CZ.1.07/2.3.00/30.0009
Zaměstnáním čerstvých absolventů doktorského studia k vědecké excelenci

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Sbírka příkladů z matematické analýzy II

Petr Hasil
hasil@math.muni.cz
http://www.math.muni.cz/~hasil
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita, Brno

Petr Zemánek
zemanekp@math.muni.cz
http://www.math.muni.cz/~zemanekp
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita, Brno

Úvod

Milá čtenářko, milý čtenáři,

dostává se Vám do rukou (či na monitor) druhý díl sbírky příkladů z matematické analýzy, který je pokračováním textu vydaného na Elportálu MU (viz `http://is.muni.cz/elportal/?id=980552`) avšak (zatím) pouze s výsledky jednotlivých příkladů bez prezentace jejich řešení (vyjma ukázkových příkladů). Tento text by měl posloužit jako vhodný doplněk při studiu jakéhokoli předmětu (zejména M2100 vyučovaném na PřF MU), jehož obsahem jsou obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty, metrické prostory nebo diferenciální počet funkcí více proměnných. Většina příkladů v této sbírce pochází ze cvičení k příslušným partiím matematické analýzy, které byly vedeny autory v minulých letech, přičemž některé z těchto příkladů jsou přejaty z [1–9].

leden 2014 Autoři

$$\ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(\left\|\left(A^T\right)^{-1}-\left(A^{-1}\right)^T\right\|!+\frac{1}{t}\right)^t\right]+\alpha^2\prod_{j=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{\alpha}{j\pi}\right)^2\right]^2+$$

$$+\frac{\binom{0}{0}+\cos(2\alpha)}{\Gamma(3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh\beta\sqrt{1-\tanh^2\beta}}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]+\sin^2\alpha+\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh\beta\sqrt{1-\tanh^2\beta}}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln e+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{1+1=2}}$$

Obsah

I. Obyčejné diferenciální rovnice

Definice 1. Buď F funkce, jejíž definiční obor G je podmnožinou trojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$. Rovnice

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu*. Nebude-li s rovnicí současně uveden obor G, budeme jím rozumět množinu všech bodů, pro něž je funkce F definována. *Řešením* (někdy též *integrálem*) této rovnice se rozumí funkce $y(x)$, která je definována v nějakém intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a splňuje pro všechna $x \in J$ tyto podmínky

$$\left[x, y(x), y'(x)\right] \in G, \quad F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0.$$

Není-li interval J otevřený, pak v každém krajním bodě $\xi \in J$ značí $y'(x)$ jednostrannou derivaci. Graf řešení se nazývá *integrální křivka*. *Obecným řešením* diferenciální rovnice (1) se rozumí každé její řešení $y(x, C)$, z něhož lze vhodnou volbou konstanty C obdržet libovolné řešení této rovnice. *Partikulární řešení* je řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (1), v němž integrační konstanty mají konkrétní číselnou hodnotu.

Definice 2. Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (1) se nazývá *rozřešená vzhledem k derivaci*, pokud ji lze upravit do tvaru

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

V opačném případě nazýváme rovnici (1) *nerozřešenou vzhledem k derivaci.*

Věta 3. *Nechť funkce $f : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ je spojitá, přičemž $-\infty \leq a < b \leq \infty$ a současně $-\infty \leq c < d \leq \infty$. Nechť $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$, pak pro počáteční problém*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

existuje řešení $y(x)$ s maximálním definičním oborem $(\alpha, \omega) \subset (a, b)$, kde $\alpha < t_0 < \omega$. Jestliže $a < \alpha$, pak

$$\lim_{t\to\alpha^+} y(t) = c \quad \textit{nebo} \quad \lim_{t\to\alpha^+} y(t) = d,$$

a pokud $\omega < b$, potom

$$\lim_{t\to\omega^-} y(t) = c \quad \textit{nebo} \quad \lim_{t\to\omega^-} y(t) = d.$$

Jsou-li navíc parciální derivace funkce f vzhledem k y, tj. $\frac{\partial f}{\partial y}$, spojité na $(a, b) \times (c, d)$, pak má počáteční problém (3) jediné řešení.

I. 1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Definice 4. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou spojité funkce na (nějakých) otevřených intervalech, nazýváme *diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.*

Věta 5. *Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce (přičemž může nastat $a = -\infty$, $c = -\infty$, $b = +\infty$, $d = +\infty$) takové, že $g(y) \neq 0$ na (c, d). Pak počáteční problém*

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$, má právě jedno řešení, které je určeno implicitně vzorcem

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Věta 6. *Nechť G je konvexní oblast v $\mathbb{R}^2$, $f : G \to \mathbb{R}$ funkce, která má spojité parciální derivace do druhého řádu včetně a $f(x, y) \neq 0$. Diferenciální rovnici*

$$y' = f(x, y)$$

je možné převést na rovnici se separovanými proměnnými právě tehdy, když

$$D(x, y) := \det \begin{pmatrix} f(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{pro každé } [x, y] \in G.$$

Poznámka 7. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(ax + by + c)$$

převedeme pomocí substituce $z = ax + by + c$ na rovnici se separovanými proměnnými.

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y^2 + 1}{x + 1}.$$

Určeme také řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$.

Řešení. Ze zadání je zřejmé, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Proto ze vztahu $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 1} = \frac{\mathrm{d}x}{x + 1},$$

z čehož integrováním získáme

$$\operatorname{arctg} y = \ln|x + 1| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Proto zadaná diferenciální rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \operatorname{tg}(\ln|x + 1| + C), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Nyní z využití počáteční podmínky dosazené do vztahu (4) dostaneme

$$y(0) = 1 : \quad \operatorname{arctg} 1 = \ln|1| + C \iff C = \frac{\pi}{4}.$$

Proto řešením počátečního problému je funkce $y(x) = \operatorname{tg}\left(\ln|x+1| + \frac{\pi}{4}\right)$. Dodejme ještě, že konstantu C bylo také možné vypočítat ze vztahu (5) ovšem s uvědoměním si, že platí $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + k\pi) = x$.

(1) Rozhodněte, zda je možné zapsat funkci dvou proměnných

$$F(x,y) = x^3\,\mathrm{e}^{x+2y}$$

jako součin funkcí jedné proměnné $f(x)$ a $g(y)$. Je-li to možné, určete tyto funkce. Není-li to možné, zdůvodněte.

$$\left[f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x, g(y) = \mathrm{e}^{2y}\right]$$

(2) Rozhodněte, zda je možné zapsat funkci dvou proměnných

$$F(x,y) = \sin(2x - y)$$

jako součin funkcí jedné proměnné $f(x)$ a $g(y)$. Je-li to možné, určete tyto funkce. Není-li to možné, zdůvodněte.

[nelze, determinant z Věty 6 je nenulový]

(3) Rozhodněte, zda je možné zapsat funkci dvou proměnných

$$F(x,y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

jako součin funkcí jedné proměnné $f(x)$ a $g(y)$. Je-li to možné, určete tyto funkce. Není-li to možné, zdůvodněte.

$$\left[f(x) = 2\sin x, g(y) = \cos y\right]$$

(4) Řešte následující rovnici

$$y' - \sin x = 5.$$

$$\left[y = 5x - \cos x + C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(5) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{y \ln y}{x}.$$

$$\left[y = \mathrm{e}^{Cx},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(6) Řešte následující rovnici

$$y' \operatorname{cotg} x = 2 - y.$$

$$\left[y = 2 - C\cos x,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(7) Řešte následující rovnici

$$x^3yy' + xyy' - y^2 - 1 = 0.$$

$$\left[\sqrt{y^2+1} = \frac{Cx}{\sqrt{x^2+1}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(8) Řešte následující rovnici

$$7-\sqrt{y}=xy'.$$

$\left[y=49,\ -2\sqrt{y}-14\ln|\sqrt{y}-7|=\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}\right]$

(9) Řešte následující rovnici

$$2y-x^3y'=0.$$

$\left[y=C\,\mathrm{e}^{-1/x^2},\ C\in\mathbb{R}\right]$

(10) Řešte následující rovnici

$$(x+1)\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}x=0.$$

$\left[y=C(x+1)\,\mathrm{e}^{-x},\ C\in\mathbb{R}\right]$

(11) Řešte následující rovnici

$$y'\cos x=y\ln y.$$

$\left[y=\mathrm{e}^{C\frac{1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}},\ C\in\mathbb{R}\right]$

(12) Řešte následující rovnici

$$\frac{x-1}{2y}=\mathrm{e}^{-x}\,y'.$$

$\left[y^2=(x-2)\,\mathrm{e}^{x}+C,\ C\in\mathbb{R}\right]$

(13) Řešte následující rovnici

$$y'=16x^2+8xy+y^2.$$

$\left[\mathrm{arctg}\left(2x+\frac{y}{2}\right)=2x+C,\ C\in\mathbb{R}\right]$

(14) Řešte následující rovnici

$$y-y^2+xy'=0.$$

$\left[y=0,\ y=(1-Cx)^{-1},\ C\in\mathbb{R}\right]$

(15) Řešte následující rovnici

$$y'\cos^2 x=(1+\cos^2 x)\sqrt{1-y^2}.$$

$\left[y=\pm 1,\ y=\sin(\mathrm{tg}\,x+x+C),\ C\in\mathbb{R}\right]$

(16) Řešte následující rovnici

$$\mathrm{e}^{-s}\left(1+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)=1.$$

$\left[s=-\ln\left(1-C\mathrm{e}^{t}\right),\ C\in\mathbb{R}\right]$

(17) Řešte následující rovnici

$$y'\operatorname{tg}x-y^2=1-2y.$$

$\left[y=1, y=1-\frac{1}{\ln|\sin x|+C},\ C\in\mathbb{R}\right]$

(18) Řešte následující rovnici

$$y'=6x+2y+3.$$

$\left[y=C\,\mathrm{e}^{2x}-3(x+1),\ C\in\mathbb{R}\right]$

(19) Řešte následující počáteční problém

$$x+y'=2,\quad y(2)=5.$$

$\left[y=2x-\frac{x^2}{2}+3\right]$

(20) Řešte následující počáteční problém

$$(1+\mathrm{e}^x)\frac{y'}{y}+\mathrm{e}^x=0,\quad y(0)=1.$$

$\left[y=\frac{2}{1+\mathrm{e}^x}\right]$

(21) Řešte následující počáteční problém

$$y'\sin x\sin y=\cos x\cos y,\quad y(\tfrac{\pi}{4})=0.$$

$\left[\cos y=\frac{\sqrt{2}}{\sin x}\right]$

(22) Řešte následující počáteční problém

$$2(1+\mathrm{e}^x)yy'=\mathrm{e}^x,\quad y(0)=0.$$

$\left[y=\pm\sqrt{\ln(\mathrm{e}^x+1)-\ln 2}\right]$

(23) Řešte následující počáteční problém

$$\sin y\cos x\,\mathrm{d}y=\cos y\sin x\,\mathrm{d}x,\quad y(0)=\frac{\pi}{4}.$$

$\left[\sqrt{2}\cos y=\cos x\right]$

(24) Řešte následující počáteční problém

$$(x^2+1)(y^2-1)+xyy'=0, \quad y(1)=\sqrt{2}.$$

$$\left[y=\sqrt{x^{-2}\,\mathrm{e}^{1-x^2}+1}\right]$$

(25) Řešte následující rovnici

$$y'=(x+y)^2.$$

$$[y=\mathrm{tg}(x+C)-x,\ C\in\mathbb{R}]$$

(26) Řešte následující rovnici

$$y'=\frac{x-y+1}{x-y}.$$

$$\left[(x-y)^2+2x+C=0,\ C\in\mathbb{R}\right]$$

I. 2. Homogenní diferenciální rovnice

Poznámka 8. Diferenciální rovnici

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

nazýváme *homogenní diferenciální rovnicí 1. řádu*. Pomocí substituce $u=\frac{y}{x}$ ji převedeme na rovnici se separovanými proměnnými ve tvaru

$$u'=\frac{1}{x}\big(f(u)-u\big).$$

Definice 9. Nechť funkce dvou proměnných $f(x,y)$ je definována na nějakém kuželu K, tj. s každým bodem $[x,y]\in K$ je také $[tx,ty]\in K$ pro každé $t>0$. Tato funkce se nazývá *homogenní k-tého stupně*, jestliže pro každé $t>0$ platí

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y).$$

Poznámka 10. Diferenciální rovnice ve tvaru

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

bude homogenní diferenciální rovnicí prvního řádu právě tehdy, když jsou funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ homogenní téhož stupně.

Poznámka 11. Rovnici typu

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$$

lze řešit následujícím způsobem:

i) pokud soustava

$$ax+by+c=0, \quad Ax+By+C=0 \tag{6}$$

má jediné řešení x_0, y_0, pak ji pomocí substituce

$$u=x-x_0, \quad v=y-y_0$$

převedeme na homogenní rovnici 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{v}{u}\right);$$

ii) pokud soustava (6) nemá řešení (tzn. $ax + by = K(Ax + By)$ a $c \neq KC$), pak ji lze převést na rovnici se separovanými proměnnými (např. pomocí $z = ax + by$), viz Příklad 26.

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Protože funkce $y \equiv 0$ není řešením této diferenciální rovnice (zkuste si dosadit do zadání), můžeme tuto diferenciální rovnici přepsat do tvaru

$$y'(x) = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}},$$

ze kterého po substituci $z = \frac{y}{x}$ dostaneme

$$z'x + z = \frac{1 + z^2}{2z}.$$

Pokud vyloučíme $z = \pm 1$, obdržíme

$$\frac{2z}{1 - z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

nebo-li po integraci obou stran a dílčích úpravách

$$\begin{aligned}
-\ln\left|1 - z^2\right| &= \ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R},\\
-\ln\left|x(1 - z^2)\right| &= C, \qquad C \in \mathbb{R},\\
\frac{1}{|x(1 - z^2)|} &= K, \qquad K > 0,\\
\frac{1}{x(1 - z^2)} &= L, \qquad L \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\\
1 - \frac{y^2}{x^2} &= \frac{L}{x}, \qquad L \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\\
y &= \pm\sqrt{x^2 - Lx}, \qquad L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Funkce $z = \pm 1$ je ekvivalentní s $y = \pm x$, což je řešením zadané diferenciální rovnice, které dostaneme volbou $L = 0$, je obecné řešení ve tvaru

$$y = \pm\sqrt{x^2 - Cx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(27) Řešte následující rovnici

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$\left[y = \pm x,\ y = x \sin\left(\ln|Lx|\right),\ L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$

(28) Řešte následující rovnici

$$(y^2 - x^2)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0.$$

$$\left[y = \pm\sqrt{-x^2 + Cx},\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$$

(29) Řešte následující rovnici

$$xy' + y \ln x = y \ln y.$$

$$\left[y = x\,\mathrm{e}^{Cx+1},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(30) Řešte následující rovnici

$$(xy' - y) \cos \frac{y}{x} = x.$$

$$\left[x = C\,\mathrm{e}^{\sin \frac{y}{x}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(31) Řešte následující rovnici

$$(x + y)\,\mathrm{d}x - (x - y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

$$\left[\operatorname{arctg} \tfrac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2) + C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(32) Řešte následující rovnici

$$xy' = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right).$$

$$\left[\operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2} \ln \tfrac{y}{x}\right) = \ln |Cx|,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$$

(33) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x + 2y - 7}{x - 3}.$$

$$\left[y + x - 5 = C(x - 3)^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(34) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{2x - y - 5}{x - 3y - 5}.$$

$$\left[C = 3(y + 1)^2 - 2(y + 1)(x - 2) + 2(x - 2)^2,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$$

(35) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x - y + 3}{x + y - 5}.$$

$$\left[C = (x - 1)^2 - 2(y - 4)(x - 1) - (y - 4)^2,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$$

(36) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{5y - 5x - 1}{2y - 2x - 1}.$$

$$\left[y = x,\ C = 5x - 2y + \ln|y - x|,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(37) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x - y - 1}{x + y + 3}.$$

$$\left[(x+1)^2 - 2(x+1)(y+2) - (y+2)^2 = C,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$$

(38) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{-x + 2y - 5}{2x - y + 4}.$$

$$\left[\sqrt{\tfrac{y-x-3}{(y+x-1)^3}} = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(39) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{x + y + 1}{2x + 2y - 1}.$$

$$\left[2x + 2y - 1 - \ln|2x + 2y| = 3x + C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

I. 3. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 12. Rovnice ve tvaru

$$y' = f(x)\,y + g(x)$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice 1. řádu* (pokud je $g(x) \equiv 0$ hovoříme o *homogenní* LDR, v opačném případě ji nazýváme *nehomogenní* LDR).

Poznámka 13. Obecné řešení homogenní LDR získáme pomocí metody separace proměnných. Řešení rovnice $y' = f(x)\,y$ lze potom explicitně vyjádřit

$$y = C\,\mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Při hledání obecného řešení nehomogenní LDR je možné postupovat dvěma způsoby: buď s pomocí *metody integračního faktoru* (kdy nehomogenní rovnici vynásobíme členem $\mathrm{e}^{-\int f(x)\mathrm{d}x}$) nebo s pomocí *metody variace konstant* (kdy integrační konstantu získanou při řešení přidružené homogenní rovnice považujeme za funkci $C(x)$ a jejím dosazením dosazením do nehomogenní rovnice získáme její tvar). Řešení počátečního problému $y(x_0) = y_0$ lze explicitně zapsat ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \right).$$

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y' + \frac{2y}{x^2 - 1} = x.$$

Řešení. Je zřejmé, že se jedná o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Proto si ukážeme obě metody řešení. Začneme s metodou integračního faktoru. Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $e^{\int \frac{2\,dx}{x^2-1}} = e^{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} = \frac{x-1}{x+1}$ (všimněte si, že pro určení integračního faktoru není nutné uvažovat integrační konstantu C ani jeho znaménko – proto jsme odstranili absolutní hodnotu u posledního výrazu). Po úpravě dostaneme

$$y'\frac{x-1}{x+1} + \frac{2y}{(x+1)^2} = \frac{x(x-1)}{x+1}.$$

S využitím pravidla pro derivování součinu si můžeme všimnout, že výraz na levé straně lze napsat jako $\left(y\frac{x-1}{x+1}\right)'$, což je hlavní myšlenka metody integračního faktoru. Pak integrováním obou stran obdržíme

$$y\frac{x-1}{x+1} = \int \frac{x(x-1)}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Proto řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní vyřešíme tutéž diferenciální rovnici pomocí metody variace konstant. Proto se nejdříve zaměříme na přidruženou homogenní diferenciální rovnici, tj. $y' = -\frac{2y}{x^2-1}$. To je rovnice se separovanými proměnnými, tedy za předpokladu $y \not\equiv 0$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= -\frac{2\,dx}{x^2-1}, \\
\ln|y| &= -\ln|x-1| + \ln|x+1| + C, \qquad && C \in \mathbb{R}, \\
\ln\left|\frac{y(x-1)}{x+1}\right| &= C, && C \in \mathbb{R}, \\
\left|\frac{y(x-1)}{x+1}\right| &= K, && K > 0, \\
\frac{y(x-1)}{x+1} &= L, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
y &= \frac{L(x+1)}{x-1}, && L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Protože funkce $y \equiv 0$ vždy vyhovuje homogenní lineární diferenciální rovnici, je nutné ji také zahrnout do obecného řešení (pokud to je možné – u tohoto typu diferenciálních rovnic to je možné vždy). Proto řešením přidružené homogenní rovnice je funkce

$$y = \frac{C(x+1)}{x-1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní uvažujme tuto funkci ovšem konstantu C nahradíme nějakou neznámou funkcí $C(x)$, tj. $y(x) = \frac{C(x)\,(x+1)}{x-1}$. Nyní s využitím pravidla pro derivování součinu můžeme spočítat $y'(x)$ a dosadit do původního zadání, tj.

$$\frac{C'(x)\,(x+1)(x-1) + C(x)\,(x-1) - C(x)\,(x+1)}{(x-1)^2} + \frac{2\,C(x)\,(x+1)}{(x-1)(x^2-1)} = x.$$

Pokud jsme vše spočítali správně obdržíme diferenciální rovnici pro funkci $C(x)$, kde se žádný výraz obsahující nederivované $C(x)$ nevyskytuje. Dostáváme tedy

$$C'(x) = \frac{x(x-1)}{x+1},$$

což po integraci dává

$$C(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C.$$

Dosazením do řešení přidružené homogenní rovnice dostaneme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$y = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme na závěr, že ačkoli se oba postupy liší, je při nich potřeba spočítat tytéž primitivní funkce (tedy v tomto směru není mezi oběma metodami žádný rozdíl).

(40) Řešte následující rovnici

$$y' = 6x - 2y.$$

$\left[y = 3x - \frac{3}{2} + C\,\mathrm{e}^{-2x},\ C \in \mathbb{R}\right]$

(41) Řešte následující rovnici

$$y' = 4xy + (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x^2}.$$

$\left[y = (x^2 + x + C)\,\mathrm{e}^{2x^2},\ C \in \mathbb{R}\right]$

(42) Řešte následující rovnici

$$y' \cos x = (y + 2\cos x)\sin x.$$

$\left[y = \frac{\sin^2 x + C}{\cos x},\ C \in \mathbb{R}\right]$

(43) Řešte následující rovnici

$$y'x + y = x\ln x.$$

$\left[y = \frac{C}{x} + \frac{x\ln x}{2} - \frac{x}{4},\ C \in \mathbb{R}\right]$

(44) Řešte následující rovnici

$$y'x - y = x^2\ln x.$$

$\left[y = Cx + x^2\ln x - x^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$

(45) Řešte následující rovnici

$$y' = -3y + x.$$

$\left[y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + C\,\mathrm{e}^{-3x},\ C \in \mathbb{R}\right]$

(46) Řešte následující rovnici

$$y' - y\,\mathrm{tg}\,x - \sin x = 0.$$

$$\left[y = \tfrac{\sin^2 x}{2\cos x} + \tfrac{C}{\cos x} = \tfrac{C}{\cos x} - \tfrac{\cos x}{2},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(47) Řešte následující rovnici

$$y' - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{1-x^2}.$$

$$\left[y = \tfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(\arcsin^2 x + C),\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(48) Řešte následující rovnici

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^3 x.$$

$$\left[y = \cos x\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{\sin 2x}{4} + C\right),\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(49) Řešte následující rovnici

$$y'\cos x + y\sin x = 1.$$

$$[y = \sin x + C\cos x,\ C \in \mathbb{R}]$$

(50) Řešte následující rovnici

$$y' - y\sin x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

$$[y = 1 - \cos x + C\,\mathrm{e}^{-\cos x},\ C \in \mathbb{R}]$$

(51) Řešte následující rovnici

$$y' - 3x^2 y = (x+2)\,\mathrm{e}^{x^3}.$$

$$\left[y = \left(\tfrac{x^2}{2} + 2x + C\right)\mathrm{e}^{x^3},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(52) Řešte následující rovnici

$$y'\,\mathrm{e}^{x^2} + 2xy\,\mathrm{e}^{x^2} = \cos x.$$

$$\left[y = (C + \sin x)\,\mathrm{e}^{-x^2},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(53) Řešte následující počáteční problém

$$y' = x^2\,\mathrm{e}^x + \frac{y}{x}, \quad y(1) = \mathrm{e}\,.$$

$$[y = x(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e})]$$

(54) Řešte následující počáteční problém

$$y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

$\left[y = \frac{x^2+1}{2\,\mathrm{e}^{x^2}}\right]$

(55) Řešte následující počáteční problém

$$y' - 4y = \cos x, \quad y(0) = 1.$$

$\left[y = \frac{1}{17}\sin x - \frac{4}{17}\cos x + \frac{21}{17}\,\mathrm{e}^{4x}\right]$

(56) Řešte následující počáteční problém

$$y' + y\sin x = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

$[y = \mathrm{e}^{\cos x} + 1]$

(57) V 13 hodin 28 minut byla v hotelovém pokoji, vytopeném na 18, 3 ℃ nalezena mrtvola, jejíž teplota byla 26, 6 ℃. O tři hodiny později je její teplota 21, 1 ℃. Určete čas úmrtí za předpokladu teploty živého těla 37 ℃.

$[y'(t) = -k(y(t) - T)$, 11 h. 13 min.]

I. 4. Bernoulliova diferenciální rovnice

Definice 14. Rovnice ve tvaru

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \quad n \neq 0,\ n \neq 1,\ n \in \mathbb{R}.$$

se nazývá *Bernoulliova rovnice*.

Poznámka 15. Při řešení Bernoulliovy rovnice ji nejdříve vydělíme členem y^n (pro n>0 je také $y = 0$ jejím řešením). Zavedením substituce $z = y^{1-n}$ obdržíme LDR 1. řádu

$$z' = (1-n)\left[g(x) - f(x)z\right],$$

kterou již vyřešíme výše uvedeným postupem.

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3}.$$

Řešení. Jedná se o Bernoulliovu rovnici s $n = 3$. Rovnici nejdříve upravíme tak, aby na pravé straně rovnice nebylo žádné y, tj. za předpokladu $y \not\equiv 0$ podělíme výrazem y^3. Pak dostáváme

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} = \frac{1}{x^3}.$$

Nyní zavedeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Potom $z' = -\frac{2y'}{y^3}$, z čehož dostaneme diferenciální rovnici

$$z' = \frac{4z}{x} - \frac{2}{x^3}.$$

Toto je již lineární diferenciální rovnice, jejíž řešením (určeným pomocí některé z metod z Kapitoly I. 3) je funkce

$$z = Cx^4 + \frac{1}{3x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětným dosazením obdržíme obecné řešení původní diferenciální rovnice

$$y^2 = \frac{3x^2}{3Cx^6 + 1}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

což ještě můžeme upravit do tvaru

$$y = \pm \frac{3x}{\sqrt{9Cx^6 + 3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Během výpočtu jsme také vyloučili funkci $y \equiv 0$, která je řešením zadané diferenciální rovnice (jak se lze snadno přesvědčit přímým dosazením). Ovšem toto řešení není zahrnuto v obecném řešení (nelze jej získat žádnou volbou konstanty C), proto všechna řešení zadané diferenciální rovnice jsou

$$y \equiv 0 \quad \text{a} \quad y = \pm \frac{3x}{\sqrt{9Cx^6 + 3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(58) Řešte následující rovnici

$$y' + y = x\sqrt{y}.$$

$$\left[y = 0,\ \sqrt{y} = \left(x - 2 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right),\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(59) Řešte následující rovnici

$$y' + \frac{2y}{x} = -x^4\,\mathrm{e}^x\,y^3.$$

$$\left[y = 0,\ x^4(2\,\mathrm{e}^x + C)y^2 = 1,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(60) Řešte následující rovnici

$$y' - 2xy = 2x^3y^2.$$

$$\left[y = 0,\ y = \left(1 - x^2 + C\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)^{-1},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(61) Řešte následující rovnici

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

$$\left[y = 0,\ y(1 + \ln x + Cx) = 1,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(62) Řešte následující rovnici

$$y' + \frac{xy}{1 - x^2} = x\sqrt{y}.$$

$$\left[y = 0,\ y = \left(C\sqrt[4]{1 - x^2} - \tfrac{1 - x^2}{3}\right)^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(63) Řešte následující rovnici

$$y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2y}.$$

$$\left[y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2-1},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(64) Řešte následující rovnici

$$y' - xy = -y^3\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$$\left[y = 0,\ y^2 = \tfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x+C},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(65) Řešte následující rovnici

$$3x^2y' + xy = y^{-2}.$$

$$\left[y^3 = \tfrac{\ln|x|+C}{x},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(66) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

$$\left[y = 0,\ y = x^4\left(\ln\sqrt{|x|} + C\right)^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(67) Řešte následující rovnici

$$y\,\mathrm{d}y = \left(\frac{ay^2}{x^2} + \frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x, \quad a \neq 0.$$

$$\left[y^2 + \tfrac{b}{a} = C\,\mathrm{e}^{-\frac{2a}{x}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(68) Řešte následující rovnici

$$xy' + 2y + x^5y^3\,\mathrm{e}^x = 0.$$

$$\left[y = 0;\ y^{-2} = x^4(2\,\mathrm{e}^x + C),\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(69) Řešte následující rovnici

$$y' - \frac{y}{x} = y^2\sin x.$$

$$\left[y = 0;\ \tfrac{1}{y} = \tfrac{C}{x} + \cos x - \tfrac{\sin x}{x},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

I. 5. Metoda záměny proměnných při řešení diferenciálních rovnic

Poznámka 16. U diferenciálních rovnic 1. řádu, v nichž se proměnná x vyskytuje pouze v první mocnině a hledaná funkce y se vyskytuje v argumentu elementárních funkcí, je možné užít tzv. *metodu záměny proměnných*. Pak hledáme řešení ve tvaru $x(y)$ a rovnici převedeme na některou z těch, jejíž řešení umíme explicitně určit.

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y\,\mathrm{d}y - (x + y^2 \sin y)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Řešení. Jednoduchou úpravou dostaneme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y}{x + y^2 \sin y},$$

která ovšem neodpovídá žádnému z předchozích typů. Záměnou proměnných dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + y \sin y,$$

což je lineární diferenciální rovnice. S použitím některé z metod z Kapitoly I. 3 dostaneme řešení

$$x = -y \cos y + Cy, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(70) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{1}{2x - y^2}.$$

$$\left[x = \tfrac{y^2}{2} + \tfrac{y}{2} + \tfrac{1}{4} + C\,\mathrm{e}^{2y},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(71) Řešte následující rovnici

$$y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$$

$$\left[x = y \ln y + \tfrac{C}{y},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(72) Řešte následující rovnici

$$y' = \left(\mathrm{e}^{-y} - x\right)^{-1}.$$

$$\left[x = (C + y)\,\mathrm{e}^{-y},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(73) Řešte následující rovnici

$$(x + y)\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x + y \ln y\,\mathrm{d}y.$$

$$\left[x = y \ln y - \tfrac{y \ln^2 y}{2} + Cy,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(74) Řešte následující rovnici

$$x\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)\mathrm{d}y.$$

$$\left[x^2 + y^2(y^2 - C) = 0,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(75) Řešte následující rovnici

$$2y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 2y^3\mathrm{d}y.$$

$$\left[x = \tfrac{2}{7}y^3 + \tfrac{C}{\sqrt{y}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

I. 6. Exaktní diferenciální rovnice

Definice 17. Diferenciální rovnice

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

se nazývá *exaktní diferenciální rovnice*, jestliže platí

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Poznámka 18. Řešením exaktní diferenciální rovnice je ve tvaru

$$F(x,y) = C,$$

kde F je tzv. *kmenová funkce* splňující následující identity

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

z čehož lze postupnou integrací získat řešení. Pro exaktní rovnici s počáteční hodnotou $y(x_0) = y_0$ lze psát

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\mathrm{d}t.$$

Poznámka 19. V některých případech je nutné rovnici $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ vynásobit tzv. *integračním faktorem*, aby byla exaktní. Integrační faktor může být tvaru $m(x)$ nebo $n(y)$, přičemž platí

$$\ln m(x) = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \ln n(y) = \int \frac{N_x - M_y}{M}\,\mathrm{d}y.$$

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y(1+xy)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$$

Řešení. Tuto diferenciální rovnici budeme řešit jako exaktní. Položme proto $M(x,y) = y(1+xy)$ a $N(x,y) = -x$. Snadno se přesvědčíme, že $M(x,y) \neq N(x,y)$, což znamená, že musíme najít vhodný integrační faktor, který nám diferenciální rovnici převede na exaktní. Proto určíme

$$\ln n(y) = \int \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}\mathrm{d}y = -\ln y^2,$$

tj. hledaný integrační faktor je funkce $n(y) = \frac{1}{y^2}$. Vynásobením rovnice tímto výrazem dostaneme

$$\frac{1+xy}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0,$$

která již je exaktní s $M(x,y) = \frac{1}{y} + x$ a $N(x,y) = -\frac{x}{y^2}$. Při hledání integračního faktoru jsme také mohli druhý využít výše uvedený vzorec pro funkci $m(x)$, ale námi zvolený integrační faktor je jednodušší. Určíme tedy kmenovou funkci, tj.

$$F(x,y) = -\int \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{y} + C(x).$$

Zbývá určit funkci $C(x)$. Zderivováním pravé strany a ze vztahu $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ obdržíme

$$C'(x) = x, \qquad \text{tj. } C(x) = \frac{x^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení zadané diferenciální rovnice lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(76) Řešte následující rovnici

$$(y^2 - 1)\mathrm{d}x + (2xy + 3y)\mathrm{d}y = 0.$$

$$\left[xy^2 - x + \tfrac{3}{2}y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(77) Řešte následující rovnici

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0.$$

$$\left[x^2 + y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(78) Řešte následující rovnici

$$\frac{2\,\mathrm{e}^{2y}}{3\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x + 2\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = 0.$$

$$\left[\mathrm{e}^{2y}\sqrt[3]{x^2} = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(79) Řešte následující rovnici

$$(x\cos 2y + 1)\mathrm{d}x - x^2\sin 2y\,\mathrm{d}y = 0.$$

$$\left[y = \tfrac{1}{2}\arccos\tfrac{2C - 2x}{x^2},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(80) Řešte následující rovnici

$$(\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x + 3x^2)\mathrm{d}x = (2 - x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}y.$$

$$\left[C = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x + x^3 - 2y,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(81) Řešte následující rovnici

$$\sin y\,\mathrm{d}x + [(x+1)\cos y - y\sin y]\,\mathrm{d}y = 0.$$

$$\left[C = x\sin x + y\cos y,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(82) Řešte následující rovnici

$$\left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{x} - \frac{2xy}{(y^2+1)^2}\right)\mathrm{d}y = 0.$$

$$\left[C = \tfrac{x}{y^2+1} + \tfrac{y}{x},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(83) Řešte následující rovnici
$$\left(\operatorname{arctg} y + \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x + \frac{x}{1+y^2} \mathrm{d}y = 0.$$
$[C = x \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x,\ C \in \mathbb{R}]$

(84) Řešte následující rovnici
$$(2x \cos^2 y) \mathrm{d}x + (2y - x^2 \sin 2y) \mathrm{d}y = 0.$$
$\left[y^2 + x^2 \cos^2 y = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$

(85) Pomocí integračního faktoru řešte následující rovnici
$$(x^2 - 3y^2) \mathrm{d}x + 2xy \, \mathrm{d}y = 0.$$
$\left[y^2 = Cx^3 + x^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$

(86) Pomocí integračního faktoru řešte následující rovnici
$$2xy \ln y \, \mathrm{d}x + \left(x^2 + y^2 \sqrt{y^2+1}\right) \mathrm{d}y = 0.$$
$\left[C = x^2 \ln y + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2},\ C \in \mathbb{R}\right]$

(87) Pomocí integračního faktoru řešte následující rovnici
$$\left(\frac{6y}{x} - 6y^2\right) \mathrm{d}x + (3 - 4xy) \, \mathrm{d}y = 0.$$
$\left[C = 3x^2 y - 2x^3 y^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$

(88) Pomocí integračního faktoru řešte následující rovnici
$$y \, \mathrm{d}x + \left(2xy - \mathrm{e}^{-2y}\right) \mathrm{d}y = 0.$$
$\left[C = x \, \mathrm{e}^{2y} - \ln |y|,\ C \in \mathbb{R}\right]$

I. 7. Clairautova diferenciální rovnice

Definice 20. Diferenciální rovnice ve tvaru
$$y = xy' + g(y')$$
se nazývá *Clairautova diferenciální rovnice*.

Poznámka 21. Při řešení nejdříve zavedeme substituci $y' = p$. Derivování podle x získáme
$$0 = \left(x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$
Pokud $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$, $C \in \mathbb{R}$, tedy obecné řešení je tvaru
$$y = Cx + g(C).$$

Pokud $x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} = 0$, obdržíme parametrické řešení

$$x = -g'(p) \quad \& \quad y = -pg'(p) + g(p).$$

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y = xy' + 2 + (y')^3$$

Řešení. Ze zadání je snadno vidět, že se jedná o Clairautovu diferenciální rovnici. Zavedeme proto substituci $y' = p$. Zderivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = xp' + p + 3p^2p'$$

což po úpravě dává

$$0 = \left(x + 3p^2\right) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Mohou tedy nastat dvě možnosti:

- buď $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, pak $p = C$ pro $C \in \mathbb{R}$ a máme obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$y = Cx + 2 + C^3, \qquad C \in \mathbb{R},$$

- nebo $x + 3p^2 = 0$, což dává další řešení, které je vyjádřené parametricky jako

$$x = -3p^2, \quad y = xp + 2 + p^3.$$

  Pokud se pokusíme vyloučit parametr (u Clairautových diferenciálních rovnic to je obvykle relativně snadné) dostaneme toto řešení explicitně

$$y = 2 + \frac{2}{9}x\sqrt{-3x}.$$

(89) Řešte následující rovnici

$$y = xy' + (y')^2.$$

$$\left[y = -\tfrac{x^2}{4},\ y = Cx + C^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(90) Řešte následující rovnici

$$y = xy' + \sin y'.$$

$$\left[y = (\pi - \arccos x)x + \sqrt{1 - x^2},\ y = Cx + \sin C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(91) Řešte následující rovnici

$$xy' - y = \ln y'.$$

$$[y = 1 + \ln x,\ y = Cx - \ln C,\ C > 0]$$

(92) Řešte následující rovnici

$$y = xy' + \frac{1}{2y'}.$$

$$[y^2 = 2x,\ y = Cx + \tfrac{1}{2C},\ C \in \mathbb{R}]$$

(93) Řešte následující rovnici

$$y = xy' + y' + \mathrm{e}^{y'}.$$

$$\left[y = (x+1)\ln(-1-x) - x - 1,\ y = Cx + C + \mathrm{e}^{C},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(94) Řešte následující rovnici

$$y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

$$\left[y = xC - a\sqrt{1+C^2},\ y = -\sqrt{a^2 - x^2},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(95) Řešte následující rovnici

$$y = xy' - 3y'^3.$$

$$\left[y = xC - 3C^3,\ y = \pm\tfrac{2}{9}x^{\frac{3}{2}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

I. 8. Lagrangeova diferenciální rovnice

Definice 22. *Lagrangeova diferenciální rovnice* (nebo též *d'Alembertova diferenciální rovnice*, případně *Lagrangeova–d'Alembertova diferenciální rovnice*) je diferenciální rovnice ve tvaru

$$y = f(y')x + g(y').$$

Poznámka 23. Při řešení nejdříve zavedeme substituci $y' = p$. Derivování podle x získáme

$$p = f(p) + \left[xf'(p) + g'(p)\right]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad \text{tj.} \quad p - f(p) = \left[xf'(p) + g'(p)\right]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Pokud $x \neq f(p)$, pak

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

je LDR 1. řádu. Řešení Lagrangeovy rovnice je potom popsáno parametricky rovnicemi

$$x = \varphi(p), \quad y = f(p)\varphi(p) + g(p).$$

Pokud pro nějaké hodnoty p_0 platí $p_0 = f(p_0)$, je funkce $y = xf(p_0) + g(p_0)$ také řešením Lagrangeovy rovnice.

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y = 2xy' - (y')^3$$

Řešení. Jedná se o Lagrangeovu diferenciální rovnici, proto zavedeme substituci $y' = p$ a derivováním obou stran rovnice dostaneme

$$p = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - 3p^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}.$$

Kterou za předpokladu $p \not\equiv 0$ můžeme přepsat jako lineární diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2x}{p} = 3p^3,$$

jejímž řešením bude funkce x v proměnné p. Řešením této lineární rovnice je funkce

$$x = \frac{3}{4}p^2 + \frac{C}{p^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pokud toto vyjádření dosadíme do vztahu $y = 2xp - p^3$, dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice vyjádřené parametricky

$$x = \frac{3}{4}p^2 + \frac{C}{p^2} \quad \& \quad y = \frac{p^3}{2} + \frac{2C}{p}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Volba $p \equiv 0$ odpovídá $y = C$, což po dosazení do zadání dává, že nutně $C = 0$. Máme tedy ještě partikulární řešení $y \equiv 0$, které není zahrnuto do obecného řešení. Poznamenejme ještě, že tentokrát již není tak snadné vyloučit parametr p. Nicméně to možné je (ale potřebná metoda značně překračuje rámec tohoto textu) a obecné řešení lze vyjádřit v implicitní podobě

$$(27y^2 - 16x^3)y^2 + 16x(9y^2 - 4x^3)C - 128x^2C^2 - 64C^3 = 0.$$

(96) Řešte následující rovnici

$$y = x(y')^2 + (y')^3.$$

$$\left[y = 0,\ y = x + 1,\ x = \frac{\frac{3p^2}{2} - p^3 + C}{(1-p)^2} \ \& \ y = \frac{p^2}{(1-p)^2}\left(C + p - \frac{p^2}{2}\right),\ C \in \mathbb{R} \right]$$

(97) Řešte následující rovnici

$$y = x(1 + y') + (y')^2.$$

$$\left[x = -2p + 2 + C\,\mathrm{e}^{-p} \ \& \ y = C\,\mathrm{e}^{-p}(1 + p) + 2 - p^2,\ C \in \mathbb{R} \right]$$

(98) Řešte následující rovnici

$$y = 2xy' + \ln y'.$$

$$\left[x = -\frac{1}{p} + \frac{C}{p^2} \ \& \ y = -2 + \frac{2C}{p} + \ln p,\ C \in \mathbb{R} \right]$$

(99) Řešte následující rovnici

$$y - (y')^2(x + 1) = 0.$$

$$\left[y = 0,\ x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1 \ \& \ y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2},\ C \in \mathbb{R} \right]$$

(100) Řešte následující rovnici

$$yy' = 2x(y')^2 + 1.$$

$$\left[x = \frac{\ln|p| + C}{p^2} \ \& \ y = 2\frac{\ln|p| + C}{p} + \frac{1}{p},\ C \in \mathbb{R} \right]$$

(101) Řešte následující rovnici

$$2y(y'+2) = xy'^2.$$

$$\left[x = (p+2)C \;\&\; y = \tfrac{Cp^2}{2},\; C \in \mathbb{R}\right]$$

(102) Řešte následující rovnici

$$y + xy'^3 + \sqrt{1+y'^2} = 0.$$

$$\left[x = \tfrac{C-p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \;\&\; y = \tfrac{(p-C)p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{1+p^2},\; C \in \mathbb{R}\right]$$

(103) Řešte následující rovnici

$$y = 2xy' - y'^2.$$

$$\left[x = \tfrac{2}{3}p + \tfrac{C}{p^2} \;\&\; y = \tfrac{2C}{p} + \tfrac{p^2}{3},\; C \in \mathbb{R}\right]$$

I. 9. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice 24. *Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu* má tvar

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x).$$

Pokud $f(x) \equiv 0$ je rovnice *homogenní*, v opačném případě je rovnice *nehomogenní*.

Poznámka 25. Nejdříve musíme učit řešení homogenní části. K tomu potřebujeme spočítat kořeny *charakteristického polynomu*

$$\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + a_2\, \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Každému k-násobnému reálnému kořenu odpovídá k partikulárních řešení ve tvaru

$$e^{\lambda x},\; x\, e^{\lambda x},\; \ldots,\; x^{k-1}\, e^{\lambda x}.$$

Každé k-násobné dvojici komplexních kořenů $\lambda = \alpha + i\beta$ odpovídá k dvojic partikulárních řešení ve tvaru

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\; x\, e^{\alpha x}\cos\beta x,\; \ldots,\; x^{k-1}\, e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\; x\, e^{\alpha x}\sin\beta x,\; \ldots,\; x^{k-1}\, e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Řešení homogenní rovnice je potom součtem jednotlivých partikulárních řešení, tj.

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

kde $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Řešení nehomogenní rovnice můžeme získat pomocí *metody variace konstant*. Toto řešení je potom tvaru

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x),$$

kde $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ jsou řešení systému

$$
\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0,\\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots\\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x).
\end{aligned}
$$

Pokud je pravá strana ve tvaru tzv. *kvazipolynomu* lze použít i jednodušší postup. V takovém případě je řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + y_p,$$

kde y_p získáme v závislosti na tvaru $f(x)$.

i) Pro nehomogenní část
$$f(x) = Q_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$
kde $Q_m(x)$ je polynom m-tého stupně, platí
$$y_p = x^k\widetilde{Q}_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$
kde k je násobnost čísla α coby kořene charakteristického polynomu a $\widetilde{Q}_m(x)$ je polynom nejvýše stupně m.

ii) Pro nehomogenní část
$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$
kde $P_m(x)$ je polynom stupně m a $Q_n(x)$ je polynom stupně n, platí
$$y_p = x^k\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_r(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_r(x)\sin\beta x\right),$$
kde k je násobnost čísla $\alpha + i\beta$ coby kořene charakteristického polynomu a $\widetilde{P}_r(x)$, $\widetilde{Q}_r(x)$ jsou polynomy nejvýše stupně r, kde $r = \max\{m, n\}$.

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}.$$

Řešení. Charakteristický polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = 1$. Proto řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice je funkce

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2x\,\mathrm{e}^x.$$

Protože pravá strana není ve tvaru kvazipolynomu, je nutné použít metodu variace konstant. Tím dostaneme soustavu

$$
\begin{aligned}
C_1'\,\mathrm{e}^x + C_2'x\,\mathrm{e}^x &= 0,\\
C_1'\,\mathrm{e}^x + C_2'(x + x\,\mathrm{e}^x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

Z této rovnice musíme vyjádřit neznámé C_1' a C_2'. K tomu je možné použít známé Cramerovo pravidlo, proto určíme následující determinanty (písmeno W napovídá, že se jedná o tzv. Wronskián)

$$W = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = -\frac{x\,\mathrm{e}^{2x}}{x^2+1},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ 0 & \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2+1}.$$

Pak dostáváme

$$C_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením těchto výrazů do $y_H(x)$ nalezneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2 x\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \ln(x^2+1) + x\,\mathrm{e}^x \operatorname{arctg}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = \mathrm{e}^x + 10\cos 3x.$$

Řešení. Charakteristický polynom je v tomto případě $\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 9$, jehož kořeny jsou čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \pm 3i$. Proto řešení přidružené homogenní rovnice je

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\cos 3x + C_3 \sin 3x.$$

Nehomogenní část je součtem dvou kvazipolynomů, proto můžeme najít příslušná dvě partikulární řešení pomocí metody neurčitých koeficientů. Nejdříve pro funkci e^x, jíž odpovídající partikulární řešení bude $y_{p_1}(x) = A\,\mathrm{e}^x$. Protože

$$y_{p_1}(x) = y_{p_1}'(x) = y_{p_1}''(x) = y_{p_1}'''(x) = A\,\mathrm{e}^x$$

dostaneme po dosazení do zadané rovnice s pravou stranou pouze s funkcí e^x vztah

$$20A\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \quad \text{což znamená } A = \frac{1}{20}.$$

Nyní uvažujme pravou stranu pouze ve tvaru $10\cos 3x$. Protože číslo $3i$ je kořenem charakteristického polynomu, bude příslušné partikulární řešení mít tvar

$$y_{p_2}(x) = x(B\cos 3x + C\sin 3x).$$

Po spočítání jednotlivých derivací $y_{p_2}'(x), y_{p_2}''(x), y_{p_2}'''(x)$ a jejich dosazení do zadané rovnice s pravou stranou rovnou pouze $10\cos 3x$ dostaneme rovnici

$$-18B\cos 3x - 18C\sin 3x - 6B\sin 3x + 6C\cos 3x = 10\cos 3x.$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u výrazů $\cos 3x$ a $\sin 3x$ dostaneme soustavu

$$-18B + 6C = 10, \quad -18C - 6B = 0,$$

jejímž řešením je dvojice $B = -\frac{1}{2}$ a $C = \frac{1}{6}$. Celkem tedy dostáváme, že řešením zadané diferenciální rovnice je funkce

$$y(x) = C_1 \,\mathrm{e}^{-x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + \frac{1}{20}\,\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2} x \cos 3x + \frac{1}{6} x \sin 3x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

(104) Řešte následující rovnici

$$\frac{y^{(4)}}{16} = y.$$

$$\left[y = C_1 \,\mathrm{e}^{2x} + C_2 \,\mathrm{e}^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\right]$$

(105) Řešte následující rovnici

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

$$\left[y = C_1 \,\mathrm{e}^{x} + C_2 \,\mathrm{e}^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(106) Řešte následující rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

$$\left[y = C_1 \,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x \,\mathrm{e}^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(107) Řešte následující rovnici

$$y'' - 4y' + 29y = 0.$$

$$\left[y = C_1 \,\mathrm{e}^{2x} \cos 5x + C_2 \,\mathrm{e}^{2x} \sin 5x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(108) Řešte následující rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = x^2.$$

$$\left[y = C_1 \,\mathrm{e}^{2x} + C_2 \,\mathrm{e}^{x} + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{7}{4},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(109) Řešte následující rovnici

$$y'' - y = x^3.$$

$$\left[y = C_1 \,\mathrm{e}^{x} + C_2 \,\mathrm{e}^{-x} - x^3 - 6x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(110) Řešte následující rovnici

$$y'' + 9y = 18x^2 - 3x - 5.$$

$$\left[y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 2x^2 - \tfrac{x}{3} - 1,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(111) Řešte následující rovnici

$$y'' - 8y' + 16y = P(x),$$

kde $P(x) =$ $a)$ 32, $b)$ $12x - 3$, $c)$ $-x^2 + 2x + 5$.

$$\left[a)\ y = C_1 \,\mathrm{e}^{4x} + C_2 x \,\mathrm{e}^{4x} + 2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

$\left[b\right) y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 x \mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{16},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$

$\left[c\right) y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 x \mathrm{e}^{4x} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{16} + \frac{45}{128},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$

(112) Řešte následující rovnici

$$y''' - 5y'' - 8y' + 48y = 0.$$

$\left[y = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 x \mathrm{e}^{4x} + C_3 \mathrm{e}^{-3x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\right]$

(113) Řešte následující rovnici

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

$\left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\right]$

(114) Řešte následující rovnici

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

$\left[y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} + C_3 \mathrm{e}^{2x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\right]$

(115) Řešte následující rovnici

$$y^{(6)} + 2y^{(5)} + 4y^{(4)} + 4y''' + 5y'' + 2y' + 2y = 0.$$

$\left[y = (C_1 + C_3 x + C_5 \mathrm{e}^{-x}) \cos x + (C_2 + C_4 x + C_6 \mathrm{e}^{-x}) \sin x,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, 6\right]$

(116) Řešte následující rovnici

$$y'' + 3y' + 2y = (20x + 29)\,\mathrm{e}^{3x}.$$

$\left[y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} + (x+1)\,\mathrm{e}^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$

(117) Řešte následující rovnici

$$y'' - 2y' + 5y = 5\,\mathrm{e}^{2x} \sin x.$$

$\left[y = C_1 \mathrm{e}^{x} \cos 2x + C_2 \mathrm{e}^{x} \sin 2x + \mathrm{e}^{2x}\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$

(118) Řešte následující rovnici

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} = 8x - 12.$$

$\left[y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \mathrm{e}^{2x} + C_5 \mathrm{e}^{x} + \frac{x^4}{6},\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}\right]$

(119) Řešte následující rovnici

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 25 \cos 2x.$$

$\left[y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x\right) + 8 \sin 2x - 6 \cos 2x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$

(120) Řešte následující rovnici

$$y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$\left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2 + \sin x \ln \sqrt{\left|\tfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(121) Řešte následující rovnici

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$$

$$\left[y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \tfrac{1}{2} x \cos 2x + \tfrac{1}{4} \sin 2x \ln|\sin 2x|,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(122) Řešte následující rovnici

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

$$\left[y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x + x \mathrm{e}^x (\ln|x| - 1),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(123) Řešte následující rovnici

$$y'' + y' = x^2 - x + 6 \mathrm{e}^{2x}.$$

$$\left[y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{3} x^3 - \tfrac{3}{2} x^2 + 3x + \mathrm{e}^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(124) Řešte následující rovnici

$$y'' + 2y' + 2y = 3 \mathrm{e}^{-x} \cos x.$$

$$\left[y = \mathrm{e}^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \tfrac{3}{2} x \mathrm{e}^{-x} \sin x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(125) Řešte následující rovnici

$$y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x.$$

$$\left[y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-x} + C_3 x \mathrm{e}^{-x} + \tfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \tfrac{1}{2} \sin x,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\right]$$

(126) Řešte následující rovnici

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 8(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + 4(\sin x + \cos x).$$

$$\left[y = (C_1 + C_2 x) \mathrm{e}^x + (C_3 + C_4 x) \mathrm{e}^{-x} + x^2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \cos x + \sin x,\ C_1, \dots, C_4 \in \mathbb{R}\right]$$

(127) Řešte následující rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x} \ln x.$$

$$\left[y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 x \mathrm{e}^{-2x} + \tfrac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-2x} \ln x - \tfrac{3}{4} x^2 \mathrm{e}^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$$

(128) Těleso o hmotnosti 100 g natáhne pružinu o 5 cm. Toto těleso je vypuštěno rychlostí 10 cm/s z rovnovážného bodu. Pokud zanedbáme odpor vzduch, jaká je jeho poloha v čase t? Za jakou dobu se vrátí do rovnovážného bodu?

$$\left[y(t) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t,\ t_0 = \tfrac{\pi}{10\sqrt{2}}\right]$$

(129) Těleso o hmotnosti 1/2 kg natáhne pružinu o 5 cm. Těleso je stlačeno nahoru o 2 cm nad rovnovážný bod a vypuštěno rychlostí 60 cm/s, přičemž zanedbáváme odpor vzduchu. Určete polohu tělesa v čase t.

$$\left[y(t) = \sqrt{22}\sin\left(10\sqrt{2}t + 0.44\right)\right]$$

(130) Těleso o hmotnosti 2 kg natáhne pružinu o 0.5 m. Pro stlačení o 0.7 m je potřebná síla 25.6 N. Na těleso působí odpor $\gamma = 40$. Určete pozici tělesa v čase t, je-li vypuštěno z rovnovážného bodu s počátečním impulsem 0.6 m/s.

$$\left[y(t) = \tfrac{1}{20}\left(e^{-4t} - e^{-16t}\right)\right]$$

(131) Těleso o hmotnosti 3 kg natáhne pružinu o 400 mm, přičemž zanedbáváme tlumení. Na systém působí síla $F(t) = 10\cos\omega_0 t$ (systém rezonuje). Těleso je na počátku stlačeno o 20 cm a je mu dána počáteční rychlost 10 cm/s. Určete jeho pozici v čase t.

$$\left[y(t) = 0.200999\sin(5t + 4.812065) + \tfrac{1}{3}t\sin 5t\right]$$

(132) Těleso o hmotnosti 3 kg natáhne pružinu o 400 mm. Uvažujme odpor 45 N při rychlosti 50 cm/s. Na systém působí síla $F(t) = 10\cos\omega_0 t$ (systém rezonuje). Těleso je na počátku stlačeno o 20 cm a je mu dána počáteční rychlost 10 cm/s. Určete jeho pozici v čase t.

$$\left[y(t) = -0.20645\, e^{(-15+10\sqrt{2})t} + 0.006458\, e^{(-15-10\sqrt{2})t} + \tfrac{1}{45}\sin 5t\right]$$

(133) Těleso o hmotnosti 3.2 kg natáhne pružinu o 2 m. Třecí síla je rovna čtyřnásobku rychlosti. Na systém působí síla $F(t) = 10\cos 3t$. Těleso je na počátku vytaženo o 2 m nad rovnovážný bod a bez počátečního impulsu je vypuštěno. Určete jeho pozici v čase t.

$$\left[y(t) = 1.6871\, e^{-2t}\sin\left(2\sqrt{3}t + 1.3273\right) + \tfrac{70}{139}\cos 3t + \tfrac{120}{193}\sin 3t\right]$$

(134) Těleso o hmotnosti 3.6 kg natáhne pružinu o $\frac{500}{32}$ cm. Neuvažujeme žádný odpor. Na systém působí síla $F(t) = 3.6\sin 8t$. Těleso je na počátku vytaženo o $\frac{100}{128}$ cm nad rovnovážný bod a bez počátečního impulsu je vypuštěno. Určete jeho pozici v čase t. Určete také první čtyři hodnoty t, kdy má těleso nulovou rychlost.

$$\left[y(t) = \tfrac{1}{128}\left(\sin 8t + \cos 8t - 8t\cos 8t\right),\ t_1 = \tfrac{1}{8},\ t_2 = \tfrac{\pi}{8}, t_3 = \tfrac{\pi}{4}, t_4 = \tfrac{3\pi}{8}\right]$$

I. 10. Geometrické aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu

Definice 26. Nechť je dána soustava rovinných čar

$$F(x, y, C) = 0 \tag{7}$$

závislá na jednom parametru C. Protíná-li nějaká jiná rovinná čára všechny čáry uvažované soustavy podle určitého zákona, nazývá se *trajektorie soustavy*. Zvláště důležité jsou *trajektorie izogonální*, které protínají každou čáru pod týmž úhlem $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$. Je-li tento úhel pravý, nazývají se *ortogonální trajektorie*

Poznámka 27. Z rovnice (7) vyjádříme parametr C, čímž získáme rovnici

$$G(x,y) = C.$$

Po výpočtu příslušných parciálních derivací a dosazením do rovnice

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi\right) y' = \frac{\partial G}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial G}{\partial x}$$

získáme diferenciální rovnici, jejímž řešením je soustava izogonálních křivek. Pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií ve tvaru

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} y' = 0.$$

Příklad. Určeme trajektorie, které protínají svazek křivek daných předpisem $y = \ln Cx$ s odchylkou $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

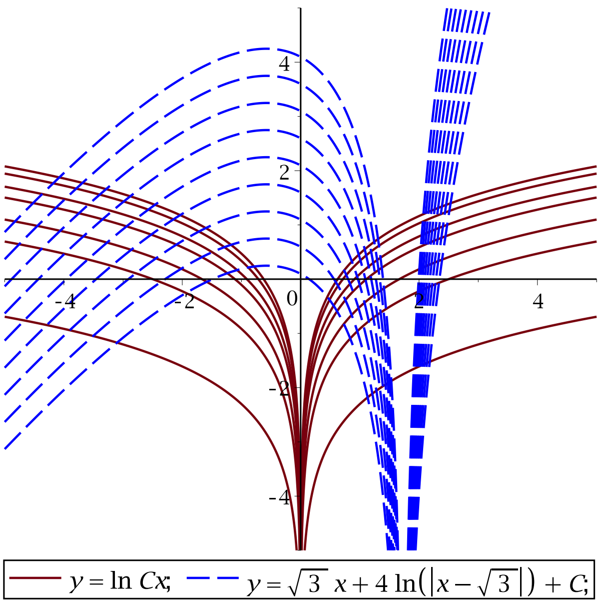
Řešení. Vyjádřením parametru C dostaneme funkci $G(x,y) = \frac{e^y}{x}$. Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme diferenciální rovnici

$$\left(\frac{e^y}{x} - \frac{\sqrt{3}\, e^y}{x^2}\right) y' = \frac{\sqrt{3}\, e^y}{x} + \frac{e^y}{x^2},$$

což po úpravách dává jednoduchou diferenciální rovnici

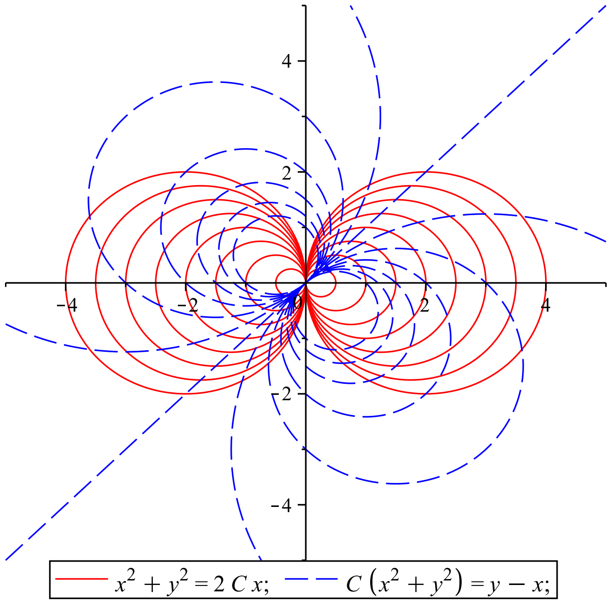
$$y' = \frac{\sqrt{3}x + 1}{x - \sqrt{3}}.$$

Přímým integrováním dostaneme, že hledané izogonální trajektorie jsou tvaru $y = \sqrt{3}x + 4 \ln \left| x - \sqrt{3} \right| + C$ pro $C \in \mathbb{R}$. Zadaný svazek křivek i ortogonální trajektorie jsou zobrazeny na obrázku níže.



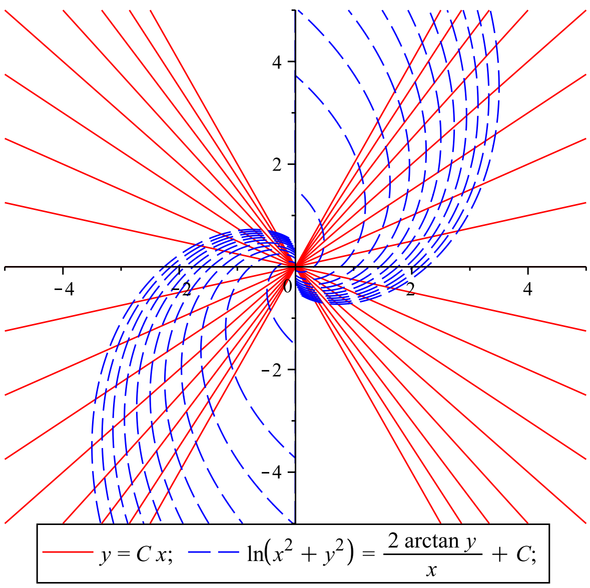
(135) Určete trajektorie, které protínají svazek kružnic $x^2 + y^2 = 2Cx$ s odchylkou $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$\left[C(y^2 + x^2) - y + x = 0,\ C \in \mathbb{R}\right]$$



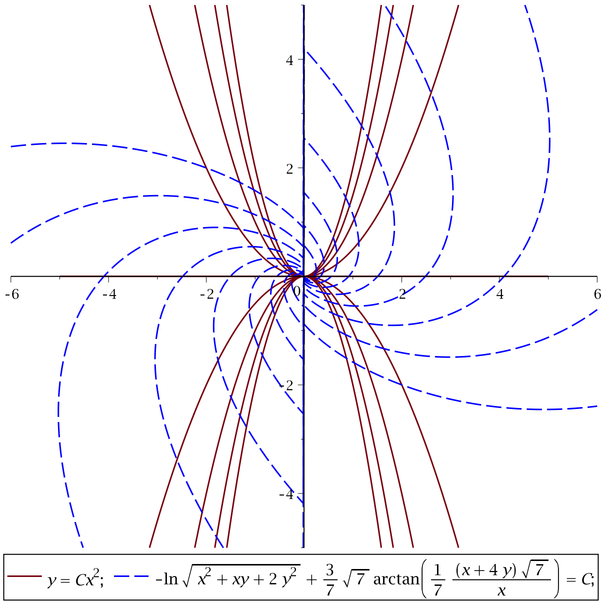
(136) Určete izogonální trajektorie pro soustavu křivek $y = Cx$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$\left[x^2 + y^2 = C\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}},\ C > 0\right]$$



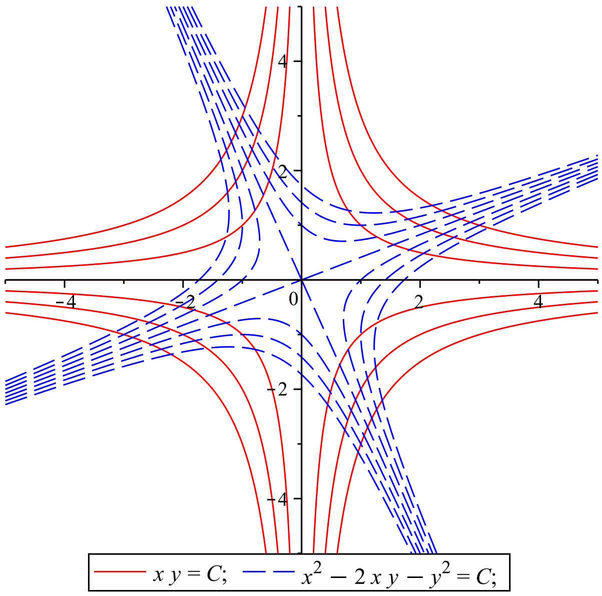
(137) Určete izogonální trajektorie pro soustavu křivek $y = Cx^2$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$\left[-\ln\sqrt{x^2+xy+2y^2}+\frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+4y}{\sqrt{7}x}=C,\ C\in\mathbb{R}\right]$$



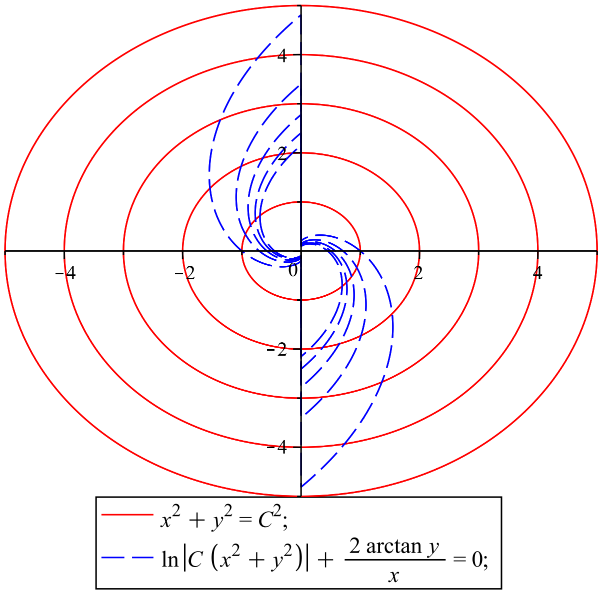
(138) Určete izogonální trajektorie pro soustavu hyperbol $xy = C$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$\left[x^2-2xy-y^2=C,\ C\in\mathbb{R}\right]$$



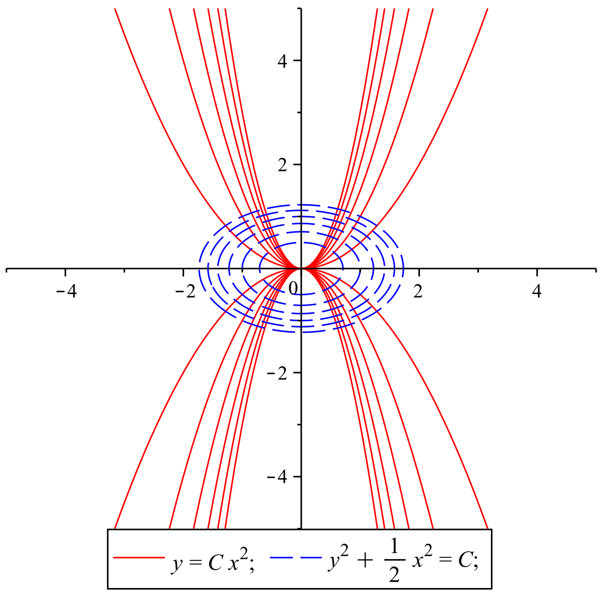
(139) Určete izogonální trajektorie pro soustavu křivek $x^2 + y^2 = C^2$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$\left[\ln\left|C(x^2+y^2)\right| + 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right]$



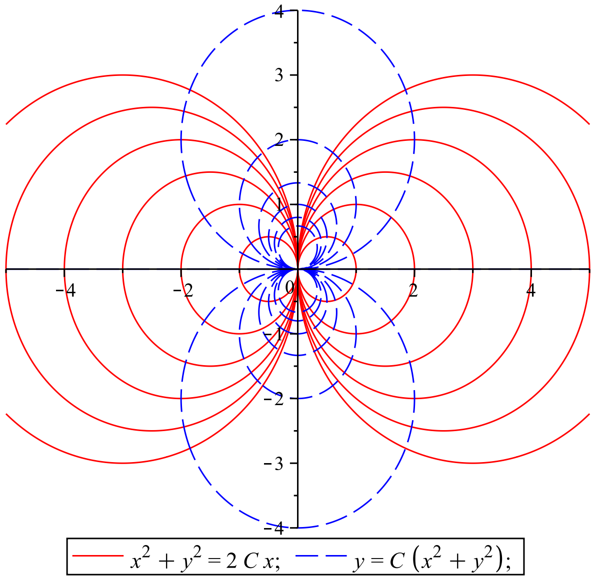
(140) Určete ortogonální trajektorie pro soustavu parabol $y = Cx^2$.

$\left[y^2 + \frac{x^2}{2} = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$



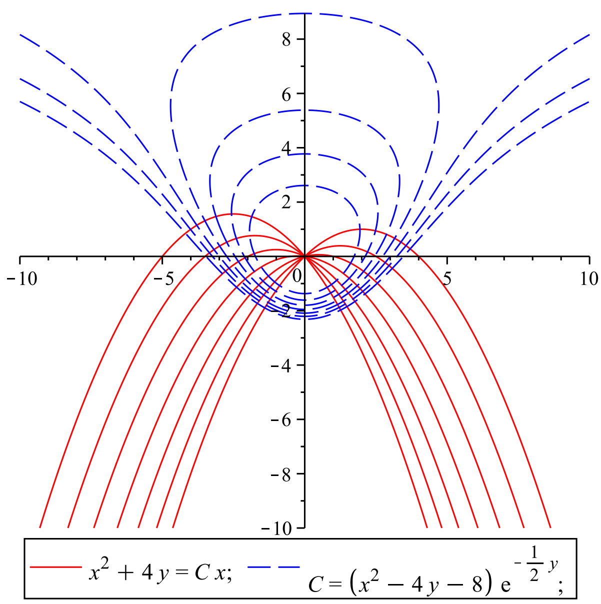
(141) Určete ortogonální trajektorie pro soustavu křivek $x^2 + y^2 = 2Cx$.

$$\left[C(x^2 + y^2) - y = 0,\ C \in \mathbb{R}\right]$$



(142) Určete ortogonální trajektorie pro soustavu křivek $x^2 + 4y = Cx$.

$$\left[C = (x^2 - 4y - 8)\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$



II. Metrické prostory

Definice 28. *Metrickým prostorem* nazýváme dvojici (P, ρ), kde P je libovolná neprázdná množina a zobrazení $\rho : P \times P \to \mathbb{R}_+$ splňuje pro každé $x, y, z \in P$ následující tři axiomy:

i) $\rho(x, y) = 0$ právě když $x = y$ (tzv. axiom totožnosti);
ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (tzv. axiom symetrie);
iii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (tzv. trojúhelníková nerovnost).

Zobrazení ρ nazýváme *metrikou* na P, prvky množiny P obvykle nazýváme *body* prostoru (P, ρ) číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdáleností* bodů x, y v prostoru (P, ρ).

Poznámka 29. Pro $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $y = [y_1, \ldots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ definujeme metriky:

$$\rho_1(x, y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad \textit{součtová metrika},$$

$$\rho_\infty(x, y) := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, \quad \textit{maximální metrika},$$

$$\rho_2(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}, \quad \textit{euklidovská metrika}.$$

Na množině všech reálných funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$ (značíme $\mathrm{C}[a, b]$) definujeme pro $f, g \in \mathrm{C}[a, b]$ následující metriky:

$$\rho_c(f, g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \quad \textit{metrika stejnoměrné konvergence},$$

$$\rho_I(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x, \quad \textit{integrální metrika}.$$

Definice 30. Nechť (P_1, ρ_1) a (P_2, ρ_2) jsou metrické prostory. Zobrazení $f : P_1 \to P_2$ se nazývá *izometrické*, jestliže pro každé $x, y \in P_1$ platí

$$\rho_2\left(f(x), f(y)\right) = \rho_1(x, y).$$

Definice 31. Mějme metrický prostor (P, ρ) a nechť $A \subseteq P$. Množina $\overline{A} := \{x \in P : \rho(x, A) = 0\}$ se nazývá *uzávěr* množiny A. Množina A se nazývá uzavřená, pokud $A = \overline{A}$. Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže její komplement $P \setminus A$ je uzavřená množina.

Definice 32. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů v metrickém prostoru (P, ρ). Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k bodu $x_0 \in P$ (je konvergentní, má limitu x_0) a píšeme $x_n \to x_0$, jestliže

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty,$$

tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, jestliže

$$\rho(x_m, x_n) \to 0 \quad \text{pro } \min\{m, n\} \to \infty,$$

tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n > n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definice 33. Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu (tedy je konvergentní).

Definice 34. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a F je zobrazení prostoru P do sebe, tj. $F : P \to P$. Bod $x_0 \in P$ se nazývá *pevným bodem* zobrazení F, jestliže

$$F(x_0) = x_0.$$

Definice 35. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť $F : P \to Q$. Řekneme, že zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje konstanta $L \in \mathbb{R}_+^0$ (tzv. *Lipschitzova konstanta*) taková, že

$$\sigma\left(F(x), F(y)\right) \leq L\rho(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in P.$$

Jestliže $L < 1$, pak se zobrazení F nazývá *kontrakce* (s konstantou L).

Věta 36. *Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $F : P \to P$ je kontrakce. Pak existuje právě jeden pevný bod zobrazení $F(x)$.*

Věta 37. *Nechť funkce g zobrazuje interval $[a, b]$ do sebe a nechť má na tomto intervalu derivaci. Jestliže existuje číslo $\alpha \in [0, 1)$ tak, že*

$$\left|g'(x)\right| \leq \alpha \quad \forall x \in [a, b],$$

pak v intervalu $[a, b]$ existuje pevný bod ξ funkce $g(\cdot)$ a posloupnost postupných aproximací k němu konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $x_0 \in [a, b]$.

Poznámka 38. Pevný bod je možné získat pomocí *metody postupných aproximací*. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 36. Buď $x_1 \in P$ libovolné a definujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto

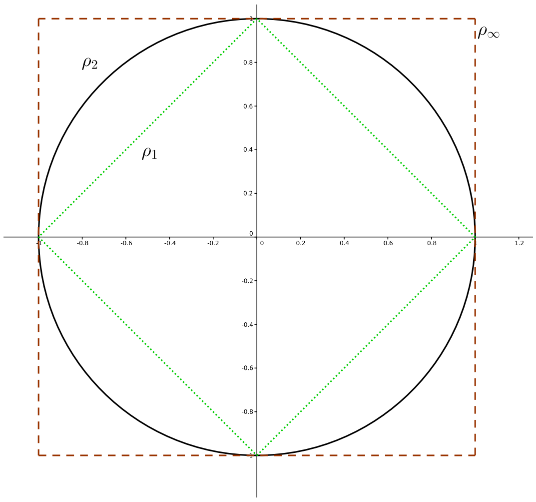
$$x_2 = F(x_1), \quad x_3 = F(x_2), \ldots, x_n = F(x_{n-1}), \ldots$$

Díky předpokladům věty se dá ukázat, že takto definovaná posloupnost konverguje k pevnému bodu zobrazení $F(x)$.

(143) Určete vzdálenost bodů $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ v součtové, euklidovské a maximální metrice.

$$\left[\rho_1(A, B) = 2,\ \rho_2(A, B) = \sqrt{2},\ \rho_\infty(A, B) = 1\right]$$

(144) Popište jednotkovou kružnici v $\mathbb{R}^2$ a jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ v metrikách $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$.



[$\mathbb{R}^3$: v ρ_2 dostaneme „standardní" kouli, v ρ_∞ jde o povrch krychle s vrcholy $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, v ρ_1 se jedná o povrch pravidelného osmistěnu s vrcholy $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,1)$ a $(0,0,1)$]

(145) Určete vzdálenost funkcí $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ v metrice stejnoměrné konvergence a v integrální metrice.

$\left[\rho_c(f,g) = \frac{1}{4},\ \rho_I(f,g) = \frac{1}{6}\right]$

(146) Najděte funkci tvaru $f(x) = ax$, která má v prostoru $C[0,1]$ nejmenší vzdálenost od funkce $g(x) = x^2$ v metrice stejnoměrné konvergence.

$\left[a = 2\sqrt{2} - 2\right]$

(147) Pro $x \in [0,1]$ určete hodnotu a tak, aby funkce $f(x) = ax$ měla nejmenší vzdálenost od funkce $g(x) = x^2$

i) v integrální metrice,
ii) v metrice

$$\rho(f,g) := \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

$\left[\text{i) } a = \sqrt{3}/3,\ \text{ii) } a = 3/4\right]$

(148) Nechť $P = \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda funkce $\rho(x,y) = \ln(1 + |x - y|)$ zadává metriku na $P \times P \to \mathbb{R}$.

[ano]

(149) Nechť $P = \mathbb{C}$. Rozhodněte, zda funkce

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \min\{|x| + |y|,\ |x-1| + |y-1|\}, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

zadává metriku na $P \times P \to \mathbb{R}$.

[ano, tzv. *metrika na železnici se dvěma uzly*]

(150) Nechť $P = \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda funkce $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$ zadává metriku na $P \times P \to \mathbb{R}$.

[ne]

(151) Určete konstantu k tak, aby zobrazení F definované předpisem $F(f(x)) = k\,f(x^3)$ bylo izometrické zobrazení prostoru $\mathrm{C}[-1,1]$ s metrikou

$$\sigma(f,g) = \int_{-1}^{1} x^2\,|f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

(můžete ověřit, že je to skutečně metrika) na prostor $(\mathrm{C}[-1,1], \rho_I)$.

$[k = \pm 3]$

(152) Udejte příklad, kdy sjednocení nekonečného počtu uzavřených množin není uzavřená množina.

$\left[\text{např. } \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0,1)\right]$

(153) Nechť pro $\varphi \in \mathbb{R}$ je

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}; \qquad \rho(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, \quad A, B \in P;$$

$$T_\varphi : P \to \mathbb{R}^2, \quad T_\varphi(A) = [a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, -a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi].$$

Ukažte, že T_φ je izometrické (zachovávající vzdálenost).

$\left[\rho(T_\varphi(A), T_\varphi(B)) = \cdots = \rho(A,B)\right]$

(154) Je $\mathbb{Q}$ úplný prostor?

[není]

(155) Uvažujme metrický prostor (M,ρ), kde $M = \mathbb{R}^2$ a pro $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ je

$$\rho(A,B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{leží-li body na stejné polopřímce z počátku;} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je tento prostor (tzv. *pampeliškový prostor*) úplný?
[Ano. Cauchyovská posloupnost — pouze na stejné polopřímce, nebo do počátku.]

(156) Uvažujme metrický prostor (M,ρ), kde $M = \mathbb{R}$ a

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & |x-y| \in \mathbb{I}; \\ 1/2, & |x-y| \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Je tento prostor úplný?

[Ano. Cauchyovská posloupnost musí být skorostacionární $\Rightarrow$ je konvergentní.]

(157) Metrický prostor (M,ρ) je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\} \subseteq M$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$. (Tzv. sekvenciální kompaktnost.) Nechť

$$M = \ell_2 = \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \right\},$$

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}, \quad x,y \in M.$$

Je tento prostor kompaktní? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, udejte jako protipříklad ohraničenou a uzavřenou posloupnost.

[Posloupnost $\{(1,0,0,\dots),(0,1,0,\dots),(0,0,1,\dots),\dots\}$ je ohraničená a uzavřená, ale nekonverguje a nelze z ní vybrat konvergentní podposloupnost v ℓ_2 (vzdálenost vždy $\sqrt{2}$).]

(158) Určete interval, kde jsou pro funkci $f(x) = \frac{x^2-1}{3}$ splněny předpoklady Banachovy věty o pevném bodu, a metodou postupných aproximací najděte tento bod.

$\left[|x| < \frac{3}{2},\ x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right]$

(159) Pomocí Banachovy věty o pevném bodu a metodou postupných aproximací najděte řešení rovnice

$$e^x - 2x - 1 = 0.$$

$[x \approx 1,256431209]$

(160) S pomocí Banachovy věty o pevném bodu vyřešte Cauchyovu úlohu

$$y' = \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1.$$

$\left[y(x) = e^{x/2}\right]$

III. Diferenciální počet funkcí více proměnných

III. 1. Definiční obor funkcí více proměnných

Definice 39. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných definovaná na M a buď $c \in \mathbb{R}$. Množina

$$f_c := \{[x, y] \in M : \; f(x, y) = c\}$$

se nazývá *vrstevnice funkce f na úrovni c*

Příklad. Určeme definiční obor funkce $f(x, y) = \ln[x \ln(y - x)]$.

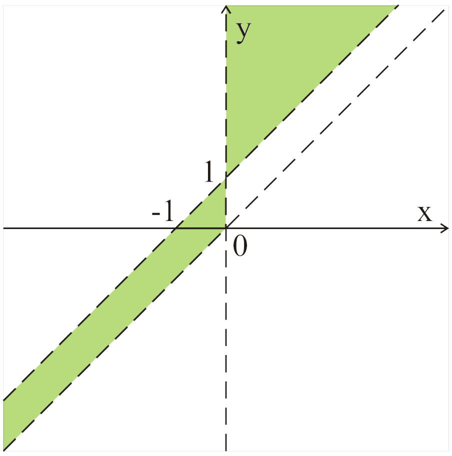
Řešení. Protože definiční obor je množina bodů, ve kterých je funkce definována, budeme postupovat zevnitř funkce a hledat podmínky, které musí body roviny splňovat, aby byly součástí definičního oboru zadané funkce. Vnitřní funkce je $y - x$, která je definována pro všechna x a všechna y. Další na řadě je $\ln(y - x)$. Argument logaritmu musí být kladný, tedy $y - x > 0$. Protože vynásobení proměnnou x žádnou podmínku nepřidá, postoupíme rovnou k vnější funkci, kterou je opět logaritmus, tedy musí platit $x \ln(y - x) > 0$. To znamená, že oba činitelé musí mít stejné znaménko, přičemž nula je vyloučena. Odtud dostáváme

$$(x > 0 \wedge \ln(y - x) > 0) \vee (x < 0 \wedge \ln(y - x) < 0),$$
$$(x > 0 \wedge y - x > 1) \vee (x < 0 \wedge 0 < y - x < 1).$$

Tím máme zjištěny všechny podmínky pro definiční obor dané funkce. Protože tyto podmínky musí být splněny současně (aby se nepokazila žádná složka funkce), uvažujeme jejich průnik. Protože omezení z vnitřního logaritmu jsme uvažovali a zapracovali přímo při řešení logaritmu vnějšího, je definičním oborem množina

$$D(f) = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y - x > 1) \vee (x < 0 \wedge 0 < y - x < 1)\right\}.$$

Nyní můžeme definiční obor znázornit. Připomeňme, že 'a současně' ($\wedge$) znamená pro kreslenou množinu bodů průnik a 'nebo' ($\vee$) pro ni znamená sjednocení. Definiční obor bude mít tedy dvě části. První obsahuje všechny body s kladnou souřadnicí x (první a čtvrtý kvadrant bez osy y), které splňují nerovnici $y - x > 1$ ekvivalentní s nerovnicí $y > x + 1$. Jde tedy o všechny body napravo od osy y a nad přímkou $y = x + 1$ (osa prvního a třetího kvadrantu posunutá o 1 nahoru). Do druhé části patří všechny body roviny mající zápornou první souřadnici a splňující současně (děláme tedy průnik) dvojici nerovnic $y - x > 0$ a $y - x < 1$, nebo ekvivalentně $y > x$ a $y < x + 1$. Tomu odpovídají body, které jsou nad přímkou $y = x$ a zároveň pod přímkou $y = x + 1$. Výsledný obrázek vypadá tedy takto:

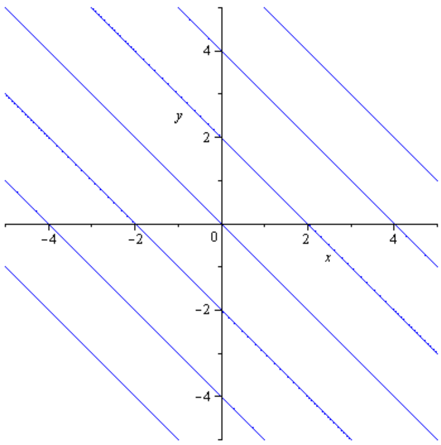


Příklad. Zjistěme tvar vrstevnic funkce $f(x, y) = \frac{x+y}{2}$.

Řešení. Protože vrstevnice spojují body se stejnou funkční hodnotou, dostaneme je tak, že položíme $f(x, y) = c$, kde c je konstanta nabývající hodnoty z oboru hodnot dané funkce (jinde nemá význam vrstevnice dělat). Pro různá c pak dostáváme různé vrstevnice (vždy obdržíme vrstevnici v dané 'výšce', tedy pro danou funkční hodnotu). Pro danou funkci jsou vrstevnice dány rovnicí

$$\frac{x+y}{2} = c \qquad \Rightarrow \qquad y = 2c - x.$$

Jde tedy o přímky rovnoběžné s osou druhého a čtvrtého kvadrantu. Konkrétně např. body s funkční hodnotou 0 leží přímo na této ose $y = -x$, body s funkční hodnotou 1 leží na přímce $y = 2 - x$ apod. Snadno zjištěné vrstevnice načrtneme:



Poznamenejme, že je někdy výhodnější z rovnice vrstevnic y nevyjadřovat. Např. rovnice $x^2 + y^2 = c$ značí kružnici o poloměru $\sqrt{c}$, přičemž z oboru hodnot je vidět, že podmínka $c \geq 0$ je splněna automaticky apod.

(161) Popište definiční obor funkce $f(x,y) = \ln(\frac{x}{2} + 3y)$.

$\Big[$ Polorovina s hraniční přímkou $\frac{x}{2} + 3y = 0$ obsahující bod $[1,1]$, bez této přímky. $\Big]$

(162) Popište definiční obor funkce $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y} - \frac{1}{|y|-|x|}$.

$[D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ (-y < x < y) \vee (-y > x > y)\}]$

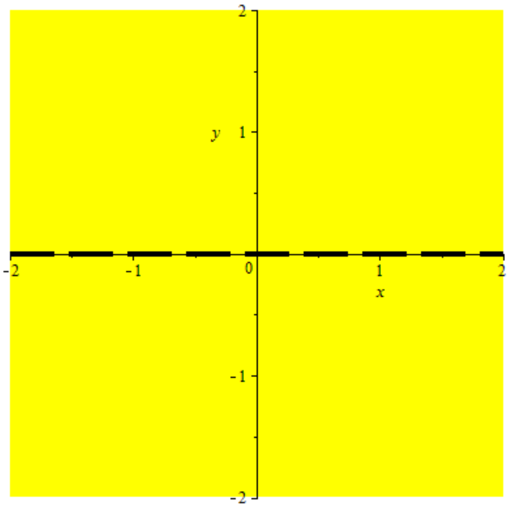
(163) Popište definiční obor funkce $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln z$.

$[D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ [(x \geq 0 \wedge y > 0) \vee (x \leq 0 \wedge y < 0)] \wedge z > 0\}]$

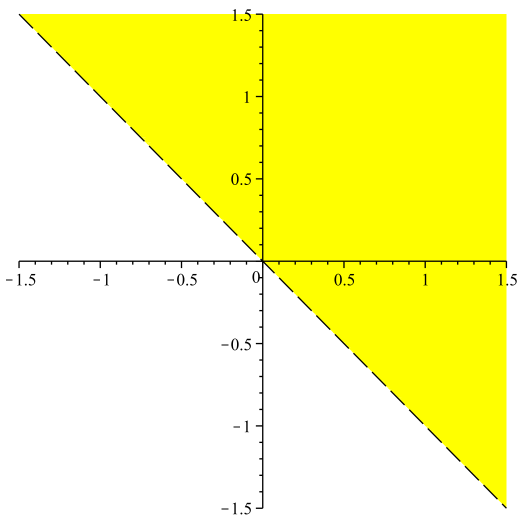
(164) Popište definiční obor funkce $f(x,y,z) = \arcsin \frac{z}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

$[D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0, z \in [-2,2], [y,z] \neq [0,0]\}]$

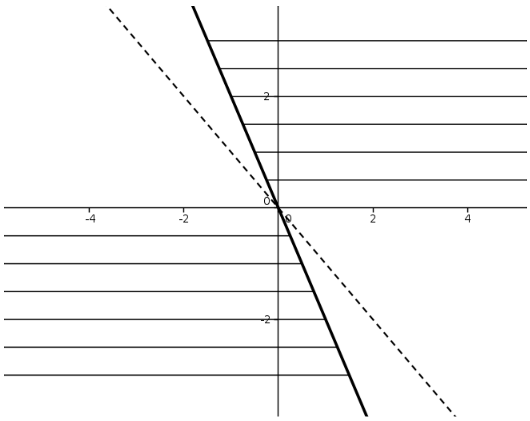
(165) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x}{y}$.



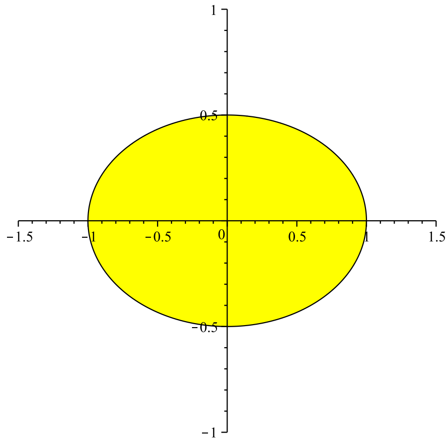
(166) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$.



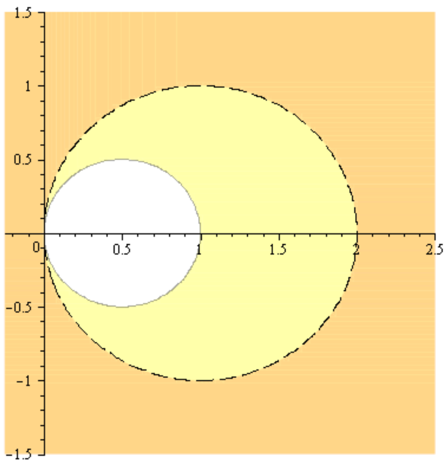
(167) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \arccos \frac{x}{x+y}$.



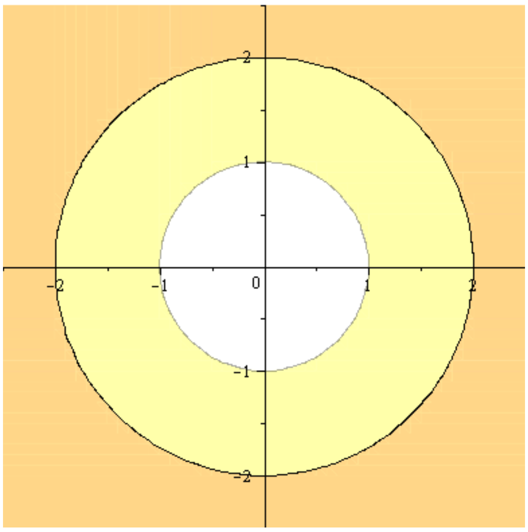
(168) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$.



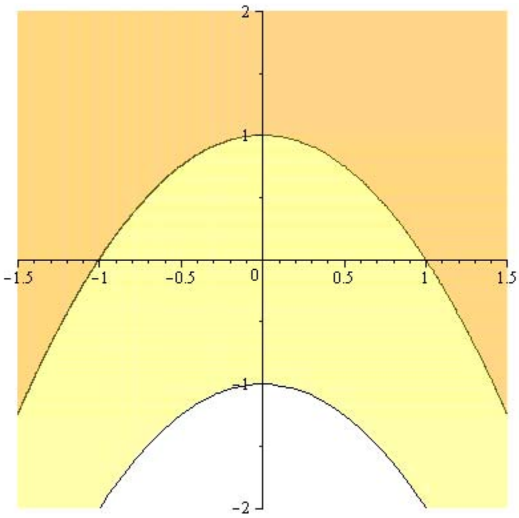
(169) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.



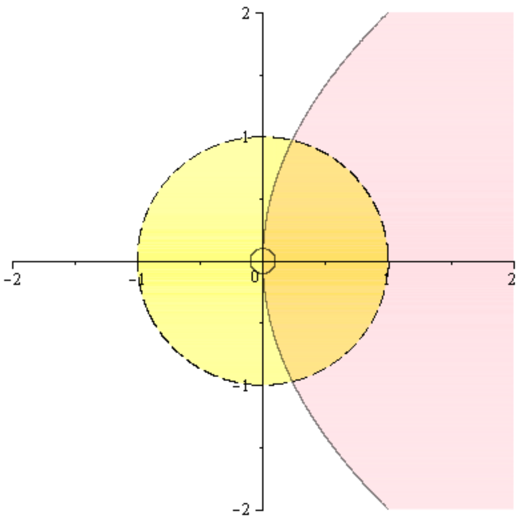
(170) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.



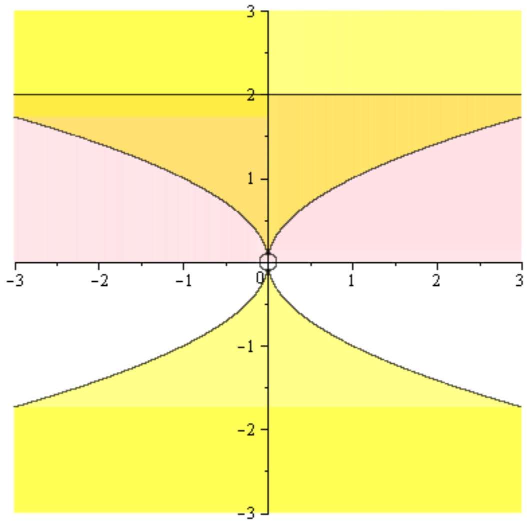
(171) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$.



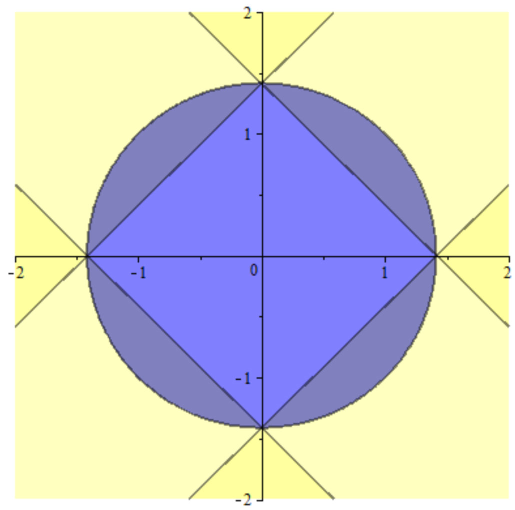
(172) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.



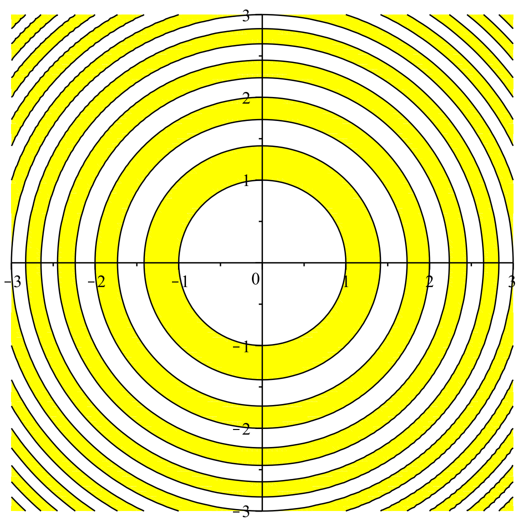
(173) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$.



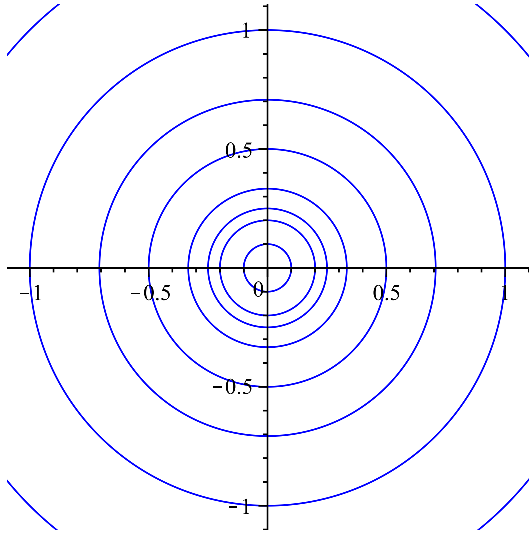
(174) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-1) + \sqrt{|x|+|y|-\sqrt{2}}$.



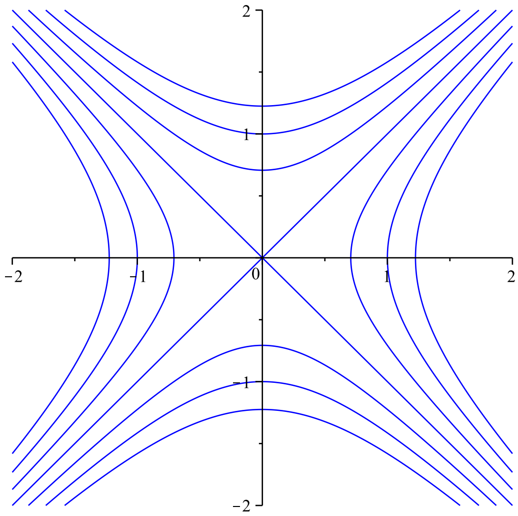
(175) Načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{\sin\left[\pi\left(x^2+y^2\right)\right]}$.



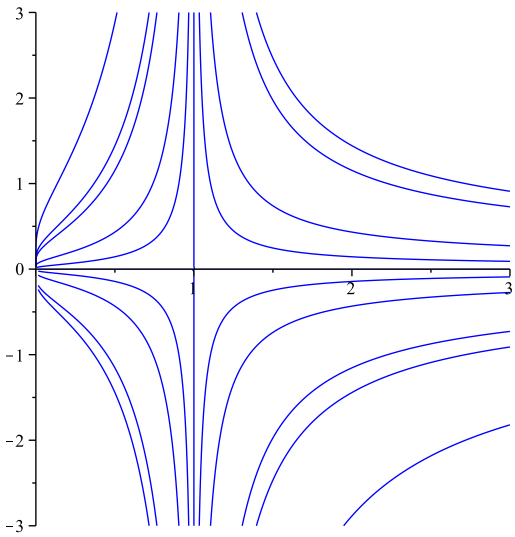
(176) Načrtněte vrstevnice funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$.



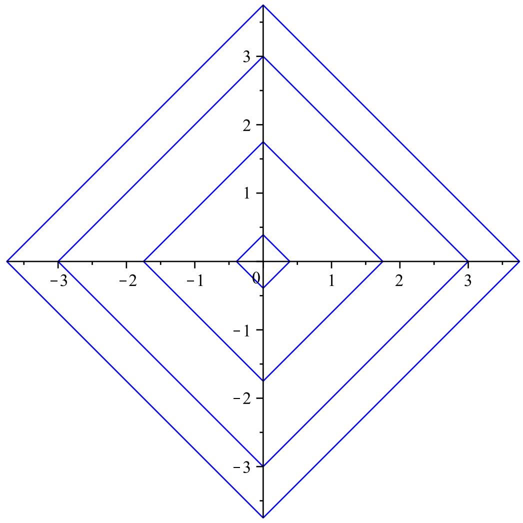
(177) Načrtněte vrstevnice funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$.



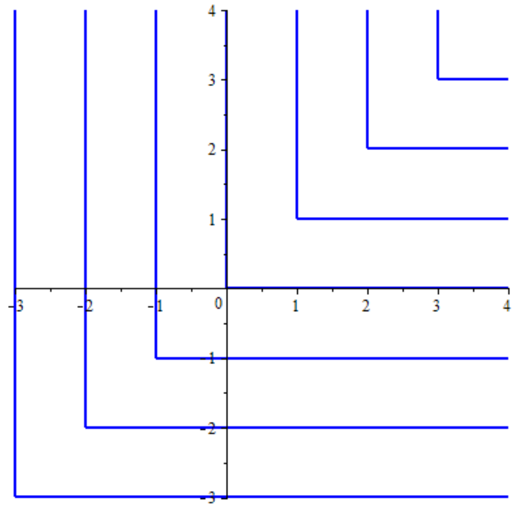
(178) Načrtněte vrstevnice funkce $f(x,y) = x^y$.



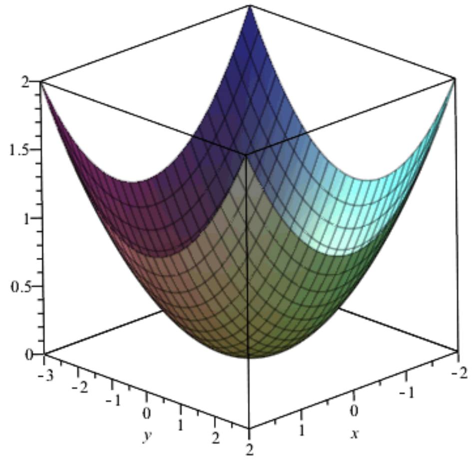
(179) Načrtněte vrstevnice funkce $f(x,y) = \sqrt{4 - |x| - |y|}$.



(180) Načrtněte vrstevnice funkce $f(x,y) = \min(x,y)$.



(181) Pomocí vrstevnic a řezů souřadnými rovinami načrtněte graf pro $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.



III. 2. Limity funkcí více proměnných

Definice 40. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* L, kde $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in (L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Předchozí definice platí pro libovolné n. Pro funkci dvou proměnných lze zformulovat i tzv. $\varepsilon - \delta$ definici.

Definice 41. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $[x, y] \in D(f)$ splňující $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Poznámka 42. Pro výpočet limity funkce dvou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$ lze použít substituci do *polárních souřadnic*, tj.

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \qquad y = y_0 + \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0]$ a $[x, y]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy x. Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ, tak limita funkce neexistuje. O podmínkách pravdivosti opačného směru vypovídá následující věta.

Věta 43. *Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce g taková, že*

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 *a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak platí*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Poznámka 44. Uvažujme dvojnou limitu

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

a dvojnásobné limity

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) = L_{xy} \quad \text{a} \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right) = L_{yx}.$$

Potom

- Z rovnosti postupných limit L_{xy} a L_{yx} *neplyne* existence dvojné limity L dané funkce v bodě (x_0, y_0).
- Existuje-li limita L (i nevlastní), *nemusí existovat* ani limita L_{xy} ani L_{yx}. Ovšem pokud existuje L a také některá z limit L_{xy} nebo L_{yx}, *musí se nutně obě rovnat*.
- Existují-li všechny tři limity, pak nutně $L = L_{xy} = L_{yx}$.

- Určovat limitu L funkce v bodě postupnými limitami L_{xy}, L_{yx} má smysl jen tehdy, je-li předem známa existence L. To je vždy možné, je-li to funkce spojitá v okolí vyšetřovaného bodu. Existují-li L_{xy} a L_{yx}, avšak $L_{xy} \neq L_{yx}$, pak neexistuje limita L (tj. rovnost postupných limit je nutnou podmínkou existence dvojné limity).

Poznámka 45. Limitu funkce tří proměnných v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ lze vypočítat pomocí substituce do *sférických souřadnic*, tj.

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = y_0 + \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = z_0 + \cos \vartheta,$$

kde $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$ (tzv. *sférický poloměr*), $\varphi \in [0, \pi)$ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (tzv. *azimutální úhel*), a ϑ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (tzv. *sférický úhel*). Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ nebo ϑ, tak limita funkce neexistuje. O podmínkách pravdivosti opačného směru vypovídá následující věta.

Věta 46. *Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce g taková, že*

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0 + \rho \cos \varphi \sin \vartheta, y_0 + \rho \sin \varphi \sin \vartheta, z_0 + \cos \vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, pak platí

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)} f(x, y) = L.$$

Věta 47 (O limitě funkce sevřené dvěma funkcemi). *Nechť existují funkce $h(X)$ a $g(X)$ takové, že $h(X) \leq f(X) \leq g(X)$ v nějakém ryzím okolí bodu $X \in \mathbb{R}^n$, a platí*

$$\lim_{X \to X_0} h(X) = \lim_{X \to X_0} g(X) = L.$$

Potom platí

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = L.$$

Věta 48 (O limitě složeného zobrazení I). *Nechť existuje složené zobrazení $f \circ g$, nechť platí $\lim_{X \to X_0} g(X) = B$ a zobrazení f je v bodě B spojité. Potom platí*

$$\lim_{X \to X_0} f\left(g(X)\right) = f(B).$$

Věta 49 (O limitě složeného zobrazení II). *Nechť funkce g je definována v ryzím okolí bodu X_0, $\lim_{X \to X_0} g(X) = B$ a $g(X) \neq B$ pro $X \in \mathcal{O}^*(X_0)$. Je-li funkce f definována v ryzím okolí bodu B a $\lim_{X \to B} f(X) = C$, pak platí*

$$\lim_{X \to X_0} f\left(g(X)\right) = C.$$

Definice 50. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{8}$$

Funkce $f(x, y)$ se nazývá *spojitá na množině* $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže identita (8) platí pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$.

Příklad. Určeme limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

Řešení. Po dosazení zjistíme, že jde o typ $\frac{0}{0}$. (Pozor, pro více než jednu proměnnou nemáme k dispozici l'Hospitalovo pravidlo.) Transformací do polárních souřadnic, kde $[x_0, y_0] = [0, 0]$, ji ale snadno vypočítáme.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\varphi)^3+(\rho\sin\varphi)^3}{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi) = 0.\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme využili faktu, že sinus i kosinus jsou ohraničené funkce. Protože je výsledek nezávislý na φ, limita existuje.

Příklad. Dokažme, že limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

neexistuje.

Řešení. Nejprve se budeme k limitnímu bodu přibližovat po přímkách $y = kx$. Tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^2(x^2+k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Tento výsledek je platný pro každé k, tedy pro přibližování se po libovolné přímce, ovšem nezaručuje existenci limity. Jako další otestujme přibližování po parabolách $y = kx^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Tento výsledek závisí na k a tedy se mění v závislosti na tom, po které parabole se přibližujeme. Proto limita neexistuje.

(182) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(-4,1)} \frac{x+y}{x^2}.$$

$\left[\frac{-3}{16}\right]$

(183) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

[2]

(184) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$\left[\sqrt{2}\right]$

(185) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(\mathrm{e}^2,1)} \frac{\ln x}{y}.$$

[2]

(186) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(-4,-1)} \frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}.$$

[0]

(187) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cos\frac{1}{xy^2}.$$

[0]

(188) Ukažte, že následující limita neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

[neexistuje]

(189) Ukažte, že následující limita neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}.$$

[neexistuje]

(190) Ukažte, že následující limita neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y}.$$

[neexistuje]

(191) Ukažte, že následující limita neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

[neexistuje]

(192) Vypočtěte následující limitu, nebo ukažte, že neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{x^3+y}.$$

[neexistuje]

(193) Vypočtěte následující limitu, nebo ukažte, že neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

[neexistuje]

(194) Vypočtěte následující limitu, nebo ukažte, že neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

[0]

(195) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}.$$

[2]

(196) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}.$$

[0]

(197) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}.$$

[2]

(198) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{1-x^2y^2}.$$

$\left[-\frac{1}{2}\right]$

(199) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

[e]

(200) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}.$$

[1]

(201) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}.$$

$\left[\frac{4}{5}\right]$

(202) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2}.$$

[−4]

(203) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}.$$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

(204) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1}.$$

$\left[\frac{3}{2}\right]$

(205) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}.$$

[1]

(206) Pomocí transformace do sférických souřadnic rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

[neexistuje]

(207) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}.$$

$\left[\frac{1}{16}\right]$

(208) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,-\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}.$$

$[0]$

(209) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}.$$

$[12]$

(210) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}.$$

$[0]$

(211) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

$[0]$

(212) Spočtěte dvojnásobné limity

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{2x^2}\right), \qquad b)\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{2x^2}\right).$$

Existuje limita dvojná?

$\left[a)\,\frac{1}{2}, b)\infty,\right.$ dvojná limita neexistuje$\left.\right]$

(213) Vypočtěte obě dvojnásobné a dvojnou limitu v bodě $[0,0]$ pro funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

$\left[\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right)=0;\ \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right)=0;\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ \text{neexistuje}\right]$

(214) Vypočtěte obě dvojnásobné a dvojnou limitu v bodě $[0,0]$ pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

$\left[\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1;\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1;\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje}\right]$

(215) Vypočtěte obě dvojnásobné a dvojnou limitu v bodě $[0,0]$ pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

$\left[\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ \& } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \text{ neexistují; } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\right]$

(216) Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

$[x = -y]$

(217) Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

$[x = k\pi,\ y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}]$

(218) Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \ln\left|1 - x^2 - y^2\right|.$$

$[x^2 + y^2 = 1]$

(219) Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} - 1}.$$

$[x = 0,\ y = 0]$

(220) Určete body nespojitosti funkce

$$f(x,y) = \frac{x^2+3y}{x^2-3y}.$$

$\left[y = \frac{x^2}{3}\right]$

(221) Rozhodněte, zda je funkce $f(x,y)$ spojitá v bodě $[0,0]$, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

[není]

(222) Rozhodněte, zda je funkce $f(x,y)$ spojitá v bodě $[0,0]$, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

[ano]

III. 3. Derivování funkcí více proměnných

Definice 51. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, příp. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$. Tuto definici lze zapsat jako

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Analogicky, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_y(x_0, y_0)$, příp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

Definice 52. Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ nazýváme tuto derivaci *parciální derivací 2. řádu* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v době $[x_0, y_0]$ nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$

Věta 53 (Schwarzova). *Nechť funkce f má spojité parciální derivace f_{xy} a f_{yx} v bodě $[x_0, y_0]$. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{9}$$

Definice 54. Nechť f je funkce n proměnných, x buď vnitřním bodem $D(f)$ a $u \in \mathbb{V}^n$. Položme $\varphi(t) = f(x + tu)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě 0, nazýváme ji *směrovou derivací* funkce f v bodě x (derivací funkce f ve směru vektoru u) a označujeme $f_u(x)$. To znamená, že

$$f_u(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

Poznámka 55. Směrovou derivaci je možné spočítat i pomocí parciálních derivací prvního řádu. *Gradient* funkce f s n proměnnými v bodě x^* je definován vztahem

$$\operatorname{grad} f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}.$$

Potom pro derivaci ve směru vektoru u platí

$$f_u(x^*) = \langle \operatorname{grad} f(x^*), u \rangle,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je standardní skalární součin.

Definice 56. Rovina v $\mathbb{R}^3$ o rovnici

$$t: \ z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

se nazývá *tečná rovina* ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Poznámka 57. Pokud je $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ a $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ lze *normálu* ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ určit vztahem

$$n: \ f(x_0, y_0) - z = \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Pokud je $f_x(x_0, y_0) = 0$ nebo $f_y(x_0, y_0) = 0$ je nutné normálu vyjádřit parametricky

$$n: \begin{cases} x &= x_0 + f_x(x_0, y_0)t, \\ y &= y_0 + f_y(x_0, y_0)t, \\ z &= z_0 - t. \end{cases}$$

Věta 58. *Nechť funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Označme $u_0 = u(x_0, y_0)$ a $v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $z = f(u, v)$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak složená funkce $z = F(x, y) = f\,(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$ a platí*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Zkráceně lze zapsat jako

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x, \qquad z_y = z_u u_y + z_v v_y$$

nebo také

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Příklad. Pomocí parciálních derivací snadno určíme rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^4 - 2xy$$

v bodě $[1, 2, ?]$.

Řešení. Nejprve je třeba si uvědomit, že graf funkce n proměnných je $n + 1$ rozměrný objekt, protože funkce každé n-tici z definičního oboru přiřazuje funkční hodnotu. Otazník v souřadnicích tečného bodu je tedy funkční hodnota dané funkce pro $[x, y] = [1, 2]$. Tedy

$$f(1, 2) = 1^3 + 2^4 - 4 = 13.$$

Tečný bod má proto souřadnice $[1, 2, 13]$. Pro dosazení do vzorce pro tečnou rovinu potřebujeme ještě znát rychlosti růstu zadané funkce ve směru souřadných os x a y v tečném bodě, tedy hodnoty příslušných parciálních derivací. Připomeňme, že derivujeme-li podle jedné proměnné, ke všem ostatním se chováme jako ke konstantám (omezujeme se na řezy ve směru daném derivovanou proměnnou a každý takový řez je dán konstantní hodnotou ostatních proměnných). Tedy

$$f_x = 3x^2 + 0 - 2y = 3x^2 - 2y, \qquad f_y = 0 + 4y^3 - 2x = 4y^3 - 2x.$$

Pro $[x, y] = [1, 2]$ získáme ihned hodnoty

$$f_x(1, 2) = -1, \qquad f_y(1, 2) = 30.$$

Tím máme všechny informace nutné k použití vzorce pro tečnou rovinu:

$$t: \ z = 13 - 1\,(x - 1) + 30\,(y - 2).$$

Po úpravě získáme rovnici tečné roviny ve tvaru

$$t: \ z = -x + 30y - 46.$$

Příklad. Vyzkoušejme výpočet směrové derivace funkce

$$f(x, y) = xy \ln y$$

v bodě $[1, \mathrm{e}]$ ve směru vektoru $u = (2, -1)$ podle definice a pomocí gradientu.

Řešení. Podle definice nejprve z bodu a vektoru získáme

$$x = 1 + 2t, \qquad y = \mathrm{e} - t,$$

tedy

$$\varphi(t) = (1 + 2t)(\mathrm{e} - t) \ln(\mathrm{e} - t) = \left(\mathrm{e} - t + 2\,\mathrm{e}\,t - 2t^2\right) \ln(\mathrm{e} - t).$$

Hledaná derivace tedy je

$$\begin{aligned} f_u(1, \mathrm{e}) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\mathrm{e} - t + 2\,\mathrm{e}\,t - 2t^2) \ln(\mathrm{e} - t) - \mathrm{e}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(-1 + 2\,\mathrm{e} - 4t) \ln(\mathrm{e} - t) + (\mathrm{e} - t + 2\,\mathrm{e}\,t - 2t^2)\,\frac{1}{\mathrm{e} - t}(-1)}{1} \\ &= (-1 + 2\,\mathrm{e})1 + \mathrm{e}\,\frac{1}{\mathrm{e}}(-1) = 2\,\mathrm{e} - 2, \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že jde o limitu funkce jedné proměnné, pro kterou máme k dispozici l'Hospitalovo pravidlo.

Nyní problém vyřešme s použitím gradientu zadané funkce, který je

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \ln y \\ x(1 + \ln y) \end{pmatrix}.$$

Směrová derivace je tedy

$$f_u(x, y) = \left\langle \operatorname{grad} f(x, y),\, u \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \ln y \\ x(1 + \ln y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2y \ln y - x(1 + \ln y).$$

V bodě $[1, \mathrm{e}]$ opět obdržíme hodnotu

$$f_u(1, \mathrm{e}) = 2\,\mathrm{e} - 2.$$

(223) Vypočtěte $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}, f_{xxy}, f_{yxx}$ a f_{xyx} funkce

$$f(x,y) = x^5 + 12x^3y - y^7.$$

$$\left[\begin{array}{l} f_x = 5x^4 + 36x^2y;\ f_y = 12x^3 - 7y^6;\ f_{xx} = 20x^3 + 72xy; \\ f_{xy} = f_{yx} = 36x^2;\ f_{yxx} = f_{xxy} = f_{xyx} = 72x \end{array}\right]$$

(224) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x^2(1-y-3z)}.$$

$$\left[f_x = 2x(1-y-3z)\,\mathrm{e}^{x^2(1-y-3z)};\ f_y = -x^2\,\mathrm{e}^{x^2(1-y-3z)};\ f_z = -3x^2\,\mathrm{e}^{x^2(1-y-3z)}\right]$$

(225) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = \sin^{xy} x.$$

$$\left[f_x = y\sin^{xy} x(\ln\sin x + x\operatorname{cotg} x);\ f_y = x\sin^{xy} x\ln\sin x\right]$$

(226) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = xyz\sin(xy)\cos z.$$

$$\left[\begin{array}{l} f_x = yz\cos z(\sin(xy) + xy\cos(xy)); \\ f_y = xz\cos z(\sin(xy) + xy\cos(xy)); \\ f_z = xy\sin(xy)(\cos z - z\sin z) \end{array}\right]$$

(227) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}.$$

$$\left[f_x = \tfrac{1}{y}\cos\tfrac{x}{y}\cos\tfrac{y}{x} + \tfrac{y}{x^2}\sin\tfrac{x}{y}\sin\tfrac{y}{x};\ f_y = -\tfrac{x}{y^2}\cos\tfrac{x}{y}\cos\tfrac{y}{x} - \tfrac{1}{x}\sin\tfrac{x}{y}\sin\tfrac{y}{x}\right]$$

(228) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100.$$

$$\left[f_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4;\ f_y = 2x^2 + 6xy - 5\right]$$

(229) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = x\sin(x+2y).$$

$$\left[f_x = \sin(x+2y) + x\cos(x+2y);\ f_y = 2x\cos(x+2y)\right]$$

(230) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}.$$

$$\left[f_x = -\tfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}};\ f_y = \tfrac{x}{y^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\right]$$

(231) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}.$$

$$\left[f_x = \tfrac{1}{1+x^2};\ f_y = -\tfrac{1}{1+y^2}\right]$$

(232) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu v bodě [3, 2] pro funkci

$$f(x,y) = \sqrt{2x^3 - 3y^3}.$$

$$\left[f_x(3,2) = \tfrac{9}{10}\sqrt{30};\ f_y(3,2) = -\tfrac{3}{5}\sqrt{30}\right]$$

(233) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu v bodě [2, 5] pro funkci

$$f(x,y) = y^2 + y\sqrt{1+x^2}.$$

$$\left[f_x(2,5) = 2\sqrt{5};\ f_y(2,5) = 10 + \sqrt{5}\right]$$

(234) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = x^y.$$

$$\left[f_x = yx^{y-1};\ f_y = x^y \ln x\right]$$

(235) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y) = y^{y^x}.$$

$$\left[f_x = y^{y^x+x} \ln^2 y;\ f_y = y^{y^x+x-1}(x \ln y + 1)\right]$$

(236) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = x^{y^z}.$$

$$\left[f_x = y^z x^{y^z-1};\ f_y = zy^{z-1}x^{y^z} \ln x;\ f_z = x^{y^z} y^z \ln x \ln y\right]$$

(237) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = (3x+2z)^{yz}.$$

$$\left[f_x = 3yz(3x+2z)^{yz-1};\ f_y = z(3x+2z)^{yz} \ln(3x+2z);\ f_z = y(3x+2z)^{yz}\left(\ln(3x+2z) + \tfrac{2z}{3x+2z}\right)\right]$$

(238) Vypočtěte gradient funkce

$$f(x,y,z) = x^2y + xz + y^3z.$$

$$\left[\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2xy+z \\ x^2+3y^2z \\ x+y^3 \end{pmatrix}\right]$$

(239) Vypočtěte gradient funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}.$$

$$\left[\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}} \\ \frac{3y}{2\sqrt{x^2+y^3}} \end{pmatrix}\right]$$

(240) Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2}.$$

$$\left[f_x = \tfrac{1}{y^2};\ f_y = -\tfrac{2x}{y^3};\ f_{xx} = 0;\ f_{xy} = f_{yx} = -\tfrac{2}{y^3};\ f_{yy} = \tfrac{6x}{y^4}\right]$$

(241) Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu pro funkci

$$f(x,y) = \ln(x + y^2).$$

$$\left[f_x = \tfrac{1}{x+y^2};\ f_y = \tfrac{2y}{x+y^2};\ f_{xx} = -\tfrac{1}{(x+y^2)^2};\ f_{xy} = f_{yx} = -\tfrac{2y}{(x+y^2)^2};\ f_{yy} = \tfrac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}\right]$$

(242) V bodě $\left[2, \frac{1}{2}, 0\right]$ vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci

$$f(x,y,z) = \arcsin y + (x^3 + y^2 + z)\,\mathrm{e}^z\,.$$

$$\left[f_{xx} = 12;\ f_{yy} = \tfrac{4\sqrt{3}}{9} + 2;\ f_{zz} = \tfrac{41}{4};\ f_{xy} = 0;\ f_{xz} = 12;\ f_{yz} = 1\right]$$

(243) Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$$

v bodě $[1,1]$ ve směru vektoru $u = (1,2)$.

$$[f_u(1,1) = 15]$$

(244) Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$$

v bodě $[1,-1]$ ve směru vektoru $u = (1,2)$.

$$\left[f_u(1,1) = -\tfrac{2}{5}\right]$$

(245) Pro funkci

$$f(x,y) = x - \mathrm{e}^{xy^2}$$

určete směrové derivace $f_u(0,0)$, $f_u(2,1)$ a $f_v(2,1)$, přičemž $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$ a $v = (0,-1)$.

$$\left[f_u(0,0) = \tfrac{\sqrt{2}}{2};\ f_u(2,1) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - 5\,\mathrm{e}^2);\ f_v(2,1) = 4\,\mathrm{e}^2\right]$$

(246) Určete rovnici tečné roviny v bodě $[-1,2]$ ke grafu funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$[t:\ 125z = 4x - 8y + 25]$$

(247) Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[1, 2, 5]$ ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$\left[t: \ z = 2x + 4y - 5; \ n: \ \tfrac{x-1}{2} = \tfrac{y-2}{4} = 5 - z\right]$$

(248) Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$ ke grafu funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$\left[t: \ z = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\pi}{4}; \ n: \ 2 - 2x = 2y - 2 = \tfrac{\pi}{4} - z\right]$$

(249) Určete rovnici tečné roviny v bodě $[2, 1]$ ke grafu funkce

$$f(x, y) = \ln(x + 2y).$$

$$[t: \ 4z = x + 2y + 4(\ln 4 - 1)]$$

(250) Určete rovnici tečné roviny v bodě $[1, 0]$ ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - xy + x.$$

$$[t: \ z = 4x - y - 2]$$

(251) Určete rovnici tečné nadroviny v bodě $[\sqrt{3}, 2, 6]$ ke grafu funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{arctg} \frac{x_1 x_2}{x_3}.$$

$$\left[t: \ 6x_1 + 3\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_3 - 24x_4 + 4\pi - 6\sqrt{3} = 0\right]$$

(252) Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[0, 4, ?]$ ke grafu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + 1}.$$

$$[t: \ 2x - z + 1 = 0; \ n: \ x = 2t, \ y = 4, \ z = 1 - t, \ t \in \mathbb{R}]$$

(253) Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[0, 0]$ ke grafu funkce

$$f(x, y) = \sin(3x - 2y).$$

$$[t: \ 3x - 2y - z = 0; \ n: \ x = 3t, \ y = -2t, \ z = -t, \ t \in \mathbb{R}]$$

(254) Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}$, kde $z(u, v) = \mathrm{e}^{2u+3v}$ a $u = \sin x$, $v = x^2$.

$$\left[\tfrac{\partial z}{\partial x} = 2\,\mathrm{e}^{2u+3v}(\cos x + 3x)\right]$$

(255) Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}$, pokud $z(u, v) = u^v$ a $u = 3x^2 + y^2$, $v = 3x + 2y$.

$$\left[\tfrac{\partial z}{\partial x} = (3x^2 + y^2)^{3x+2y-1} \left[18x^2 + 12xy + 3(3x^2 + y^2)\ln(3x^2 + y^2)\right]\right]$$

(256) Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial y}$, pokud $z(u,v) = u^v$ a $u = 3x^2 + y^2$, $v = 3x + 2y$.

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y} = (3x^2+y^2)^{3x+2y-1}\left[4y^2 + 6xy + 2(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)\right]\right]$$

(257) S využitím substituce $u = x$ a $v = \sqrt{x^2+y^2}$ najděte všechny funkce $z(x,y)$ splňují rovnost

$$yz_x - xz_y = 0.$$

$$\left[z(x,y) = C + f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(258) S využitím substituce $u = x$ a $v = \frac{y}{x}$ najděte všechny funkce $z(x,y)$ splňují rovnost

$$xz_x + yz_y = 0.$$

$$\left[z(x,y) = C + f\left(\tfrac{y}{x}\right),\ C \in \mathbb{R}\right]$$

(259) Diferenciální rovnici

$$x^2y'' + xy' - 4y = x\ln x$$

transformujte do nových proměnných $x = \mathrm{e}^t$.

$$\left[\ddot{y} - 4y = t\,\mathrm{e}^t\right]$$

(260) Diferenciální rovnici

$$z_{xx} - yz_{yy} - \frac{1}{2}z_y = 0$$

transformujte do nových proměnných $u = x - 2\sqrt{y}$ a $v = x + 2\sqrt{y}$ a vyřešte ji.

$$\left[4z_{uv} = 0;\ z(x,y) = F\left(x - 2\sqrt{y}\right) + g\left(x + 2\sqrt{y}\right) + C\cdot\left(x - 2\sqrt{y}\right) + K,\ C, K \in \mathbb{R}\right]$$

(261) Diferenciální rovnici

$$xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = 0$$

transformujte do nových proměnných $u = x + y$ a $v = \frac{y}{x+y}$.

$$\left[uz_{uu} - vz_{vu} + z_u = 0\right]$$

(262) Diferenciální výraz

$$4xyz_{xy} - 2yz_y = 0$$

transformujte do nových proměnných $u = \sqrt{xy}$ a $v = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

$$\left[u^2z_{uu} - v^2z_{vv} = 0\right]$$

(263) Diferenciální rovnici

$$(x+y)z_x - (x-y)z_y = 0$$

transformujte do nových proměnných $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ a $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

$$\left[z_u - z_v = 0\right]$$

(264) Nechť pro funkci f existují parciální derivace dostatečně vysokých řádů. Ověřte platnost následující rovnosti

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz,$$

kde $z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$.

(265) Předpokládejme, že pro funkci f a g existují parciální derivace dostatečně vysokých řádů. Ověřte platnost následující rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde $u = f\left(x + g(y)\right)$.

III. 4. Diferenciál a Taylorova věta pro funkce více proměnných

Definice 59. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h a k se nazývá *diferenciál funkce* v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)\,(h, k)$, příp. $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

Věta 60. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivaci a platí $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$, tj.*

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Poznámka 61. Diferenciál funkce lze použít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot. Platí

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Věta 62 (Taylorova). *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n + 1$ včetně. Pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí*

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

přičemž

$$\begin{aligned} T_n(x,y) &= \\ &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\,(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,(y-y_0)^2\right) + \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n(x,y) &= \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}\left(x_0+\vartheta(x-x_0), y_0+\vartheta(y-y_0)\right)\,(x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j, \end{aligned}$$

kde $\vartheta \in (0, 1)$.

Příklad. Odhadněme pomocí diferenciálu hodnotu

$$\log_2 \left[(1,96)^2 + 4,02\right]$$

pokud víme, že $\ln 2 \doteq 0,693$.

Řešení. Pro odhad použijeme funkci $f(x,y) = \log_2\left(x^2+y\right)$ v bodě $[x_0, y_0] = [2,4]$. Její parciální derivace jsou

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y)\ln 2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)\ln 2},$$

tedy

$$f_x(2,4) = \frac{1}{2\ln 2}, \qquad f_y(2,4) = \frac{1}{8\ln 2}.$$

Diferenciál je

$$\mathrm{d}f(2,4) = f_x(2,4)(1,96-2) + f_y(2,4)(4,02-4) = \frac{-0,04}{2\ln 2} + \frac{0,02}{8\ln 2} \doteq -0,025.$$

Tím získáme odhad

$$\log_2\left[(1,96)^2 + 4,02\right] \approx \log_2(2^2+4) - 0,025 = \log_2 2^3 - 0,025 = 3 - 0,025 = 2,975.$$

Poznamenejme, že přesná hodnota je $2,974822961\ldots$

Příklad. Nyní odhadněme pomocí Taylorova polynomu druhého řádu v bodě $[1,1]$ hodnotu funkce

$$f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2+1\right)$$

v bodě $[1,1;1,2]$.

Řešení. Poznamenejme, že bod $[1,1]$ byl zvolen proto, že jde o nejbližší bod k bodu $[1,1;1,2]$, ve kterém lze funkci f snadno spočítat, nebo (jako v našem případě) jde o typickou tabulkovou hodnotu. Nejprve potřebujeme parciální derivace prvního a druhého řádu

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1},$$

$$f_{xx} = \frac{2\left(-x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}, \quad f_{yy} = \frac{2\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$

a jejich hodnoty v bodě $[1,1]$

$$f_x = \frac{2}{3}, \quad f_y = \frac{2}{3}, \quad f_{xx} = \frac{2}{9}, \quad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{4}{9}, \quad f_{yy} = \frac{2}{9}.$$

Nyní stačí dosadit do vzorce:

$$\begin{aligned} T_2 = f(1,1) + \begin{pmatrix} f_x(1,1) & f_y(1,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{yx}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{9}\left(x^2+y^2-4xy+8x+8y-14\right) + \ln 3. \end{aligned}$$

V bodě $[1,1;1,2]$ je hodnota přibližně $1,295$. Dodejme, že přesná hodnota činí $1,2947\ldots$

(266) Určete diferenciál funkce

$$f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

v bodě $[1, \sqrt{3}]$.

$\left[\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\mathrm{d}y \right]$

(267) Pomocí diferenciálu funkce přibližně vypočtěte

$$\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95}.$$

$\left[\frac{\pi}{4} + 0,035 \right]$

(268) Pomocí diferenciálu funkce přibližně vypočtěte

$$\sqrt{2,08 \cdot 1,99}.$$

$[2,035]$

(269) Pomocí diferenciálu funkce přibližně vypočtěte

$$\ln \frac{3,01}{2,9}.$$

$\left[\frac{11}{300} \right]$

(270) Pomocí diferenciálu funkce přibližně vypočtěte

$$\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}.$$

$[2,95]$

(271) Pomocí diferenciálu funkce přibližně vypočtěte

$$1,04^{2,02}.$$

$[1,08]$

(272) Pomocí diferenciálu funkce přibližně vypočtěte

$$\mathrm{e}^{0,05^3-0,02}.$$

$[0,98]$

(273) Napište Taylorův polynom třetího stupně se středem v počátku pro funkci

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y.$$

$\left[y + xy + \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6} \right]$

(274) Napište Taylorův polynom třetího stupně se středem v počátku pro funkci

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y).$$

$$\left[y + xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2y - xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]$$

(275) Napište Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě $[1,1]$ pro funkci

$$f(x,y) = x^y.$$

$$\left[1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2(y-1)\right]$$

(276) Napište Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě $[-2,-3]$ pro funkci

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{xy}\right).$$

$$\left[\ln\tfrac{1}{6} + 3 + x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{18}y^2\right]$$

(277) Pomocí Taylorova polynomu druhého stupně vypočtěte přibližně

$$\frac{\cos 44^\circ}{\cos 31^\circ}.$$

$[0,8392012]$

(278) Pomocí Taylorova polynomu druhého stupně pro funkci tří proměnných vypočtěte přibližně

$$f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{1,1+0,1+0,01}{1,1-0,1+0,01}.$$

$[0,9733981635]$

III. 5. Lokální a globální extrémy funkcí více proměnných

Definice 63. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ *lokálního maxima* (*minima*) funkce f, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ ($f(x) \geq f(x^*)$).

Definice 64. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $x^* \in \mathbb{R}^n$ je *stacionární bod funkce* f, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace funkce f a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Věta 65. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě x^* lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f. Pak je bod x^* stacionárním bodem funkce f.*

Poznámka 66. Je zřejmé, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ může mít lokální extrém pouze ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna parciální derivace prvního řádu neexistuje.

Věta 67. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť $[x_0, y_0]$ je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx} > 0$, jde o minimum, je-li $f_{xx} < 0$, jde o maximum. Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém nenastává.

Definice 68. Nechť existují všechny parciální derivace funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, potom se čtvercová matice ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

nazývá *Hessova matice* (pokud má funkce f v bodě $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ spojité smíšené parciální derivace v bodě $\tilde{x}$, plyne ze Schwarzovy věty, že je Hessova matice v tomto bodě symetrická).

Poznámka 69. Je-li Hessova matice v bodě x^* pozitivně (negativně) definitní, má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum (maximum).

Kvadratická forma určená symetrickou maticí je *pozitivně definitní* právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla kladná (nebo všechny hlavní minory jsou kladné). Kvadratická forma určena symetrickou maticí je *negativně definitní* právě tehdy, když všechna vlastní čísla jsou záporná (nebo všechny hlavní minory střídají znaménka počínaje záporným).

Definice 70. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že bod $x^* \in M$ je bodem *absolutního maxima* (*minima*) funkce f na M, jestliže $f(x) \le f(x^*)$ ($f(x) \ge f(x^*)$) pro každé $x \in M$.

Věta 71. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina (tj. uzavřená a ohraničená) a funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak funkce f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř množiny M nebo v některém hraničním bodě.*

Příklad. Najděte globální extrémy funkce

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)\, \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$$

na množině $M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

Řešení. Globální extrém může být ve stacionárním bodě nebo na hranici množiny. Nejprve proto najdeme všechny stacionární body uvnitř množiny M. K tomu musíme vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$f_x(x, y) = 0, \qquad f_y(x, y) = 0,$$

tedy

$$-2x\, \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2 - 2) = 0, \qquad -2y\, \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2 - 3) = 0.$$

Protože exponenciální funkce je vždy kladná, jsou pouze čtyři možnosti:

(i) $x = 0, y = 0$,
odkud dostáváme stacionární bod $[0, 0]$;

(ii) $x = 0, 2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$,
protože první rovnici $x = 0$ můžeme dosadit do druhé rovnice, ihned dostáváme stacionární body $[0, -1]$ a $[0, 1]$;

(iii) $2x^2 + 3y^2 - 3 = 0, y = 0$,
podobně jako v předchozím případě dostáváme stacionární body $[-1, 0]$ a $[1, 0]$;

(iv) $2x^2 + 3y^2 - 3 = 0, 2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$,
odečtením rovnic obdržíme spor ve tvaru $1 = 0$, takže v tomto případě žádný nový stacionární bod nedostaneme.

Protože všech pět získaných bodů patří do množiny M, přidáme si je všechny na seznam kandidátů na hledané globální extrémy.

Nyní otestujeme funkci na hranici množiny M. Nejprve na horní půlkružnici. Dosadíme $y = \sqrt{4 - x^2}$ a najdeme stacionární body výsledné funkce jedné proměnné $g(x) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = (12 - x^2)\,\mathrm{e}^{-4}$ pro $x \in [-2, 2]$. Položíme její derivaci rovnu nule

$$g'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-4} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0,$$

čímž obdržíme bod $[0, \sqrt{4 - 0^2}] = [0, 2]$. Samozřejmě nesmíme zapomenout přidat na náš seznam hraniční body, zde $x = \pm 2$, tedy $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Podobně otestujeme funkci na dolní půlkružnici. Dosazením $y = -\sqrt{4 - x^2}$ a zopakováním předchozího postupu získáme na seznam další bod $[0, -2]$ (hraniční body už na seznamu máme). Poznamenejme, že v tomto speciálním případě jsme si mohli zjednodušit práci přímo dosazením $y^2 = 4 - x^2$ do funkce f, protože proměnná y se ve objevuje pouze v sudých mocninách. Ani v tomto případě ovšem nesmíme zapomenout přidat na 'seznam kandidátů' body $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Ve všech bodech našeho seznamu nyní spočítáme funkční hodnoty a zjistíme, kde nastává globální maximum (zde v bodech $[0, 1]$ a $[0, -1]$ s hodnotou $\frac{3}{\mathrm{e}}$) a kde globální minimum (zde v bodě $[0, 0]$ s hodnotou 0).

Příklad. Zkusme rozhodnout, ve kterých stacionárních bodech funkce

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$$

z předchozího příkladu jsou lokální extrémy.

Řešení. Připomeňme, že jde o body $[-1, 0]$, $[1, 0]$, $[0, -1]$, $[0, 1]$ a $[0, 0]$. K rozhodnutí budeme potřebovat Hessovu matici funkce f:

$$H_f(x, y) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(4x^4 - 6x^2y^2 - 10x^2 - 3y^2 + 2) & 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 5) \\ 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 5) & 2\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(4x^2y^2 + 6y^4 - 2x^2 - 15y^2 + 3) \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$H_f(-1, 0) = H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}, \quad H_f(0, -1) = H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\mathrm{e}} \end{pmatrix},$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme definitnost těchto matic. Protože v bodě $[0,0]$ je Hessova matice pozitivně definitní, je zde lokální minimum. V bodech $[0,1]$ a $[0,-1]$ je matice negativně definitní, tedy se v nich nachází lokální maximum. V bodech $[-1,0]$ a $[1,0]$ extrémy nejsou, protože je tam matice indefinitní. Tento výsledek přesně koresponduje s výsledky předchozího příkladu, protože funkce měla globální extrémy v bodech extrémů lokálních a nikoli na hranici množiny.

(279) V bodě $[\mathrm{e},2]$ určete Hessovu matici funkce

$$f(x,y) = x^y.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3\,\mathrm{e} \\ 3\,\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}\right]$$

(280) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y.$$

$$[f_{min}(1,0) = -1]$$

(281) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy(4-x-y).$$

$$\left[f_{max}\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{64}{27}\right]$$

(282) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}(x^2+y^2).$$

$$[f_{min}(0,0) = 0]$$

(283) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 4x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

$$\left[f_{min}\left(\tfrac{1}{2},-1\right) = 6;\ f_{max}\left(-\tfrac{1}{2},1\right) = -6\right]$$

(284) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \ln xy - 4x - 9y.$$

$$\left[f_{max}\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{9}\right) = -2 - \ln 36\right]$$

(285) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x,y,z > 0.$$

$$\left[f_{min}\left(\tfrac{1}{2},1,1\right) = 4\right]$$

(286) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

$$\left[f_{min}(24,-144,-1) = -6913\right]$$

(287) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = xyz(4a - x - y - z), \quad a,x,y,z > 0.$$

$$\left[f_{max}(a,a,a) = a^4\right]$$

(288) Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$$

na množině M, kterou je trojúhelník vymezený body $A = [0,2]$, $B = [3,0]$, $C = [0,-1]$.

$$\left[f_{gl.\,min}\left(\tfrac{1}{2},1\right) = -\tfrac{13}{4};\ f_{gl.\,max}(0,-1) = 7\right]$$

(289) Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2$$

na množině $M := \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge |x| - 1\}$.

$$\left[f_{gl.\,min}(0,0) = -2;\ f_{gl.\,max}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\tfrac{1}{2}\right]$$

(290) Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$$

na množině $0 \le x \le y \le 4$.

$$\left[f_{gl.\,min}(0,0) = 4;\ f_{gl.\,max}(4,4) = 40\right]$$

(291) Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y$$

na elipse $9x^2 + 16y^2 \le 144$.

$$\left[f_{gl.\,min}(2,2) = -100;\ f_{gl.\,max}\left(-\tfrac{12}{5},-\tfrac{12}{5}\right) = 384\right]$$

(292) Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2y$$

na kruhu $x^2 + y^2 \le 16$.

$$\left[f_{gl.\,min}(0,-4) = -24;\ f_{gl.\,max}(0,1) = 1\right]$$

(293) Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = 4y$$

na kruhu $x^2 + y^2 \le 1$.

$$\left[f_{gl.\,min}(0,-1) = -4;\ f_{gl.\,max}(0,1) = 4\right]$$

(294) Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$$

na čtverci s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$, $D = [0,-2]$.

$\left[f_{gl.\,min}(0,0) = 0;\ f_{gl.\,max}(2,0) = 8;\ f_{gl.\,max}(-2,0) = 8\right]$

III. 6. Vázané extrémy

Definice 72. Nechť f je funkce n proměnných, $M \subset D(f)$, $x^* \in M$. Existuje-li okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro všechna $x \in M \cap \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ ($f(x) \geq f(x^*)$) říkáme, že funkce f má v bodě x^* *lokální maximum* (*minimum*) vzhledem k množině M.

Věta 73. *Nechť funkce n proměnných f, $g_1, \ldots, g_m$, $1 \leq m \leq n$, mají spojité parciální derivace prvního řádu v otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě množiny U má matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

hodnost m. Přičemž množina M je určena systémem rovností $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$. Má-li funkce f v bodě $x^* \in M$ lokální extrém vzhledem k M, existují reálná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tak, že jsou splněny rovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x^*), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Poznámka 74. Funkce

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x)$$

se nazývá *Lagrangeova funkce* a konstanty $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *Lagrangeovy multiplikátory*. Tímto jsme získali funkci n proměnných, do níž jsou vazebné podmínky již zabudovány. Dále postupuje jako při vyšetřování lokálních extrémů s tím, že neznámým je nejen hledaný bod x^* ale i Lagrangeovy multiplikátory. Metodu Lagrangeových multiplikátorů lze použít i v případě, kdy množina M je zadána systémem nerovností.

Poznámka 75. *Neexistence* extrému Lagrangeovy funkce $L(x,\lambda)$ v některém jejím stacionárním bodě *neznamená*, že i funkce f nemá v tomto bodě lokální extrém.

Příklad. Pomocí Lagrangeových multiplikátorů najděme stacionární body funkce

$$f(x,y,z) = xyz$$

na množině M dané rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

Řešení. Nejprve sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \lambda_2(x + y + z).$$

Stacionární body dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} L_x &= yz - 2x\lambda_1 - \lambda_2, && (10)\\ L_y &= xz - 2y\lambda_1 - \lambda_2, && (11)\\ L_x &= xy - 2z\lambda_1 - \lambda_2, && (12)\\ L_{\lambda_1} &= x^2 + y^2 + z^2 - 1, \\ L_{\lambda_2} &= x + y + z. \end{aligned}$$

Z rovnic (10), (11) a (12) vyloučíme λ_2 jejich vzájemným odečtením. Po úpravě dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} (10) - (11) \Rightarrow (y-x)(z+2\lambda_1) &= 0, \\ (11) - (12) \Rightarrow (z-y)(x+2\lambda_1) &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, && (13)\\ x + y + z &= 0. && (14) \end{aligned}$$

První dvě rovnice jsou ve tvaru ‘součin = 0’, tj. jsou splněny, jestliže je v každé některá závorka nulová. Odtud dostaneme informace, které nám (po dosazení do (13) a (14)) dají stacionární body a příslušné multiplikátory:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right),$$
$$\left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right),$$
$$\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right).$$

Příklad. Najděme lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}$$

na množině M dané rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

a derivujeme ji podle všech proměnných. Tyto parciální derivace položíme rovny nule a řešíme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right) &= 0, \\ y\left(\frac{2}{9} + 2\lambda\right) &= 0, \\ z\left(\frac{2}{25} + 2\lambda\right) &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Vždy zvolíme λ tak, aby jedna z prvních tří rovnic byla splněna ($= 0$), další dvě vyřeší položení příslušných proměnných $= 0$ a třetí proměnnou vypočítáme ze čtvrté rovnice. Dostaneme 6 stacionárních bodů $[\pm 1, 0, 0], [0, \pm 1, 0], [0, 0, \pm 1]$ a k nim příslušné hodnoty λ $\left(\text{postupně } -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{25}\right)$. Zda v nich nastává extrém zjistíme z definitnosti formy dané

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yx} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix}.$$

Tj., pokud je výraz

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yx} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

kladný pro všechna $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \neq (0, 0, 0)$, pak je pozitivně definitní, pokud záporný, pak je negativně definitní a pokud najdeme dva vektory takové, že je daný výraz pro jeden kladný a pro druhý záporný, pak je indefinitní. $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ ovšem bereme jen z tečného prostoru množiny M, tedy takové, jež splňují podmínku

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z = 0.$$

Dosazením bodu $[1, 0, 0]$ do této podmínky dostaneme, že $\mathrm{d}x = 0$. Vyšetřovaný výraz je tedy $\left(\text{pro tento bod } \lambda = -\frac{1}{4}\right)$

$$-\frac{5}{18}(\mathrm{d}y)^2 - \frac{21}{50}(\mathrm{d}z)^2,$$

který je pro každé $(\mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \neq (0, 0)$ záporný. Vyšetřovaná forma je tedy negativně definitní a v bodě $[1, 0, 0]$ je ostré lokální maximum. Podobně zjistíme, že maximum nastává i v bodě $[-1, 0, 0]$ a minimum v bodech $[0, 0, \pm 1]$. V bodech $[0, \pm 1, 0]$ extrém funkce nemá, protože je zde forma indefinitní.

(295) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$$

na množině $x^2 + y^2 = 9$.

$[f_{max}(0, 3) = 36;\ f_{max}(0, -3) = 36;\ f_{min}(3, 0) = 18;\ f_{min}(-3, 0) = 18]$

(296) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$$

na množině $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

$\left[f_{max}\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 4 - \sqrt{3};\ f_{min}\left(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}\right]$

(297) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = x + y$$

na množině $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

$\left[f_{min}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2};\ f_{max}\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}\right]$

(298) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = 27(x+y-1)$$

na množině $9(x^2+y^2) = 2x^2y^2$.

$[f_{min}(3,3) = 135;\ f_{max}(-3,-3) = -189]$

(299) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

na množině $y = x+3$.

$\left[f_{min}\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \ln\frac{9}{2}\right]$

(300) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \ln(x+y)$$

na množině $xy = 1$.

$[f_{min}(1,1) = \ln 2]$

(301) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$$

na množině $x - y = \frac{\pi}{4}$.

$\left[f_{min}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{(2k+1)\pi}{2}, -\frac{\pi}{8}+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}};\ f_{max}\left(\frac{\pi}{8}+k\pi, -\frac{\pi}{8}+k\pi\right) = 1+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right]$

(302) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \sin(y+1) + \cos x$$

na množině $y - x = -1$.

$\left[f_{min}\left(\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi, \frac{\pi}{4}-1+(2k+1)\pi\right) = -\sqrt{2};\ f_{max}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}-1+2k\pi\right) = \sqrt{2}\right]$

(303) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

na množině $x+y-3z+7 = 0$ & $x-y+z-3 = 0$.

$[f_{min}(0,-1,2) = 5]$

(304) Do elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ vepište hranol s maximální objemem a určete jej.

$\left[\text{délky hran: } \frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}},\ V_{max} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}\right]$

(305) Na parabole $y^2 = 4x$ nalezněte bod, který je nejblíže přímce $x-y+4 = 0$.

[na parabole bod $[1,2]$; na přímce v bod $[-\frac{1}{2},\frac{7}{2}]$]

(306) Do rotačního kužele s délkou hrany l, která svírá se základnou úhel α, vepište kvádr s největším povrchem.

$\left[\operatorname{tg}\alpha > \sqrt{2}:\ a = b = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1},\ c = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}l\sin\alpha;\ \operatorname{tg}\alpha \le \sqrt{2}:\ a = b = \sqrt{2}l\cos\alpha,\ c = 0\right]$

III. 7. Implicitně zadané funkce

Definice 76. Nechť F je funkce dvou proměnných. Označme množinu

$$M = \{[x, y] \in D(f) : \ F(x, y) = 0\}$$

a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Jestliže existuje okolí $\mathcal{U} = \{[x, y] \in D(F) : \ |x - x_0| < \delta, \ |y - y_0| < \delta\}$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že množina $M \cap \mathcal{U}$ je totožná s grafem funkce $y = f(x)$, $|x - x_0| < \delta$, řekneme, že funkce f je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ *definovaná implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$.

Věta 77 (O existenci implicitní funkce jedné proměnných). *Nechť je funkce F spojitá na čtverci $R = \{[x, y] \in D(F) : \ |x - x_0| < a, \ |y - y_0| < a\}$ a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Dále předpokládejme, že funkce F má spojitou parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ a platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna funkce $y = f(x)$, která je spojitá.*

Věta 78. *Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty a funkce F má na R spojité parciální derivace prvního řádu. Pak má funkce f, která je implicitně určena v okolí bodu $[x_0, y_0]$ rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci v bodě x_0 a platí*

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \tag{15}$$

Věta 79 (O existenci implicitní funkce více proměnných). *Nechť funkce $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $M = = \{[x, y] = [x_1, \dots, x_n, y] \in \mathbb{R}^{n+1}, \ F(x, y) = 0\}$, $[x^*, y^*] \in M$ a nechť F je spojitá na množině $R = \{[x, y] = [x_1, \dots, x_n, y] : \ \left|x_i - x_i^*\right| < a, \ i = 1, \dots, n, \ |y - y^*| < a\}$. Dále předpokládejme, že F má spojitou parciální derivaci F_y v bodě $[x^*, y^*]$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$. Pak existuje okolí $[x^*, y^*]$, v němž je rovnicí $F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ implicitně určena právě jedna funkce $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.*

Má-li navíc funkce F v bodě $[x^*, y^*]$ spojité parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_i} F$, má implicitní funkce f v bodě $x^* = [x_1, \dots, x_n]$ parciální derivace a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*, y^*)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)}.$$

Poznámka 80. K určení derivací vyšších řádů (pro funkci implicitní funkci jedné nebo více proměnných) lze samozřejmě také sestavit vzorec, s jehož pomocí tyto derivace vypočteme. Druhý způsob je ten, že zderivujeme identitu $F(x, y) = 0$ podle jednotlivých proměnných $x_1, \dots, x_n$ s tím, že člen y je vlastně funkcí $y(x)$ a nelze jej explicitně zderivovat (proto píšeme jen y_{x_i} pro $i = 1, \dots, n$). Z takto zderivované identity poté hledanou (parciální) derivaci vyjádříme.

Poznámka 81. Pro implicitně zadanou funkci $F(x, y, z)$ je tečná rovina v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ určena rovnicí

$$t : \ F_x(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) = 0,$$

pro $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ a $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ je normála dána vztahem

$$n : \ \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} = \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)},$$

a pokud $F_x(x_0, y_0, z_0) = 0$ nebo $F_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ nebo $F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, je normála zadána parametricky rovnicemi

$$n: \begin{cases} x &= x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t, \\ y &= y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t, \\ z &= z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t. \end{cases}$$

Příklad. Pokusme se určit, zda je graf funkce dané implicitně

$$\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$$

v okolí bodu $[1, 3]$ nad nebo pod tečnou.

Řešení. Jde o implicitně zadanou funkci jedné proměnné $y = y(x)$. K rozhodnutí potřebujeme znát hodnotu druhé derivace v daném bodě (resp. její znaménko). Derivujme rovnost ze zadání podle x

$$9x - 3y^2 - 3x2yy' + 3y^2y' = 0,$$

tedy

$$y' = -\frac{9x - 3y^2}{3y^2 - 6xy},$$

odkud po dosazení bodu $[1, 3]$ dostaneme hodnotu $y' = 2$. Protože se ve jmenovateli nula neobjevila, funkce daná implicitně v okolí daného bodu existuje. Derivujme rovnost podruhé (pozor na derivace součinů – y je funkcí proměnné x)

$$9 - 12yy' - 6xy'^2 - 6xyy'' + 6yy'^2 + 3y^2y'' = 0.$$

Do výsledného vzorce dosadíme známé hodnoty $x = 1, y = 3$ a $y' = 2$. Tím snadno obdržíme hodnotu $y'' = \frac{15}{9} > 0$. Graf je tedy v okolí daného bodu nad tečnou.

Příklad. Na elipse o rovnici

$$x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$$

najděme body, v nichž je normála rovnoběžná s osou y.

Řešení. Normála v bodě $[x_0, y_0]$ je dána

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tF_x(x_0, y_0), \\ y &= y_0 + tF_y(x_0, y_0), \end{aligned}$$

kde pro $F(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8$ máme $F_x = 2x - 2$ a $F_y = 6y - 6$. Protože rovnoběžnost s osou y je totéž jako kolmost na osu x a kolmost znamená nulový skalární součin, dostáváme

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x_0 - 2 \\ 6y_0 + 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

Odtud ihned vidíme, že $x_0 = 1$, což dosadíme do rovnice elipsy a vypočítáme y_0. Tím získáme hledané body $[1, 1], [1, -3]$.

(307) Zderivujte implicitně zadanou funkci
$$x - y^2 = \ln y.$$
$$\left[y' = \frac{y}{2y^2+1}\right]$$

(308) Zderivujte implicitně zadanou funkci
$$2^{xy} + 3^{x+y} = 4.$$
$$\left[y' = -\frac{y2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3}{x2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3}\right]$$

(309) Vypočtěte y' a y'' implicitně zadané funkce
$$\sin^2(xy) = 0.$$
$$\left[y' = -\frac{y}{x};\ y'' = \frac{2y}{x^2}\right]$$

(310) Určete všechny parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovností
$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = a,$$
kde $a \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.
$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}\right]$$

(311) Určete všechny parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovností
$$\frac{x + 2y + z}{y + z} = x.$$
$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1-y-z)(y+z)}{x+y};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z-x}{x+y}\right]$$

(312) Určete všechny parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovností
$$\operatorname{arctg}(x + y) + \operatorname{arctg}(y + z) = x + y + z.$$
$$\left[z_x = -\frac{(x+y)^2\left[1+(y+z)^2\right]}{(y+z)^2[1+(x+y)^2]};\ z_y = \frac{1-(y+z)^2(x+y)^2}{(y+z)^2[1+(x+y)^2]}\right]$$

(313) Najděte body křivky
$$x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0,$$
v nichž nejsou splněny předpoklady Věty o existenci implicitní funkce $y = f(x)$.
$[[2, 2],\ [-2, -2]]$

(314) Určete první a druhou derivaci funkce
$$y^3 - 2xy + x^2 = 0.$$
$$\left[y' = \frac{2y-2x}{3y^2-2x},\ y'' = -\frac{2-4y'+6y(y')^2}{3y^2-2x}\right]$$

(315) V bodě $\left[1, 1, \frac{5}{6}\right]$ určete rovnici tečné roviny k funkci zadané implicitně

$$\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - 3z = 0.$$

$\left[t:\ 2x - y - z - \frac{1}{6} = 0\right]$

(316) V bodě $[3, 1]$ určete rovnici tečné roviny i normály k ploše

$$\frac{x+y}{x-y} = 2.$$

$[t:\ x - 3y = 0,\ n:\ 3x + y - 10 = 0]$

(317) V bodě $[2, \frac{4}{3}, -1]$ určete rovnici tečné roviny i normály k ploše

$$\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0.$$

$\left[t:\ 4z - 2x + y = -4,\ n:\ 2x - 4 = -\frac{4}{3}y + \frac{16}{9} = -z - 1\right]$

(318) Určete rovnici tečné roviny i normály v bodě $[1, 1, 1]$ ke grafu implicitně zadané funkce

$$z = y + \ln\frac{x}{z}.$$

$\left[t:\ x + y - 2z = 0;\ n:\ x - 1 = y - 1 = \frac{1-z}{2}\right]$

(319) V bodě $[-1, 3, 2]$ určete rovnici tečné roviny i normály k ploše

$$\ln(xy + z^2) = 0.$$

$\left[t:\ 4z + 3x - y = 2,\ n:\ \frac{x+1}{3} = 3 - y = \frac{z-2}{4}\right]$

(320) Určete rovnici tečny ke kuželosečce

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$$

procházející počátkem.

$[t_1:\ 5y + 2x = 0,\ t_2:\ y + 2x = 0]$

(321) V bodě $[1, 1]$ určete rovnici tečny a normály k funkci zadané implicitně

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0.$$

$[t:\ y = -x + 2,\ n:\ y = x]$

(322) K elipsoidu

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

určete tečné roviny rovnoběžné s rovinou $\alpha:\ x + 4y + 6z = 0.$

$[t_1:\ x + 4y + 6z = 21,\ t_2:\ x + 4y + 6z = -21]$

(323) Najděte body, ve kterých je tečna křivky
$$4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 12 = 0$$
rovnoběžná s osou x.

$[[1, 2], [1, -8]]$

(324) Rozhodněte, zda plocha
$$x + y^2 + z^3 + z = 4$$
leží v okolí bodu $[1, 1, 1]$ nad nebo pod tečnou.

[pod tečnou]

(325) Určete extrémy implicitně zadané funkce
$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$
$$\left[\text{lokální minimum: } \left[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right]; \text{ lokální maximum: } \left[-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right]\right]$$

(326) Najděte stacionární body implicitně zadané funkce
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$
a zjistěte, zda v nich nastává extrém.

[lokální minimum $[1, -1, -2]$, lokální maximum $[1, -1, 6]$]

(327) Rozhodněte, zda má funkce implicitně zadaná rovnici
$$z^2 - xy + \ln(x + y + z) = 0$$
lokální extrém v bodě $[1, 1, -1]$.

[nemá]

(328) Najděte lokální extrémy funkce zadané implicitně
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16.$$

[lokální maximum: $[1, 3, 4]$; lokální minimum: $[1, 3, -4]$]

Seznam použité literatury

[1] B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, první vydání, Fragment, Havlíčkův Brod, 2003.

[2] Z. Došlá, O. Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných proměnné*, druhé vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1999.

[3] Z. Došlá, O. Došlý, *Metrické prostory*, 2. vydání, Masarykova univerzita, Brno, 2000.

[4] J. Dula, J. Hájek, *Cvičení z matematické analýzy: Obyčejné diferenciální rovnice*, první vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1990.

[5] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, *Zbierka úloh z vyššej matematiky 3*, druhé vydání, ALFA, Bratislava, 1971.

[6] F. Jirásek, S. Čipera, M. Vacek, *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*, SNTL, Praha, 1989.

[7] Z. Kadeřábek, *Limity funkcí více proměnných*, bakalářská práce, Masarykova univerzita, Brno, 2007.

[8] R. Plch, *Příklady z matematické analýzy: Diferenciální rovnice*, první vydání, Masarykova univerzita, Brno, 2007.

[9] M. Ráb, *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, třetí vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1998.