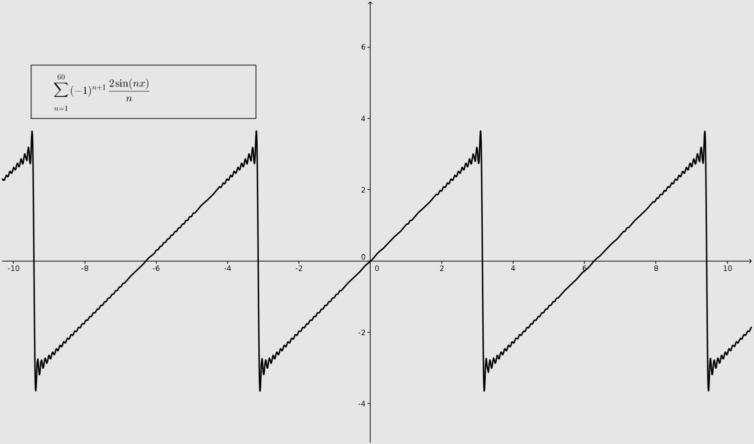
**Příklad**

Najděme Fourierovu řadu pro funkci $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ a určeme k jaké funkci konverguje Fourierova řada na $(-\infty, \infty)$.



**Příklad**

Najděme Fourierovu řadu pro funkci $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ a určeme k jaké funkci konverguje Fourierova řada na $(-\infty, \infty)$.



**Příklad**

Najděme Fourierovu řadu, která je periodickým prodloužením funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$.