M2B02: DIFERENCIÁLNÍ A INTEGRÁLNÍ POČET II **0. termín: jarní semestr 201x**

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

• Jméno a příjmení (UČO): ______________________

$T1-T5_{10}$	$P1_4$	$P2_5$	$P3_5$	$P4_6$	$P5_8$	$P6_7$

• Počet listů s řešením: ________

✍$_{35}$	Z_{25}	T_{10}	☺$_{30}$	Σ_{100}	
≥ 30		≥ 4	> 0		

- Čas na vypracování je **120 minut.**
- V teoretické části musíte získat **alespoň 4 body.**
- Z písemné části a ze cvičení je nutné mít **alespoň 30 bodů.**
- Z ústní je části je nutné mít **nenulový** bodový zisk.
- **Rozložení známek** dle bodového zisku (maximum je 100 bodů):

  A=[100,85]; B=(85,72]; C=(72,62]; D=(62,55]; E=(55,50]; F=(50,0].
- Ústní část začne ve 14 hodin v pracovně 02021a (2. patro).
- **Zadání odevzdáváte** společně s řešením.
- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

ZADÁNÍ TEORETICKÉ ČÁSTI:

Odpovězte (**zaškrtnutím** vhodného **ano** nebo **ne** na příslušném řádku), zda jsou následující tvrzení pravdivá. Čtěte **velmi pozorně!** Své **odpovědi v této části nezdůvodňujte.** Body za správnou odpověď jsou vyznačeny u zadání. Za špatnou odpověď se **body strhávají.**

T1. (2 body) Vrstevnicemi funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ jsou kružnice se středem v počátku a poloměrem $C \geq 0$. — ANO ☐ NE ☐

T2. (2 body) Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ohraničené obě parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $K \subseteq \mathbb{R}^2$, je funkce f spojitá na množině K. — ANO ☐ NE ☐

T3. (2 body) Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená na měřitelné množině $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak dvojný integrál $\iint_{\mathcal{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ existuje. — ANO ☐ NE ☐

T4. (2 body) Existuje elementární množina v $\mathbb{R}^2$, která není (jordanovsky) měřitelná. — ANO ☐ NE ☐

T5. (2 body) Jestliže posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na intervalu I k funkci f a jsou-li funkce $f_n(x)$ spojité pro každé $n \in \mathbb{N}$ na I, pak je i funkce f spojitá na intervalu I. — ANO ☐ NE ☐

UKÁZKOVÁ ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ PRAKTICKÉ ČÁSTI:

Všechny **výpočty v praktické části řádně zdůvodněte**! Body za správné řešení jsou vyznačeny u zadání.

P1. **(4 body)** Určete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}\right).$$

P2. **(5 bodů)** Vypočtěte limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}.$$

P3. **(5 bodů)** Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$$f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

P4. **(6 bodů)** Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-\ln x-\ln y.$$

P5. **(8 bodů)** Vypočtěte

$$\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde pro množinu M platí

$$x^2-4x+y^2\le 0,\quad \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x.$$

P6. **(7 bodů)** Určete Fourierovy koeficienty a Fourierovu řadu pro funkci $f(x)=\frac{x+|x|}{2}$ na intervalu $[-\pi,\pi]$ vzhledem k trigonometrickému systému.