Príklady na precvičovanie – limita a spojitosť funkcií viac premenných

Nasledujúce riešené príklady ilustrujú základné techniky výpočtu limít funkcií viac premenných. Obzvlášť využívame

- dosadenie,
- vhodnú úpravu (na odstránenie neurčitého výrazu),
- substitúciu (väčšinou vedie na výpočet limity funkcie jednej premennej),
- polárne (sférické) súradnice v prípade vlastného, resp. nevlastného limitného bodu.

Riešené príklady

Príklad 1 (dosadenie)

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,3,1)} (2x^2 + 7y - 3z + 5).$$

Riešenie:
Za x, y, z jednoducho dosadíme súradnice príslušného limitného bodu

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,3,1)} (2x^2 + 7y - 3z + 5) = 2 + 21 - 3 + 5 = 25.$$

Príklad 2 (substitúcia, úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2 - \sqrt{4 - xy}}{xy}.$$

Riešenie:
Zavedením substitúcie $t = xy$ prevedieme predloženú úlohu na výpočet limity

funkcie jednej premennej t. Naviac, ak $x \to 0$ a $y \to 0$, potom zrejme $t = xy \to 0 \cdot 0 = 0$. Preto po zavedení danej substitúcie máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{2-\sqrt{4-t}}{t}.$$

Nakoľko v poslednej limite nastáva neurčitosť typu $\frac{0}{0}$ (samy overte :)), vykonáme vhodnú úpravu – limitovaný zlomok napríklad rozšírime výrazom $2+\sqrt{4-t}$. Postupne dostávame

$$\lim_{t\to 0} \frac{2-\sqrt{4-t}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(2-\sqrt{4-t})\cdot(2+\sqrt{4-t})}{t\cdot(2+\sqrt{4-t})} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t\,(2+\sqrt{4-t})}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2+\sqrt{4-t}} = \frac{1}{4}$$

(samy overte detaily výpočtu ;)). Limita v zadaní príkladu má teda hodnotu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy} = \frac{1}{4}.$$

Príklad 3 (úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}.$$

Riešenie:

Vidíme, že opäť v predloženej limite nastáva neurčitosť typu $\frac{0}{0}$ (samy overte :)). To však znamená, že čitateľ i menovateľ limitovaného zlomku vieme ako polynómy rozložiť na súčin, konkrétne

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+3)} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y}{x+3} = \frac{4}{5}.$$

Príklad 4 (substitúcia)

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:
Jedná sa zrejme o neurčitosť $\frac{0}{0}$. Namiesto premenných x, y budeme uvažovať premenné t, y, kde $t = xy$. Nakoľko $(x, y) \to (0, 0)$ a $a \in \mathbb{R}$, nová limitná podmienka má tvar $(t, y) = (xy, y) \to (0 \cdot a, a) = (0, a)$ (samy si dobre premyslite ;)). Pôvodnú limitu v zadaní príkladu sme teda zavedením novej premennej t transformovali opäť na limitu z funkcie dvoch premenných. Novú limitu však vieme ľahšie vypočítať, pretože

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(t,y)\to(0,a)} \frac{\sin t}{t} \cdot y = 1 \cdot a = a \quad :).$$

Príklad 5 (substitúcia)

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{(x-4)^2 - y^2}\right)}{x^2\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}.$$

Riešenie:
Úvaha je podobná ako v predchádzajúcom príklade. Nastáva neurčitosť typu $\frac{0}{0}$. Namiesto premennej y zavedieme novú premennú $t = \sqrt{(x-4)^2 - y^2}$, ktorá zrejme spĺňa $t \to 0$ (samy si premyslite jednotlivé argumenty :)). Potom dostanávame

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{(x-4)^2 - y^2}\right)}{x^2\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} &= \lim_{(x,t)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg} t}{x^2 t} = \lim_{(x,t)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg} t}{t} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \lim_{(x,t)\to(4,0)} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Príklad 6 (polárne súradnice, úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\,x^2y^2}.$$

Riešenie:
V limite v zadaní príkladu nastáva neurčitosť $\frac{0}{0}$ (samy overte :)). Zavedieme polárne súradnice ρ, φ v okolí limitného bodu $[0,0]$, t.j.,

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Predložená limita potm nadobudne tvar

$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{1-\cos\rho^2}{\rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{1-\cos\rho^2}{\rho^4} \cdot \frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

(samy overte detaily ;)). Výraz obsahujúci ρ môžeme upraviť takto

$$\frac{1-\cos\rho^2}{\rho^4} = \frac{\overbrace{2\sin^2\frac{\rho^2}{2}}^{1-\cos\rho^2}}{\rho^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\rho^2}{2}}{\left(\frac{\rho^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\rho^2}{2}}{\frac{\rho^2}{2}}\right)^2$$

(samy si pozorne premyslite jednotlivé kroky :)). Po dosadení máme

$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{1-\cos\rho^2}{\rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \lim_{\rho\to0^+}\left(\frac{\sin\frac{\rho^2}{2}}{\frac{\rho^2}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \frac{1}{2\sin^2\varphi\cos^2\varphi},$$

nakoľko výraz v zátvorke konverguje k 1 (i toto samy overte ;)). Výsledná limita teda závisí na uhle φ, a preto neexistuje.

Príklad 7 (sférické súradnice)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z}.$$

Riešenie:
Opäť máme neurčitosť typu $\frac{0}{0}$. Zavedením sférických súradníc ukážeme, že predložená limita neexistuje. Poznamenajme, že ak bod $A \in \mathbb{R}^3$ má karteziánske súradnice x, y, z, potom jeho sférické súradnice ρ, φ, θ sú definované

ρ – dĺžka úsečky spájajúca bod A so začiatkom suradnicového systému O, $r \geq 0$,

φ – uhol (orientovaný), ktorý zviera priemet úsečky OA do roviny xy s kladným smerom osi x, $\varphi \in [0, 2\pi)$,

θ – uhol (orientovaný), ktorý zviera úsečka OA s kladným smerom osi z, $\theta \in [0, \pi]$.

Platia takéto rovnosti

$$x = \rho \cos\varphi \sin\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\theta$$

(pokúste sa samy overiť pomocou vhodného obrázku :)). V našom prípade má limitná podmienka tvar $\rho \to 0^+$, takže

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho\cos\varphi\sin\theta}{\rho\cos\varphi\sin\theta + \rho\sin\varphi\sin\theta + \rho\cos\theta}$$

$$= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta}.$$

Výsledná limita závisí na uhloch φ, θ, čo signalizuje, že neexistuje.

Príklad 8 (polárne súradnice, úprava, veta o dvoch policajtoch)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}.$$

Riešenie 1 (polárne súradnice):
Jedná sa o neurčitosť typu 0^0. Vykonáme vhodnú úpravu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{e}^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$$

(v poslednom kroku sme využili spojitosť exponenciálnej funkcie :)). V poslednej limite teraz zavedieme polárne súradnice na okolí bodu $[0,0]$, t.j., $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$. Postupne dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{\rho\to0^+} \rho^4\sin^2\!\varphi\cos^2\!\varphi\ln\rho^2 = \lim_{\rho\to0^+} \left(\rho^4\ln\rho^2\right)\cdot\left(\sin^2\!\varphi\cos^2\!\varphi\right)$$

(samy overte detaily výpočtu ;)). Limitu z časti $\rho^4 \ln \rho^2$ vypočítame po menšej úprave napríklad pomocou l'Hospitalovho pravidla, konkrétne

$$\lim_{\rho \to 0^+} \rho^4 \ln \rho^2 = 2 \cdot \lim_{\rho \to 0^+} \rho^4 \ln \rho = 2 \cdot \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\ln \rho}{\frac{1}{\rho^4}} = \left| \frac{0}{0}, \quad \text{l'Hospital} \right|$$

$$= 2 \cdot \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\frac{1}{\rho}}{-\frac{4}{\rho^5}} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{\rho \to 0^+} \rho^4 = 0.$$

Pre každú hodnotu uhla $\varphi \in [0, 2\pi)$ teda platí rovnosť

$$\lim_{\rho \to 0^+} \left(\rho^4 \ln \rho^2\right) \cdot \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\right) = 0.$$

Táto konvergencia je naviac rovnomerná vzhľadom na φ, nakoľko platí

$$\left| \left(\rho^4 \ln \rho^2\right) \cdot \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\right) - 0 \right| \leq \left|\rho^4 \ln \rho^2\right| \cdot \underbrace{\left|\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\right|}_{\leq 1} \leq \left|\rho^4 \ln \rho^2\right|$$

a výraz $|\rho^4 \ln \rho^2| \to 0$ pre $\rho \to 0^+$, ako sme ukázali vyššie (samy si dobre premyslite :)). Preto limita

$$\lim_{\rho \to 0^+} \left(\rho^4 \ln \rho^2\right) \cdot \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\right) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$$

existuje s hodnotou 0. Z toho pre limitu v zadaní príkladu na základe úvodných úprav ihneď vyplýva

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \mathrm{e}^0 = 1 \quad :).$$

Riešenie 2 (úprava, veta o dvoch policajtoch):
Limita v zadaní príkladu sa dá stanoviť i pomocou vety o dvoch policajtoch pre funkciu jednej premennej :). Je však potrebné si najprv premyslieť niekoľko skutočností. V prvom rade budeme potrebovať nerovnosť

$$2|xy| \leq x^2 + y^2.$$

Jej dôkaz nechávame na čitateľa (napríklad pomocou očividnej nerovnosti $0 \leq (|x| - |y|)^2$:)). Ďalej platí $|xy| = \sqrt{x^2 y^2}$ (samy overte ;)). Preto máme

$$2 \cdot (x^2 y^2)^{\frac{1}{2}} \leq x^2 + y^2.$$

Konvergenčná podmienka v predloženej limite hovorí, že sa s bodom $[x, y]$ blížime do bodu $[0, 0]$. To znamená, že vzdialenosť $\sqrt{x^2 + y^2}$ konverguje do nuly (samy si pozorne premyslite :)). Od istého okamihu bude teda splnená nerovnosť

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$

(i toto si samy dobre premyslite ;)). Kombináciou posledných dvoch nerovností dostaneme

$$2 \cdot (x^2 y^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Následným umocnením na kladný výraz $x^2 y^2$ získame

$$\left[2 \cdot (x^2 y^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{x^2 y^2} \leq (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} \leq 1^{x^2 y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$2^{x^2 y^2} \cdot \left[(x^2 y^2)^{x^2 y^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leq (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} \leq 1.$$

No a teraz aplikujeme vetu o dvoch policajtoch :). Vonkajšie výrazy poslednej nerovnosti totiž konvergujú do 1, nakoľko $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$ a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2^{x^2 y^2} \cdot \left[(x^2 y^2)^{x^2 y^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2^{x^2 y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[(x^2 y^2)^{x^2 y^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^0 \cdot \left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 y^2)^{x^2 y^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^0 \cdot 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

V poslednom kroku sme využili limitu funkcie jednej premennej

$$\lim_{t\to 0^+} t^t = 1,$$

pomocou substitúcie $t = x^2 y^2$ (samy overte jednotlivé argumenty :)). Podľa vety o dvoch policajtoch potom i prostredný výraz v poslednej nerovnosti musí konvergovať do 1. Preto dostávame

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = 1 \quad :).$$

Príklad 9 (úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:
Nastáva zrejme neurčitosť typu $1^{\frac{\infty}{\infty}}$. Pomocou úpravy

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}},$$

vidíme, že výraz v hranatej zátvorke konverguje k Eulerovmu číslu e (samy overte :)), kým limita exponentu je

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \frac{x}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = 1.$$

Pre hľadanú limitu teda platí

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(\infty,a)} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Príklad 10 (úprava)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

Riešenie:
Máme neurčitosť typu $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Využijeme odhad

$$0 \le \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Táto nerovnosť vyplýva z výpočtu

$$0 \le \left(|x|-|y|\right)^2,$$

$$0 \le x^2 + y^2 - 2|x| \cdot |y|,$$

$$2|x| \cdot |y| \le x^2 + y^2,$$

$$\frac{|x| \cdot |y|}{x^2 + y^2} \le \frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 \ne 0,$$

$$0 \le \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \le \frac{1}{2}.$$

Ďalej dostávame

$$0 \le \left| \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \right|^{x^2} \le \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \left| \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \right| \le \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}.$$

Avšak

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0,$$

takže podľa vety o dvoch policajtoch máme

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left| \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0$$

(samy si premyslite platnosť poslednej implikácie ;)).

Príklad 11 (polárne súradnice)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

Riešenie:
Máme neurčitosť typu $\frac{\infty}{\infty}$. Zavedieme polárne súradnice v okolí bodu $[0,0]$

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi,$$

pričom konvergenčná podmienka teraz bude $\rho\to\infty$ a $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pre body roviny s dostatočne veľkým ρ (samy si to dobre premyslite pomocou vhodného obrázku; zaujímajú nás body roviny s *veľkým kladným* x a s *veľkým kladným* y :)). Po dosadení dostaneme

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi} = 0$$

pre každú hodnotu uhla $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (samy overte :)). Treba ešte ukázať, že táto konvergencia je rovnomerná vzhľadom na φ, t.j., potrebujeme zhora ohraničiť výraz

$$\left|\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi}-0\right| = \frac{1}{\rho}\cdot\left|\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi}\right|$$

niečím, čo nezávisí na uhle φ a konverguje do nuly pre $\rho\to\infty$. Bolo by teda fajn ohraničiť zhora zlomok

$$\left|\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi}\right|.$$

To znamená ohraničiť jeho čitateľ *zhora* a jeho menovateľ *zdola* (samy si premyslite ;)). Platí

$$|\cos\varphi+\sin\varphi| \le |\cos\varphi|+|\sin\varphi| \le 2.$$

Ďalej máme

$$\cos\varphi\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi, \quad -1\le\sin 2\varphi\le 1.$$

Platia teda nerovnosti

$$-\frac{1}{2}\le\cos\varphi\sin\varphi\le\frac{1}{2}.$$

Vykonáme na nich teraz niekoľko úprav

$$-\frac{1}{2} \leq \cos\varphi \sin\varphi \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} \geq -\cos\varphi \sin\varphi \geq -\frac{1}{2},$$

$$1+\frac{1}{2} \geq 1-\cos\varphi \sin\varphi \geq 1-\frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{2} \geq 1-\cos\varphi \sin\varphi \geq \frac{1}{2}.$$

Výraz $1-\cos\varphi\sin\varphi$ je teda kladný, a preto

$$|1-\cos\varphi\sin\varphi| = 1-\cos\varphi\sin\varphi \geq \frac{1}{2}.$$

Našli sme teda ohraničenia

$$|\cos\varphi+\sin\varphi| \leq 2, \qquad |1-\cos\varphi\sin\varphi| \geq \frac{1}{2},$$

ktoré ihneď implikujú nerovnosť

$$\left|\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi}\right| = \frac{|\cos\varphi+\sin\varphi|}{|1-\cos\varphi\sin\varphi|} \leq \frac{2}{1/2} = 4.$$

Potom dostávame odhad

$$\left|\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi} - 0\right| = \frac{1}{\rho}\cdot\left|\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi}\right| \leq \frac{4}{\rho}.$$

Okrem toho $\lim\limits_{\rho\to\infty} \frac{4}{\rho} = 0$, ako sme si želali. Preto limita v zadaní príkladu existuje a platí

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

Príklad 12

Určme body nespojitosti funkcie

$$f(x,y) = \frac{x^2+3y}{x^2-3y}.$$

Riešenie:
Keďže funkcia $f(x,y)$ je poskladaná z elementárnych funkcií, bude nespojitá práve v bodoch, v ktorých nie je definovaná, t.j. všade tam, kde platí rovnosť $x^2 - 3y = 0$. Množina bodov nespojitosti $f(x,y)$ je teda graf funkcie $y = \frac{x^2}{3}$.

Príklad 13
Nájdime body nespojitosti funkcie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Riešenie:
Zrejme jediný problematický bod je $[0,0]$. Pozrieme sa na limitu funkcie $f(x,y)$ v tomto bode. Platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Zavedením polárnych súradníc v okolí $[0,0]$ dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to0^+} \cos\varphi \sin\varphi = \cos\varphi \sin\varphi.$$

Výsledná limita závisí na uhle φ, preto $f(x,y)$ nemá limitu v bode $[0,0]$. Teda funkcia $f(x,y)$ nie je spojitá v $[0,0]$, všade inde je spojitá (prečo? :)).

Pri počítaní limít z funkcií viac premenných sme väčšinou uvažovali situáciu typu

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [\ldots],$$

t.j., premenné x,y sa *súčasne a nezávisle* blížia k číslam a,b. Niekedy sa vyskytne situácia typu (tzv. *opakované* alebo tiež *dvojnásobné* limity)

$$\lim_{x\to a} \left[\lim_{y\to b}[\ldots]\right], \quad \text{resp. } \lim_{y\to b} \left[\lim_{x\to a}[\ldots]\right],$$

t.j., premenné x, y sa opäť nezávisle blížia k číslam a, b, ale *nie súčasne* – najprv sa pohybujeme s premennou y, a až potom sa pohybujeme s premennou x, resp. naopak. Táto drobná odlišnosť môže dramaticky zmeniť charakter počítanej limity.

Príklad 14

Vypočítajme limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right],$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right].$$

Riešenie:

Prvá limita neexistuje. Odkiaľ berieme podozrenie? Podozrivá je „nesúrodosť“ členov obsiahnutých v limitovanom výraze. Člen x^2y^2 je 4. rádu, naproti tomu člen $(x-y)^2$ je iba 2. rádu a navyše sa vyskytuje iba v menovateli. Ak by sme s premennými konvergovali do $\pm\infty$, bolo by všetko v poriadku, nakoľko člen 4. rádu by po istom čase prevážil člen 2. rádu. Avšak my ideme s oboma premennými do nuly, takže dominantným sa pre malinké x, y stáva člen 2. rádu – *pokiaľ úplne nevymizne.* Posledná poznámka je podstatná. Ak budeme totiž cestovať po trase $y = x$ (to iste môžeme, nakoľko táto trasa leží v definičnom obore limitovaného výrazu pre $x, y \neq 0$), dominantný člen $(x-y)^2$ vymizne a dostaneme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1.$$

Ak však pôjdeme po ceste $2y = x$ (opäť môžeme), člen druhého rádu nevymizne a výrazne tým zamieša karty

$$\lim_{y\to 0} \frac{4y^4}{4y^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{4y^2}{4y^2+1} = 0.$$

Tým sme našu domnienku o neexistencii prvej limity potvrdili :).

Druhá limita sa vypočíta tak, že premennú x „ľubovoľne zafixujeme“ a vypočítame

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

ako limitu jednej premennej y (x chápeme ako konštantu). Táto limita existuje, keďže

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\frac{0}{x^2}=0.$$

Následne tento výsledok limitujeme podľa x

$$\lim_{x\to 0}0=0.$$

Teda

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right]=0.$$

Situácie dopadne podobne aj v prípade tretej limity, nakoľko premenné x, y vystupujú v limitovanom výraze symetricky, t.j.,

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right]=0.$$

Zistili sme teda, že napriek tomu, že limita z danej funkcie neexistuje, obidve opakované limity existujú a dokonca sa rovnajú :).

Príklad 15

Stanovme limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right],$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right].$$

Riešenie:
Prvá limita existuje, nakoľko $\sin(1/x)\sin(1/y)$ je ohraničená funkcia a výraz $x+y$ konverguje do nuly. Preto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$$

(samy overte :)). Avšak ani jedna z dvojnásobných limít však neexistuje. Uvažujme napríklad limitu

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right].$$

Premennú x zafixujeme. Potom

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right).$$

Druhý sčítanec konverguje do nuly (sínusová časť je ohraničená, $y\to 0$). Limita prvej časti neexistuje ($\sin(1/y)$ nemá limitu pre $y\to 0$). To znamená, že ani celková limita neexistuje.

Možno sa zdá, že je nutné zafixovať také x, aby limita

$$\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

existovala a potom bude všetko v poriadku :). Iste také x existuje, napríklad $x=\frac{1}{\pi}$. Treba si však uvedomiť, o čo tu v skutočnosti ide. Možno to prirovnať k akejsi štafete :). Prvé vyštartuje y a po dobehnutí (v našom prípade do bodu 0) odovzdá svoj kolík (t.j. výsledok svojho limitovania) premennej x. Preberanie kolíka musí prebehnúť za akýchkoľvek podmienok – premenná y musí byť schopná odovzdať svoj kolík po prebehnutí *každej dostupnej trasy* a pri *každej dostupnej pozícií* premennej x. (dostupná trasa a dostupná pozícia leží v definičnom obore funkcie). Inými slovami, limita podľa y musí existovať pre *každé* zafixované x. Podobne, nech premenná x preberie kolík kdekoľvek, musí ho opäť šťastlivo priniesť do cieľa (zas po každej prípustnej trase). V našom prípade je však premenná y tak nemožná, že svoj kolík *skoro vždy stratí*, t.j., kolík, teda výsledok po limitovaní podľa y, *skoro nikdy neexistuje* :((až na pár vzácnych okamihov, keď ju premenná x čaká na vhodných pozíciách, napr. $x=\frac{1}{\pi}$). Takže o nejakom zdarnom dopravení kolíka do cieľa nemože byť ani reč; premenná x nemá čo priniesť do cieľa :-/. Preto uvedená dvojnásobná limita neexistuje. Podobne je to i v prípade tretej limity (tam zas zlyháva premenná x so svojím kolíkom :)).