Príklady na precvičovanie – Fourierove rady

Ďalším významným typom funkcionálnych radov sú *trigonometrické rady*, pri ktorých sú jednotlivé členy trigonometrickými funkciami. Konkrétne, jedná sa o rady tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{1}$$

kde a_0, a_n a b_n, $n \in \mathbb{N}$, sú reálne konštanty a nazývajú sa *koeficientami* radu (1). Kľúčovým rysom trigonometrických radov je pozorovanie, že systém ich tvoriacich funkcií

$$S = \{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \dots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \dots\}$$

má nasledujúce vlastnosti. Každá funkcia systému S je *periodická s periódou* 2π a pre každú dvojicu funkcií $\varphi(x)$, $\psi(x) \in S$ platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cdot \psi(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} = 0, & \varphi \neq \psi, \\ \neq 0, & \varphi = \psi. \end{cases} \tag{2}$$

Vlastnosť (2) sa zvyčajne označuje ako *ortogonalita* systému funkcií S (v tomto prípade hovoríme, že funkcie systému S sú vzájomne *ortogonálne*). Nech $f(x)$ je reálna funkcia definovaná a integrovateľná na intervale $[-\pi, \pi]$. Trigonometrický rad (1) s koeficientami

$$a_n := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

sa potom nazýva *Fourierov rad funkcie* $f(x)$ vzhľadom na ortogonálny systém S. Čísla a_n, b_n v (3) a (4) sa označujú ako *Fourierove koeficienty funkcie* $f(x)$ vzhľadom na systém S. Ak funkcia $f(x)$ je párna, potom $b_n = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ (samy si premyslite :)) a rad (1) sa označuje ako *kosínusový*. V prípade nepárnej funkcie $f(x)$ platí $a_n = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ (i toto si samy premyslite :)) a rad (1) sa označuje ako *sínusový*. Častokrát sa stáva, že zadaná funkcia $f(x)$ je definovaná a integrovateľná iba na intervale $[0, \pi]$, prípadne $(0, \pi]$. V tomto prípade sa zvyčajne konštruuje jej tzv. *párne*, resp.

nepárne rozšírenie na celý interval $[-\pi, \pi]$. Pod pojmom párne rozšírenie funkcie $f(x)$ rozumieme novú funkciu $\tilde{f}(x)$ definovanú

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Podobne, nepárne rozšírenie funkcie $f(x)$ bude predstavovať nová funkcia $\bar{f}(x)$ daná predpisom

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Všimnime si, že funkcie $\tilde{f}(x)$ a $\bar{f}(x)$ sú definované na celom intervale $[-\pi, \pi]$, pričom $\tilde{f}(x)$ je párna a $\bar{f}(x)$ je nepárna (samy sa presvedčte :)).

Konvergencia Fourierovho radu – Dirichletova veta

Ak trigonometrický rad (1) konverguje na intervale $[-\pi, \pi]$, potom nutne konverguje na celom $\mathbb{R}$. Vyplýva to z faktu, že sínus a kosínus sú periodické funkcie svojho argumentu s periódou 2π (samy si to dobre premyslite :)). Daný súčet je potom tiež periodickou funkciou (premennej x) a je definovaný na celom $\mathbb{R}$. Je prirodzené očakávať, že *Fourierov rad funkcie* $f(x)$, t.j., rad (1) s koeficientami v (3) a (4), bude mať na intervale $[-\pi, \pi]$ za súčet práve funkciu $f(x)$. Ukazuje sa však, že nie každá funkcia $f(x)$ integrovateľná na $[-\pi, \pi]$ má takúto peknú vlastnosť. Postačujúcu podmienku, ktorú treba v tomto prípade naložiť na funkciu $f(x)$, udáva slávna *Dirichletova veta*. Prv, ako ju vyslovíme, zavedieme dva pomocné pojmy.

- Funkcia $f(x)$ sa nazýva *po častiach spojitá* na intervale $[a, b]$, ak má na tomto intervale iba konečne veľa bodov nespojitosti, pričom sa jedná iba o skoky (teda v každom bode $x \in [a, b]$ má funkcia $f(x)$ obidve vlastné jednostranné limity).

- Funkcia $f(x)$ sa nazýva *po častiach monotónna* na intervale $[a, b]$, ak na tomto intervale existuje iba konečne veľa bodov, v ktorých sa mení monotónnosť funkcie $f(x)$.

Pre jednoduchosť označme symbolmi $f(x_0+)$ a $f(x_0-)$ limitu sprava a limitu zľava funkcie $f(x)$ v bode x_0. Dirichlet (ako prvý korektne :)) dokázal, že ak funkcia $f(x)$ je po častiach spojitá a po častiach monotónna na intervale $[-\pi, \pi]$, potom jej príslušný Fourierov rad (1) s koeficientami v (3) a (4) bodovo konverguje na intervale $[-\pi, \pi]$ k funkcii $f^*(x)$ definovanej takto

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot [f(x-) + f(x+)], & x \in (-\pi, \pi), \\ \\ \frac{1}{2} \cdot [f(\pi-) + f(-\pi+)], & x = -\pi, \text{ resp. } x = \pi. \end{cases}$$

Funkcia $f^*(x)$, ako súčet Fourierovho radu, je zrejme periodická a definovaná na celej reálnej osi (pozri komentár vyššie :)). Predĺženie $f^*(x)$ na interval $(-\infty, \infty)$ sa zvykne označovať ako 2π-*periodické rozšírenie* funkcie $f(x)$. Všimnime si, že v každom bode $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v ktorom je $f(x)$ spojitá, platí $f^*(x_0) = f(x_0)$ (samy si premyslite :)).

Uvedené Dirichletove podmienky zaručujú bodovú, nie však rovnomernú konvergenciu Fourierovho radu funkcie $f(x)$ na intervale $[-\pi, \pi]$. Ak však je funkcia $f(x)$ spojitá na $[-\pi, \pi]$ s $f(-\pi) = f(\pi)$ a jej prvá derivácia $f'(x)$ je po častiach spojitá na $[-\pi, \pi]$, potom daný Fourierov rad (1) s koeficientami (3) a (4) konverguje na intervale $[-\pi, \pi]$ rovnomerne k súčtu $f(x)$.

Besselova nerovnosť a Parsevalova rovnosť

Nech $f(x)$ je funkcia integrovateľná na intervale $[-\pi, \pi]$. Jej Fourierove koeficienty v (3) a (4) vždy spĺňajú tzv. *Besselovu nerovnosť*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

Posledná nerovnosť obzvlášť znamená, že nekonečný číselný rad $\sum \left(a_n^2 + b_n^2\right)$ konverguje, a teda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (samy si premyslite :)). Ak naviac funkcia $f(x)$ spĺňa podmienky Dirichletovej vety (pozri komentár vyššie :)), t.j., Fourierov rad funkcie $f(x)$ konverguje, potom uvedená Besselova nerovnosť prechádza v tzv. *Parsevalovu rovnosť*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

Riešené príklady

Príklad 1

Nájdime Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2$ na intervale $[-\pi, \pi]$.

Riešenie:

Funkcia $f(x)$ je iste spojitá na $[-\pi, \pi]$, a teda i integrovateľná na tomto intervale. Pomocou (3) a (4) vypočítame jej Fourierove koeficienty, konkrétne

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, \mathrm{d}x,$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že

$$a_0 = \frac{2}{3} \cdot \pi^2, \quad a_n = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}, \quad b_n = 0, \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}$$

(premyslite si, že rovnosť $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, ihneď vyplýva zo skutočnosti, že $f(x)$ je párna funkcia; jedná sa o kosínusový rad :)). Hľadaný Fourierov rad funkcie $f(x)$ má teda tvar

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx \quad \text{pre každé } x \in [-\pi, \pi].$$

A keďže funkcia $f(x)$ je spojitá na $[-\pi, \pi]$ a $f(-\pi) = f(\pi)$, podľa Dirichletovej vety platí pozoruhodná identita

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx \quad \text{pre každé } x \in [-\pi, \pi].$$

Jednou z významných aplikácií Fourierových radov je určovanie súčtov niektorých nekonečných číselných radov. Tak napríklad voľbou $x = \pi$ v poslednej rovnosti dostávame

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \cos n\pi.$$

Nakoľko $\cos n\pi = (-1)^n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ (samy overte ;)), máme

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Z poslednej identity potom získame hodnotu súčtu (konvergentného) radu $\sum \frac{1}{n^2}$, konkrétne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad :)$$

(samy overte :)). Podobne, voľbou $x = 0$ v odvodenom Fourierovom rozvoji funkcie $f(x)$ dostaneme vzorec pre súčet alternujúceho radu $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. Nechávame na čitateľa, aby preveril, že platí identita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad :).$$

No a do tretice, aplikáciou Parsevalovej rovnosti pre získaný Fourierov rad funkcie $f(x)$ máme

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \pi^2\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}\right]^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x.$$

Vykonaním naznačených výpočtov a jednoduchých úprav dostaneme (samy overte :))

$$\frac{2}{9} \cdot \pi^4 + 16 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{5} \cdot \pi^4$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad :).$$

Príklad 2

Stanovme Fourierov rozvoj funkcie $f(x) = \mathrm{e}^x$ na intervale $[0, 2\pi]$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. V tomto prípade však funkcia $f(x)$ nie je ani párna, ani nepárna, preto musíme poctivo vypočítať všetky jej Fourierove koeficienty v (3) a (4) :-/. Okrem toho, namiesto intervalu $[-\pi, \pi]$ teraz pracujeme na intervale $[0, 2\pi]$, opäť sa však jedná o interval dĺžky 2π. Vzorce (3) a (4) budú preto fungovať analogicky, avšak s tým rozdielom, že integrovať budeme cez interval $[0, 2\pi]$. Konkrétne, máme

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Samy overte (napríklad pomocou vhodnej integrácie per-partes :)), že pre čísla a_n, b_n platí

$$a_n = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = -\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hľadaný Fourierov rad funkcie $f(x)$ má teda pre každé $x \in [0, 2\pi]$ tvar

$$\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \cdot \cos nx - \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \sin nx \right].$$

Funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $[0, 2\pi]$ a $f(0) = 1$ a $f(2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi}$. Podľa Dirichletovej vety potom pre každé $x \in (0, 2\pi)$ platí rovnosť

$$\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \cdot \cos nx - \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \sin nx \right].$$

Na druhej strane, pre hodnoty $x = 0$, resp. $x = 2\pi$ dostávame identitu

$$\underbrace{\frac{1 + \mathrm{e}^{2\pi}}{2}}_{\frac{f(1) + f(2\pi)}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Z poslednej rovnosti vypadne po drobnej úprave elegantný vzorec pre súčet konvergentného číselného radu $\sum \frac{1}{n^2+1}$, konkrétne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2\pi} + 1}{\mathrm{e}^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2} \quad :).$$

Podobne, voľbou $x = \pi$ v získanom Fourierovom rozvoji funkcie $f(x)$ máme identitu (zrejme platí $\cos n\pi = (-1)^n$ a $\sin n\pi = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$;))

$$\mathrm{e}^{\pi} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \cdot (-1)^n.$$

Po úpravách získame vzťah pre hodnotu súčtu alternujúceho číselného radu $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$, konkrétne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi \cdot \mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{2\pi} - 1} \qquad :)$$

(samy overte všetky odvodené identity ;)).

Príklad 3

Zostrojme kosínusový rozvoj funkcie $f(x) = x$ na intervale $[0, \pi]$.

Riešenie:

Na to, aby sme zostrojili hľadaný Fourierov rad, potrebujeme predĺžiť funkciu $f(x)$ i na interval $[-\pi, 0)$. A keďže máme nájsť kosínusový rozvoj funkcie $f(x)$, potrebujeme stanoviť párne rozšírenie $f(x)$, t.j.,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi], \\ -x, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

(samy si to dobre premyslite :)). Hľadáme teda Fourierov rad pre funkciu $\tilde{f}(x)$ na intervale $[-\pi, \pi]$. Vďaka tomu, že $\tilde{f}(x)$ je párna funkcia (nakreslite jej graf :)), bude sa jednať o rad tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Zo vzorca v(3) a z definície funkcie $\tilde{f}(x)$ pre Fourierove koeficienty a_n postupne dostávame

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^{0} (-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\int_{\pi}^{0} x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x \, \mathrm{d}x \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{0}^{\pi} x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x \, \mathrm{d}x \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} x \, \mathrm{d}x = \pi$$

(v druhom riadku výpočtu sme v prvom integrále vykonali substitúciu $x \mapsto -x$, samy si to premyslite ;)). Podobne, pre indexy $n \in \mathbb{N}$ máme

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^{0} (-x) \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\int_{\pi}^{0} x \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x$$

(opäť sme využili trik so substitúciou $x \mapsto -x$:)). Aplikujúc metódu per-partes na posledný integrál, dostaneme

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(samy overte :)). Hľadaný Fourierov rad funkcie $\tilde{f}(x)$ má teda tvar

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cdot \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Nakoľko funkcia $\tilde{f}(x)$ je spojitá na $[-\pi, \pi]$ a $\tilde{f}(-\pi) = \pi = \tilde{f}(\pi)$, podľa Dirichletovej vety platí identita

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cdot \cos nx \quad \text{pre každé } x \in [-\pi, \pi].$$

Obzvlášť, pre každé $x \in [0, \pi]$ máme rovnosť

$$x = f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cdot \cos nx.$$

Toto je požadovaný kosínusový rozvoj funkcie $f(x)$ na intervale $[0, \pi]$. Poslednú identitu možno využitím poznatku

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0, & n \text{ párne,} \\ -2, & n \text{ nepárne,} \end{cases}$$

(samy si dobre premyslite :)) zapísať v tvare

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \cos(2k-1)x, \quad x \in [0, \pi].$$

(i toto si samy veľmi dobre premyslite ;)). Špeciálne, voľbou $x = 0$ posledná rovnosť dáva identitu

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad :).$$

Príklad 4

Rozviňme funkciu $f(x) = x$ do sínusového rozvoja na intervale $[0, \pi]$.

Riešenie:

Postupujeme úplne analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Teraz hľadáme nepárne rozšírenie funkcie $f(x)$ na celý interval $[-\pi, \pi]$, t.j., funkcia $\tilde{f}(x)$ bude mať tvar $\tilde{f}(x) = x$ pre každé $x \in [-\pi, \pi]$ (samy si premyslite :)). Jej odpovedajúci Fourierov rad bude potom obsahovať len členy so sínusmi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že pre Fourierove koeficienty b_n platí

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin nx \,\mathrm{d}x = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hľadaný Fourierov rad funkcie $\tilde{f}(x)$ bude mať teda tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Keďže funkcia $\tilde{f}(x)$ je spojitá na intervale $[-\pi, \pi]$, z Dirichletovej vety vyplýva rovnosť

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \sin nx \quad \text{pre každé } x \in (-\pi, \pi).$$

Toto je zároveň i hľadaný sínusový rozvoj funkcie $f(x)$ na intervale $[0, \pi]$. Konkrétnou voľbou $x = \frac{\pi}{2}$ získame z poslednej rovnice identitu

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Nakoľko platí

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pre } n = 2k, \\ (-1)^{k-1} & \text{pre } n = 2k-1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

(samy si dobre premyslite :)), posledná identita nadobudne tvar

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k-2} \cdot \frac{2}{2k-1} \cdot (-1)^{k-1} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} \qquad :)$$

(i toto si samy dobre premyslite ;)).