

Príklady na precvičovanie – lokálne, globálne a viazané extrémny funkcií viac premenných

Riešené príklady – lokálne extrémny

Príklad 1

Určme všetky lokálne extrémny funkcie

$$f(x, y) = 4x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Riešenie:

Funkcia $f(x, y)$ má parciálne derivácie prvého rádu definované vo všetkých bodoch svojho definičného oboru, preto sa hľadané lokálne extrémny môžu nadobúdať iba v jej stacionárnych bodoch. Zistíme teda, kde sa nulujú parciálne derivácie $f'_x(x, y)$ a $f'_y(x, y)$

$$f'_x(x, y) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \implies x^2 = \frac{1}{4} \implies x = \pm \frac{1}{2},$$

$$f'_y(x, y) = -1 + \frac{1}{y^2} = 0 \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1.$$

Funkcia $f(x, y)$ má teda štyri stacionárne body, a to

$$\left[\frac{1}{2}, 1 \right], \left[-\frac{1}{2}, -1 \right], \left[-\frac{1}{2}, 1 \right], \left[\frac{1}{2}, -1 \right]$$

(samy overte :)). Ďalej vyšetříme definitnosť Hessovej matice $H_f(x, y)$ funkcie $f(x, y)$ v týchto bodoch. Pripomeňme, že Hessova matica $H_f(x, y)$ (nazývaná tiež hessián :)) je definovaná

$$H_f(x, y) := \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix},$$

a teda v našom prípade

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

(samy overte ;)). Pre jednotlivé stacionárne body postupne máme

$$H_f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ indefinitná,}$$

$$H_f\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ indefinitná,}$$

$$H_f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} < 0,$$

$$H_f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

(i toto samy overte :)). V bodoch $[\frac{1}{2}, 1]$ a $[-\frac{1}{2}, -1]$ teda lokálny extrém nenastáva, kým v bode $[-\frac{1}{2}, 1]$ má funkcia $f(x, y)$ ostré lokálne maximum s hodnotou $f(-\frac{1}{2}, 1) = -6$ a v bode $[\frac{1}{2}, -1]$ má funkcia $f(x, y)$ ostré lokálne minimum s hodnotou $f(\frac{1}{2}, -1) = 6$ (nech čitateľa nepomýli, že lokálne maximum je menšie než lokálne minimum ;)).

Príklad 2

Nájďme všetky lokálne extrémny funkcie

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x, y, z > 0.$$

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Stanovíme všetky stacionárne body funkcie $f(x, y, z)$, t.j.,

$$f'_x(x, y, z) = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \implies 4x^2 = y^2,$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \implies y^3 = 2xz^2,$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \implies z^3 = y$$

(samy overte jednotlivé výpočty :)). Riešime teda sústavu rovníc

$$4x^2 = y^2, \quad y^3 = 2xz^2, \quad z^3 = y.$$

Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že za predpokladu $x, y, z > 0$ má táto sústava rovníc jediné riešenie $[\frac{1}{2}, 1, 1]$. Funkcia $f(x, y, z)$ má teda jeden stacionárny bod $[\frac{1}{2}, 1, 1]$. Hessova matica $H_f(x, y, z)$ funkcie $f(x, y, z)$ má tvar

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{x^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

(samy overte ;)). Dosadením daného stacionárneho bodu funkcie $f(x, y, z)$ do výrazu $H_f(x, y, z)$ získame číselnú maticu a napríklad podľa jej hlavných minorov zistíme jej definitnosť, konkrétne

$$H_f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} > 0$$

(i toto samy overte :)). Funkcia $f(x, y, z)$ má preto v bode $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ ostré lokálne minimum s hodnotou $f(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$:).

Príklad 3

Stanovme všetky lokálne extrémny funkcií

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 + y^3, \quad \text{b) } g(x, y) = x^2 + y^4.$$

Riešenie:

a) Keďže $f'_x(x, y) = 2x = 0$ a $f'_y(x, y) = 3y^2 = 0$, vidíme, že funkcia $f(x, y)$ má jediný stacionárny bod $[0, 0]$. Príslušný hessián $H_f(x, y)$ funkcie $f(x, y)$ má tvar

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

(samy overte :)). V bode $[0, 0]$ potom máme

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matica $H_f(0, 0)$ má zrejme vlastné čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$. Je preto pozitívne semidefinitná, avšak nie je pozitívne definitná. V tomto prípade bohužiaľ nevieme pomocou hessiánu $H_f(0, 0)$ rozhodnúť, či v bode $[0, 0]$ má funkcia $f(x, y)$ lokálny extrém :(. Musíme použiť priamo definíciu lokálneho extrému. Platí $f(0, 0) = 0$. Dokážeme, že v stacionárnom bode $[0, 0]$ nenastáva pre funkciu $f(x, y)$ lokálny extrém. Inými slovami, ukážeme, že v každom okolí bodu $[0, 0]$ existuje bod $[x_1, y_1]$ taký, že $f(x_1, y_1) > 0$, a zároveň bod $[x_2, y_2]$ taký, že $f(x_2, y_2) < 0$. Pre $\varepsilon > 0$ uvažujme okolie O_ε bodu $[0, 0]$ tvaru $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ (okolie indukované euklidovskou metrikou ϱ_E). Body

$$[x_1, y_1] := \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad \text{a} \quad [x_2, y_2] := \left[0, -\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

zrejme patria do okolia O_ε (samy overte :)). Navyiac platí

$$f(x_1, y_1) = \frac{\varepsilon^3}{8} > 0 \quad \text{a} \quad f(x_2, y_2) = -\frac{\varepsilon^3}{8} < 0$$

(i toto samy overte ;)). Posledné nerovnosti platia pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, t.j., pre každé okolie O_ε bodu $[0, 0]$. Preto v bode $[0, 0]$ funkcia $f(x, y)$ nemá lokálny extrém funkcie (bod $[0, 0]$ sa v tomto prípade nazýva *sedlový* :)).

b) Analogickou úvahou ako v úlohe a) zistíme, že $g(x, y)$ má jediný stacionárny bod $[0, 0]$. Pre odpovedajúcu Hessovu maticu $H_g(x, y)$ platí

$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \implies H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(samy overte details ;)). Ihneď vidíme vlastné čísla matice $H_g(0, 0)$, konkrétne $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$. Matica $H_g(0, 0)$ je teda opäť pozitívne semidefinitná, ale nie je pozitívne definitná. Charakter bodu $[0, 0]$ musíme preto vyšetriť na základe definície lokálneho extrému. Platí $g(0, 0) = 0$ a pre $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ je $g(x, y) = x^2 + y^4 \geq 0$. Teda $g(x, y) \geq g(0, 0)$ pre každé $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, čo znamená, že funkcia $g(x, y)$ nadobúda v bode $[0, 0]$ svoje lokálne minimum s hodnotou $g(0, 0) = 0$. Navyiac, toto lokálne minimum je ostré (samy si premyslite všetky tieto závery ;)).

Riešené príklady – globálne extrémym

Príklad 4

Určme najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$$f(x, y) = xy^2(4 - x - y)$$

na množine $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničenej priamkami $x = 0$, $y = 0$ a $x + y = 6$.

Riešenie:

Množina M je zrejme zjednotením vnútra a hranice rovinného trojuholníka s vrcholmi v bodoch $A = [0, 0]$, $B = [6, 0]$ a $C = [0, 6]$ (samy nakreslite :)). Nájdeme stacionárne body funkcie $f(x, y)$ ležiace vo vnútri množiny M , t.j.,

$$f'_x(x, y) = y^2(4 - x - y) - xy^2 = 0 \implies y^2(4 - x - y) = xy^2,$$

$$f'_y(x, y) = 2xy(4 - x - y) - xy^2 = 0 \implies 2xy(4 - x - y) = xy^2,$$

$$x > 0, \quad y > 0, \quad 6 > x + y$$

(samy overte ;)). Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že tento systém rovníc a nerovnic má jediné riešenie $x = 1$ a $x = 2$:). Funkcia $f(x, y)$ má teda vo vnútri množiny M jediný stacionárny bod $[1, 2]$ s hodnotou $f(1, 2) = 4$. Skúmame teraz funkčné hodnoty na hranici ∂M množiny M .

- úsečka AB – $y = 0$ a $x \in [0, 6]$ (symbol $[..]$ teraz znamená uzavretý interval). Na úsečke AB platí $f(x, y) = f(x, 0) = 0$, t.j., funkcia $f(x, y)$ je konštantná s hodnotou 0.
- úsečka AC – $x = 0$ a $y \in [0, 6]$. Na úsečke AC platí $f(x, y) = f(0, y) = 0$, t.j., funkcia $f(x, y)$ je opäť konštantná s hodnotou 0.
- úsečka CB – $y = 6 - x$ a $x \in [0, 6]$. Na úsečke CB platí $f(x, y) = f(x, 6 - x) = -2x(x - 6)^2$, t.j., funkcia $f(x, y)$ sa správa ako funkcia jednej premennej x . Označíme ju $g(x) := -2x(x - 6)^2$. Je potrebné nájsť globálne extrémym funkcie $g(x)$ na uzavretom intervale $[0, 6]$. Platí

$$g'(x) = -2(x - 6)(3x - 6) = 0 \implies x = 6, \text{ resp. } x = 2.$$

V otvorenom intervale $(0, 6)$ má teda funkcia $g(x)$ len jeden stacionárny bod $x = 2$ s hodnotou $g(2) = -64$. Z pohľadu funkcie $f(x, y)$ sa jedná o bod $[2, 4]$ a $f(2, 4) = -64$. V krajných bodoch intervalu $[0, 6]$ platí $g(0) = f(C) = f(0, 6) = 0$ a $g(6) = f(B) = f(6, 0) = 0$.

Vidíme teda, že globálne maximum funkcie $f(x, y)$ sa nadobúda v bode $[1, 2]$ s hodnotou $f(1, 2) = 4$, kým globálne minimum funkcie $f(x, y)$ sa nadobúda v bode $[2, 4]$ s hodnotou $f(2, 4) = -64$:).

Príklad 5

Určme najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$$

na množine $M \subseteq \mathbb{R}^2$ danej reláciou $x^2 + y^2 \leq 16$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Množina M je zrejme uzavretý kruh so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 4 (samy zakreslite ;)). Nájdem stacionárne body funkcie $f(x, y)$ ležiace vo vnútri tohto kruhu

$$f'_x(x, y) = -2x = 0, \quad f'_y(x, y) = -2y + 2 = 0, \quad x^2 + y^2 < 16.$$

Uvedeným podmienkam vyhovuje jediný bod $[0, 1]$ (samy overte :)). Funkcie $f(x, y)$ má teda vo vnútri M jediný stacionárny bod $[0, 1]$ s hodnotou $f(0, 1) = 1$. Ďalej sa pozrieme na lokálne extrémym funkcie $f(x, y)$ ležiace na hranici množiny M , t.j. na kružnici $x^2 + y^2 = 16$.

- horná polkružnica $-y \geq 0$, a teda $y = \sqrt{16 - x^2}$. Funkcia $f(x, y)$ sa správa ako funkcia jednej premennej x , konkrétne

$$g(x) := f(x, \sqrt{16 - x^2}) = -16 + 2\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in [-4, 4].$$

(samy overte :)). Hľadáme globálne extrémym funkcie $g(x, y)$ na uzavretom intervale $[-4, 4]$. Keďže

$$g'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad \implies \quad x = 0,$$

funkcia $g(x)$ má v otvorenom intervale $(-4, 4)$ jeden stacionárny bod $x = 0$ s hodnotou $g(0) = -8$. Z hľadiska funkcie $f(x, y)$ sa jedná o bod $[0, \sqrt{16 - 0^2}] = [0, 4]$ a $f(0, 4) = -8$. V krajných bodoch intervalu $[-4, 4]$ máme $g(-4) = f(-4, 0) = -16$ a $g(4) = f(4, 0) = -16$.

- dolná polkružnica $-y \leq 0$, a teda $y = -\sqrt{16 - x^2}$. Postupujeme podobne. Funkcia $f(x, y)$ sa správa ako funkcia jednej premennej x , t.j.,

$$h(x) := f(x, -\sqrt{16 - x^2}) = -16 - 2\sqrt{16 - x^2}, \quad x \in [-4, 4].$$

Hľadáme globálne extrémny funkcie $h(x)$ na intervale $[-4, 4]$. Platí

$$h'(x) = \frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad \implies \quad x = 0.$$

Hodnota $h(x)$ v stacionárnom bode $x = 0$ je $h(0) = -24$. V reči funkcie $f(x, y)$ sa jedná o bod $[0, -\sqrt{16 - 0^2}] = [0, -4]$ a $f(0, -4) = -24$. V krajných bodoch intervalu $[-4, 4]$ platí $h(-4) = f(-4, 0) = -16$ a $h(4) = f(4, 0) = -16$.

Záver je teda taký, že globálne maximum funkcie $f(x, y)$ na množine M predstavuje hodnota 1 a nadobúda sa v bode $[0, 1]$, kým globálne minimum funkcie $f(x, y)$ na množine M je hodnota -24 a nadobúda sa v bode $[0, -4]$.

Príklad 6

Pomocou metódy vrstevníc stanovme najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x + y$ na množine $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Riešenie:

Zakreslením množiny M zistíme, že sa jedná o štvorec s vrcholmi v bodoch $A = [-1, -1]$, $B = [1, -1]$, $C = [1, 1]$ a $D = [-1, 1]$. Vrstevnice funkcie $f(x, y)$ sú zrejme priamky $x + y = c$, $c \in \mathbb{R}$, t.j., rovnobežné s osou druhého a štvrtého kvadrantu, pričom vrstevnica odpovedajúca danej hodnote c prechádza bodmi $[0, c]$ a $[c, 0]$ (samy si premyslite ;)). Všimnime si, že poloha vrstevnice $x + y = c$ priamo určuje hodnotu funkcie $f(x, y)$ – všade na vrstevnici $x + y = c$ má $f(x, y)$ rovnakú hodnotu rovnú c . Zaujímajú nás iba tie vrstevnice, ktoré pretínajú štvorec M . Nie je ťažké si uvedomiť, že posunom vrstevníc smerom od vrchola C k vrcholu A bude hodnota parametra c *klesať*. Teda maximálne c sa nadobúda na vrstevnici prechádzajúcej vrcholom $C = [1, 1]$, pričom v tomto prípade $c = 1 + 1 = 2$. Na vrstevnici $x + y = 2$ bude preto funkcia $f(x, y)$ nadobúdať svoju najväčšiu hodnotu na M rovnú 2. Podobne, minimálne c je pre vrstevnicu prechádzajúcu vrcholom $A = [-1, -1]$, pričom $c = -1 - 1 = -2$. Preto najmenšia hodnota

funkcie $f(x, y)$ na množine M je rovná -2 (samy si dobre premyslite jednotlivé argumenty :)). Metóda vrstevníc je užitočnou pri zisťovaní globálnych extrémov funkcií v prípade, ak vrstevnice sú pomerne jednoduché krivky, napríklad priamky, kružnice apod. Tento postup funguje i pre funkcie troch a viac premenných. Nakoniec poznamenajme, že rovnaké výsledky by sme dostali i pomocou obvyklého aparátu v predchádzajúcich príkladoch :).

Riešené príklady – viazané lokálne extrémny

Príklad 7

Určme lokálne extrémny funkcie

$$f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$$

za prítomnosti väzby $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť metódou Lagrangeových multiplikátorov. Zostavíme Lagrangeovu funkciu $L(x, y)$ prislúchajúcu funkcii $f(x, y)$ a danej väzbe

$$L(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2 + \lambda \cdot (x^2 + 2x + y^2).$$

Stanovíme stacionárne body funkcie $L(x, y)$ a neznámy Lagrangeov multiplikátor λ . Postupne platí

$$L'_x(x, y) = \sqrt{3} + 2\lambda x + 2\lambda = 0 \quad \implies \quad x = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2\lambda},$$

$$L'_y(x, y) = -1 + 2\lambda y = 0 \quad \implies \quad y = \frac{1}{2\lambda}.$$

(samy overte :)). Tieto vyjadrenia neznámych x a y pomocou neznámej λ dosadíme do väzbovej podmienky a dostaneme (väzbovú podmienku kvôli zjednodušeniu výpočtov upravíme na štvorec :))

$$x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad \iff \quad (x + 1)^2 + y^2 = 1$$

↓

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1$$

↓

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1 \implies \lambda = \pm 1$$

(samy overte detaily výpočtov ;)). Lagrangeova funkcia $L(x, y)$ má teda v závislosti na multiplikátore λ dva stacionárne body, konkrétne

$$\text{pre hodnotu } \lambda_1 = -1 \implies A_1 = \left[-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right],$$

$$\text{pre hodnotu } \lambda_2 = 1 \implies A_2 = \left[-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

(i toto samy overte :)). Vyšetříme teraz definitnosť druhého diferenciálu funkcie $L(x, y)$ v bodoch A_1 a A_2 s ohľadom na väzbovú podmienku. Pre diferenciál $d^2L(x, y)$ všeobecne platí

$$L''_{xx}(x, y) = 2\lambda, \quad L''_{xy}(x, y) = L''_{yx}(x, y) = 0, \quad L''_{yy}(x, y) = 2\lambda$$

↓

$$d^2L(x, y) = 2\lambda \cdot (dx)^2 + 2\lambda \cdot (dy)^2$$

(samy overte :)). Diferencujeme teraz väzbovú podmienku

$$d(x^2 + 2x + y^2) = 0 \implies 2xdx + 2dx + 2ydy = 0 \implies (x+1)dx + ydy = 0$$

(pozri poznámku na konci tohto dokumentu :)). Uvažujme stacionárny bod A_1 a k nemu odpovedajúci Lagrangeov multiplikátor λ_1 . Tieto vstupné dáta dosadíme jednak do diferenciálu $d^2L(x, y)$, a jednak do diferencovanej väzbovej podmienky, t.j.,

$$d^2L(A_1) = 2\lambda_1 \cdot (dx)^2 + 2\lambda_1 \cdot (dy)^2 = -2(dx)^2 - 2(dy)^2,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot dy = 0 \implies dy = \sqrt{3} dx.$$

Posledná rovnosť nám udáva vzťah medzi prírastkami dx a dy v bode A_1 indukovaný väzbovou podmienkou. Vo vyjadrení $d^2L(A_1)$ s ohľadom na väzbu nie sú teda veličiny dx a dy nezávislé, pričom platí

$$d^2L(A_1) = -2(dx)^2 - 2 \cdot \underbrace{3(dx)^2}_{(dy)^2} = -8(dx)^2$$

(samy si všetko pozorne premyslite :)). Vidíme, že druhý diferenciál $d^2L(A_1)$ je za prítomnosti väzbovej podmienky negatívne definitný, a preto v bode A_1 má funkcia $f(x, y)$ (viazané) ostré lokálne maximum vzhľadom na väzbovú podmienku v zadaní príkladu s hodnotou $f(A_1) = 4 - \sqrt{3}$. Podobným spôsobom vyšetříme i stacionárny bod A_2 s multiplikátorom λ_2 . Máme

$$d^2L(A_2) = 2\lambda_2 \cdot (dx)^2 + 2\lambda_2 \cdot (dy)^2 = 2(dx)^2 + 2(dy)^2,$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot dy = 0 \quad \implies \quad dy = \sqrt{3} dx$$

↓

$$d^2L(A_2) = 2(dx)^2 + 2 \cdot \underbrace{3(dx)^2}_{(dy)^2} = 8(dx)^2$$

(samy overte ;)). Nakoľko je druhý diferenciál $d^2L(A_2)$ pozitívne definitný, v bode A_2 má funkcia $f(x, y)$ (viazané) ostré lokálne minimum vzhľadom na predpísanú väzbu s hodnotou $f(A_2) = -\sqrt{3}$:).

Príklad 8

Nájdime lokálne extrémny funkcie $f(x, y) = \ln(x + y)$ vzhľadom na množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$ danú podmienkou $xy = 1$.

Riešenie:

Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom príklade. Zostrojíme príslušnú Lagrangeovu funkciu $L(x, y)$

$$L(x, y) = \ln(x + y) + \lambda \cdot (xy - 1)$$

(vázbovú podmienku sme upravili na tvar $xy - 1 = 0$). Stanovíme stacionárne body funkcie $L(x, y)$, ktoré spĺňajú predpísanú väzbovú podmienku, t.j.,

$$L'_x(x, y) = \frac{1}{x+y} + \lambda y = 0 \implies -\frac{1}{x+y} = \lambda y,$$

$$L'_y(x, y) = \frac{1}{x+y} + \lambda x = 0 \implies -\frac{1}{x+y} = \lambda x.$$

Z týchto dvoch rovníc napríklad máme $\lambda x = \lambda y$, z čoho $x = y$ (keďže $\lambda \neq 0$, samy si premyslite prečo :)). Dosadením do väzbovej podmienky $xy = 1$ dostaneme $x^2 = 1$, a tak $x = \pm 1$ a $y = \pm 1$. Hodnota $x = -1$ nevyhovuje, nakoľko bod $[-1, -1]$ nepatrí do definičného oboru funkcie $L(x, y)$ a ani funkcie $f(x, y)$. Lagrangeova funkcia $L(x, y)$ má teda jediný stacionárny bod $A = [1, 1]$ ležiaci v množine M . Tomuto bodu odpovedá Lagrangeov multiplikátor $\lambda = -\frac{1}{2}$ (samy overte ;)). Aby sme sa zistili, či v tomto bode má funkcia $f(x, y)$ viazaný lokálny extrém (vzhľadom na množinu M), je potrebné zostrojiť druhý diferenciál $d^2L(A)$ s ohľadom na väzbovú podmienku $xy = 1$. Postupne dostávame

$$L''_{xx}(A) = -\frac{1}{(x+y)^2} \Big|_A = -\frac{1}{4}, \quad L''_{yy}(A) = -\frac{1}{(x+y)^2} \Big|_A = -\frac{1}{4},$$

$$L''_{xy}(A) = L''_{yx}(1, 1) = -\frac{1}{(x+y)^2} + \lambda \Big|_A = -\frac{3}{4}$$

↓

$$d^2L(A) = -\frac{1}{4} (dx)^2 - \frac{3}{2} dx dy - \frac{1}{4} (dy)^2$$

(samy overte :)). Diferencujeme ešte väzbovú podmienku v bode A . Platí

$$d(xy - 1) = 0 \implies y dx + x dy = 0 \xrightarrow{x=y=1} dy = -dx$$

(i toto samy overte :)). Diferenciál $d^2L(A)$ má preto vzhľadom na množinu M v zadaní príkladu tvar

$$d^2L(A) = -\frac{1}{4} (dx)^2 - \frac{3}{2} (dx) \cdot \underbrace{(-dx)}_{dy} - \frac{1}{4} \cdot \underbrace{(-dx)^2}_{(dy)^2} = (dx)^2.$$

Kvadratická forma $d^2L(A)$ je teda pozitívne definitná, a preto má funkcia $f(x, y)$ v bode A viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(A) = \ln 2$.

Poznamenanajme, že úloha sa dala riešiť i tak, že z väzbovej podmienky $xy = 1$ vyjadríme napríklad premenú $y = \frac{1}{x}$ a dosadíme ju do funkcie $f(x, y)$. Získame tak funkciu jednej premennej $g(x) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$ a štandardným spôsobom hľadáme jej lokálne extrémum. Nechávame na čitateľa, aby overil, že dostaneme rovnaký výsledok :).

Príklad 9

Zistíme viazané lokálne extrémum funkcie

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

za prítomnosti väzieb $x + y - 3z + 7 = 0$ a $x - y + z + 3 = 0$.

Riešenie:

V tomto prípade máme dve väzbové podmienky, a teda v príslušnej Lagrangeovej funkcii $L(x, y, z)$ sa objavia dva multiplikátory λ a ω

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \cdot (x + y - 3z + 7) + \omega \cdot (x - y + z + 3).$$

Uuríme stacionárne body funkcie $L(x, y, z)$ vyhovujúce predpísaným väzbám

$$L'_x(x, y, z) = 2x + \lambda + \omega = 0 \implies x = -\frac{\lambda + \omega}{2},$$

$$L'_y(x, y, z) = 2y + \lambda - \omega = 0 \implies y = \frac{\omega - \lambda}{2},$$

$$L'_z(x, y, z) = 2z - 3\lambda + \omega = 0 \implies z = \frac{3\lambda - \omega}{2}.$$

Získané vyjadrenia neznámych x, y, z pomocou λ a ω dosadíme do väzbových podmienok a po úpravách dostaneme

$$-11\lambda + 3\omega + 14 = 0, \quad \lambda - \omega + 2 = 0$$

(samý overte ;)). Táto sústava má jediné riešenie $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ a $\omega = \frac{9}{2}$, z čoho následne $x = -\frac{7}{2}$, $y = 1$ a $z = \frac{3}{2}$ (i toto samý overte ;)). Funkcia $L(x, y, z)$

teda má jeden stacionárny bod $A = \left[-\frac{7}{2}, 1, \frac{3}{2}\right]$ spĺňajúci väzbové podmienky v zadaní príkladu. Zostrojíme na druhý diferenciál funkcie $L(x, y, z)$ v bode A . Postupne máme

$$L''_{xx}(A) = L''_{yy}(A) = L''_{zz}(A) = 2,$$

$$L''_{xy}(A) = L''_{yx}(A) = L''_{xz}(A) = L''_{zx}(A) = L''_{yz}(A) = L''_{zy}(A) = 0$$

(samy overte :)). Platí teda

$$d^2L(A) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2.$$

Ďalej diferencujeme väzbové podmienky v bode A a nájdeme vzťahy medzi prírastkami dx , dy a dz , konkrétne

$$d(x + y - 3z + 7) = 0 \implies dx + dy - 3dz = 0,$$

$$d(x - y + z + 3) = 0 \implies dx - dy + dz = 0.$$

Z tohto napríklad máme $dy = 2dx$ a $dz = dx$. Dosadením do získaného vyjadrenia druhého diferenciálu $d^2L(A)$ dostaneme kvadratickú formu iba jednej premennej dx , ktorá je pozitívne definitná

$$d^2L(A) = 2(dx)^2 + 2 \cdot \underbrace{4(dx)^2}_{(dy)^2} + 2 \cdot \underbrace{(dx)^2}_{(dz)^2} = 12(dx)^2 > 0 \quad :).$$

Funkcia f v bode A viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(A) = \frac{31}{2}$. Všimnime si, že tento výsledok vyplýva i na základe definitnosti diferenciálu $d^2L(A)$ bez toho, aby sme uvažovali väzbové podmienky, keďže i kvadratická forma troch premenných dx , dy a dz

$$d^2L(A) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2$$

je pozitívne definitná (samy si dobre premyslite :)). Toto pozorovanie komentujeme i na konci nasledujúceho príkladu.

Príklad 10

Určme viazané lokálne extrémny funkcie

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

za prítomnosti väzieb $x + 2y + 3z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Riešenie:

Príslušnú Lagrangeova funkcia $L(x, y, z)$ má tvar

$$L(y, x, z) = xy^2z^3 + \lambda \cdot (x + 2y + 3z - 6).$$

Stacionárne body funkcie $L(x, y, z)$ rešpektujúce predpísané väzby určíme z nasledujúcej sústavy rovníc a nerovniíc

$$L'_x(x, y, z) = y^2z^3 + \lambda = 0,$$

$$L'_y(x, y, z) = 2xyz^3 + 2\lambda = 0,$$

$$L'_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + 3\lambda = 0,$$

$$x + 2y + 3z = 6, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Nechávame na čitateľa, aby sa presvedčil, že tento systém relácií má jediné riešenie $x = y = z = 1$ a $\lambda = -1$:). Kandidátom na viazaný extrém funkcie $f(x, y, z)$ je teda bod $A = [1, 1, 1]$. Aby sme zistili jeho charakter, vyšetříme druhý diferenciál $d^2L(A)$ funkcie $L(x, y, z)$ v bode A s ohľadom na predpísané väzbové podmienky. Diferenciál $d^2L(A)$ má tvar

$$\begin{aligned} d^2L(A) &= L''_{xx}(A) \cdot (dx)^2 + L''_{yy}(A) \cdot (dy)^2 + L''_{zz}(A) \cdot (dz)^2 \\ &\quad + 2L''_{xy}(A) \cdot dx dy + 2L''_{xz}(A) \cdot dx dz + 2L''_{yz}(A) \cdot dy dz. \end{aligned}$$

Potrebuje teda vypočítať všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie $L(x, y, z)$ v bode A . Platí

$$L''_{xx}(A) = 0, \quad L''_{yy}(A) = 2, \quad L''_{zz}(A) = 6,$$

$$L''_{xy}(A) = 2, \quad L''_{xz}(A) = 3, \quad L''_{yz}(A) = 6$$

(samý overte ;)). Po dosadení do výrazu pre $d^2L(A)$ dostaneme

$$d^2L(A) = 2(dy)^2 + 6(dz)^2 + 4dx dy + 6dx dz + 12dy dz.$$

Jedná sa teda o kvadratickú formu troch premenných dx , dy a dz . Musíme si však uvedomiť, že prírastky dx , dy , dz nie sú vzájomne nezávislé. Môžeme s nimi hýbať iba v súlade s väzbovými podmienkami v zadaní príkladu.

Vzťah medzi dx , dy a dz získame tak, že diferencujeme predpísanú väzbovú podmienku v bode A , t.j.,

$$d(x + 2y + 3z - 6) = 0 \implies dx + 2dy + 3dz = 0,$$

z čoho napríklad $dx = -2dy - 3dz$. To má za následok redukciu $d^2L(A)$ na kvadratickú formu dvoch premenných dy a dz . Konkrétne, po dosadení a úprave získame vyjadrenie

$$d^2L(A) = -6(dy)^2 - 12(dz)^2 - 12dydz$$

(samy overte :)). Až teraz skúmame definitnosť formy $d^2L(A)$:). Jej matica

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

je negatívne definitná (samy overte pomocou hlavných minorov ;)). V bode A má teda funkcia $f(x, y, z)$ vzhľadom na predpísané väzby (viazané) ostré lokálne maximum s hodnotou $f(A) = 1$.

Tento príklad ilustruje nutnosť rešpektovania väzbovej podmienky pri skúmaní definitnosti diferenciálu $d^2L(A)$. Ak by sme totiž o definitnosti $d^2L(A)$ rozhodovali na základe jeho všeobecného vyjadrenia

$$d^2L(A) = 2(dy)^2 + 6(dz)^2 + 4dxdy + 6dxdz + 12dydz,$$

bez ohľadu na prítomnú väzbu $x + 2y + 3z - 6 = 0$, dospeli by sme k záveru, že $d^2L(A)$ je *indefinitný*. Vyplýva to z toho, že v tomto prípade je $d^2L(A)$ kvadratickou formou troch premenných dx , dy a dz a matica tejto formy (pri $(dx)^2$ je koeficient 0 :))

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

je indefinitná (samy sa presvedčte ;)). Lagrangeova funkcia $L(x, y, z)$ teda nemá v bode A *lokálny extrém*. To však ale ešte neznamená, že v bode A nemá ani *funkcia $f(x, y, z)$ viazaný lokálny extrém* :). Je potrebné si uvedomiť, že ak funkcia $L(x, y, z)$ má v bode A , ktorý vyhovuje väzbovým podmienkam, lokálny extrém, potom je to zároveň i viazaný lokálny extrém funkcie $f(x, y, z)$ (samy si dobre premyslite pomocou vhodného obrázku :)). To nám niekedy uľahčuje život, nakoľko v tomto prípade nemusíme brať do úvahy väzbové

podmienky pri zisťovaní charakteru stacionárnych bodov funkcie $L(x, y, z)$ (pozri záver Príkladu 9). Avšak *vo všeobecnosti* ignorovanie väzbových podmienok môže mať za následok *stratu* viazaných lokálnych extrémov, ako sme sa o tom teraz presvedčili :).

Príklad 11

Na parabole $y^2 = 4x$ nájdime bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky $x - y + 4 = 0$.

Riešenie:

Tento príklad je zameraný na geometrickú aplikáciu znalostí o viazaných extrémoch funkcií viac premenných. Nech $A = [x, y]$ je ľubovoľný bod na parabole $y^2 = 4x$ a $B = [u, v]$ ľubovoľný bod na priamke $u - v + 4 = 0$. Potom vzdialenosť $\varrho(A, B)$ bodov A a B je rovná

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

(uvažujeme štandardnú euklidovskú vzdialenosť :)). Vidíme, že $\varrho(A, B)$ je funkciou štyroch premenných x, y, u a v spĺňajúcich dve väzbové podmienky

$$y^2 = 4x \quad \text{a} \quad u - v + 4 = 0.$$

Keďže s odmocninami sa pracuje pomerne ťažkopádne, budeme uvažovať druhú mocninu vzdialenosti $\varrho^2(A, B)$. Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že body A_0, B_0 , v ktorých sa minimalizuje funkcia $\varrho(A, B)$, sú práve tie, v ktorých sa minimalizuje i funkcia $\varrho^2(A, B)$ a naopak :). Preto bez ujmy na všeobecnosti budeme uvažovať funkciu $f(x, y, u, v)$ s predpisom

$$f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2.$$

Našou úlohou je nájsť viazané globálne minimum funkcie f za predpokladu podmienok $y^2 - 4x = 0$ a $u - v + 4 = 0$:). Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich príkladoch. Príslušná Lagrangeova funkcia $L(x, y, u, v)$ je

$$L(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2 + \lambda \cdot (y^2 - 4x) + \omega \cdot (u - v + 4).$$

Stanovíme jej stacionárne body vyhovujúce daným väzbovým podmienkam

$$L'_x(x, y, u, v) = 2(x - u) - 4\lambda = 0, \quad L'_y(x, y, u, v) = 2(y - v) + 2\lambda \cdot y = 0,$$

$$L'_u(x, y, u, v) = -2(x - u) + \omega = 0, \quad L'_v(x, y, u, v) = -2(y - v) - \omega = 0,$$

$$y^2 - 4x = 0, \quad u - v + 4 = 0.$$

Táto sústava piatich rovníc s neznámymi $x, y, u, v, \lambda, \omega$ má jediné riešenie

$$x = 1, \quad y = 2, \quad u = -\frac{1}{2}, \quad v = \frac{7}{2}, \quad \lambda = \frac{3}{4}, \quad \omega = \frac{3}{2}$$

(samy overte ;)). Funkcia $L(x, y, u, v)$ má preto jediný stacionárny bod $C = \left[1, 2, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$ spĺňajúci dané väzbové podmienky. Vyšetříme teraz definitnosť druhého diferenciálu funkcie $d^2L(C)$. Postupne máme

$$L''_{xx}(C) = L''_{uu}(C) = L''_{vv}(C) = 2, \quad L''_{yy}(C) = 2 + 2\lambda|_C = \frac{7}{2},$$

$$L''_{xy}(C) = L''_{xv}(C) = L''_{yu}(C) = L''_{uv}(C) = 0, \quad L''_{xu}(C) = -2, \quad L''_{yv}(C) = -2$$

(samy overte :)). Potom

$$d^2L(C) = 2(dx)^2 + \frac{7}{2}(dy)^2 + 2(du)^2 + 2(dv)^2 - 4dxdu - 4dydv.$$

Potrebuje ešte diferencovať väzbové podmienky v bode C a nájsť vzťah medzi prírastkami dx, dy, du a dv . Platí

$$d(y^2 - 4x) = 0 \implies 2ydy - 4dx = 0 \xrightarrow{x=1, y=1} dy = dx,$$

$$d(u - v + 4) = 0 \implies du - dv = 0 \implies dv = du.$$

Po dosadení do výrazu pre $d^2L(C)$ získame kvadratickú formu dvoch premenných dx a du , konkrétne

$$d^2L(C) = 2(dx)^2 + \frac{7}{2} \cdot \underbrace{(dx)^2}_{(dy)^2} + 2(du)^2 + 2 \cdot \underbrace{(du)^2}_{(dv)^2} - 4 \cdot dxdu - 4 \cdot \underbrace{dxdu}_{dydv}$$

↓

$$d^2L(C) = \frac{11}{2} \cdot (dx)^2 + 4(du)^2 - 8dxdu$$

(samy overte ;)). Posledná kvadratická forma dvoch premenných dx a du je pozitívne definitná, nakoľko jej odpovedajúca matica

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

je pozitívne definitná (samy overte podľa hlavných minorov :)). Preto funkcia $f(x, y, u, v)$ má v bode C viazané ostré lokálne minimum s hodnotou $f(C) = \frac{9}{2}$. Zároveň sa jedná i o viazané globálne minimum funkcie $f(x, y, u, v)$ (samy si premyslite prečo ;)).

Vrátiac sa k nášmu pôvodnému problému, dospeli sme k nasledujúcemu záveru. Bod $A_0 = [1, 2]$ na danej parabole a bod $B_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$ na danej priamke majú najmenšiu vzájomnú vzdialenosť s hodnotou

$$\varrho(A_0, B_0) = \sqrt{f(C)} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bod A_0 má teda najmenšiu možnú vzdialenosť od priamky v zadaní príkladu (samy si dobre premyslite :)).

Poznámka k diferencovaniu väzbových podmienok

V tejto poznámke stručne vysvetlíme, čo to znamená *diferencovať väzbovú podmienku* v nejakom bode. Uvažujme napríklad väzbu v tvare

$$x^2 + e^y z + y^2 \cos x = 2,$$

a ktorú chceme diferencovať v bode $A = [0, -1, e]$ vyhovujúcom danej väzbe (samy overte :)). To znamená prepísať danú väzbovú podmienku na tvar

$$x^2 + e^y z + y^2 \cos x - 2 = 0,$$

nájsť prvý diferenciál funkcie $f(x, y, z) = x^2 + e^y z + y^2 \cos x - 2$ v bode A a položiť ho rovný nule :). Postupne platí

$$f'_x(A) = 2x - y^2 \sin x \Big|_A = 0, \quad f'_y(A) = e^y z + 2y \cos x \Big|_A = -1, \quad f'_z(A) = e^y \Big|_A = e^{-1}$$

(samy overte :)). Pre prvý diferenciál $df(A)$ potom máme

$$df(A) = 0 \cdot dx - dy + e^{-1} dz = -dy + e^{-1} dz.$$

Posledný výraz položíme rovný nule, t.j.,

$$-dy + e^{-1}dz = 0 \implies dz = e dy.$$

Nuž a takto sme uvedenú väzbu diferencovali v bode A :). Čo to však v skutočnosti znamená? Daná väzba istým spôsobom viaže premenné x, y, z . V našom prípade to bude zrejme nejaká plocha v \mathbb{R}^3 , konkrétne s rovnicou $z = e^{-y}(2 - x^2 - y^2 \cos x)$. Keď sedíme na nejakom *zafixovanom* bode A tejto plochy a chceme sa presunúť do iného bodu na tejto ploche, nemôžeme s prírastkami dx, dy, dz šibrinkovať ľubovoľne, chceme predsa stále zostať na danej ploche. Preto dx, dy, dz v danom bode A nie sú nezávislé, a teda spolu nejakú súvisia. Tým, že danú väzbu (plochu) diferencujeme v bode A , nájdeme túto súvislosť, konkrétne máme $dz = e dy$:). Ak dx a dy zvolíme ľubovoľne, prírastok dz je už určený jednoznačne. V inom bode danej plochy je závislosť prírastkov dx, dy a dz pochopiteľne iná (preto je i zvýraznené slovo „zafixovaný“ ;)).