Lineární programování – jaro 2011 – 2. termín

1. (15 bodů) Formulujte variantu Farkasova lemmatu udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby soustava lineárních rovnic

$$A \cdot (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} + B \cdot (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}} = C \cdot (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} + d$$

v proměnných $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ měla řešení splňující buď

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \colon x_i \leq y_i$$

nebo

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \colon y_i \leq x_i.$$

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor h takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{\, f \mid zF \geq h,\ z \leq 0 \,\}$$

je duální k úloze

$$\min \{\, cx \mid Ax = Bx,\ Cx \leq b,\ |dx| \leq 1 \,\}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
($|dx|$ značí absolutní hodnotu dx.)

3. (25 bodů) Definujte stěny polyedru. Charakterizujte maximální stěny polyedrů algebraicky pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Dejte příklad polyedru dimenze 2, jehož maximálními stěnami jsou právě jeho minimální stěny.

4. (30 bodů) Duální simplexovou metodou nalezněte nějakou přípustnou simplexovou tabulku pro úlohu lineárního programování

$$\text{minimalizovat} \quad 6x - 3y - 2z$$

při omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &\leq -1, \\ 2x - y + 2z &\geq 8, \\ 2x + y - 2z &\geq 6 \end{aligned}$$

a úlohu poté vyřešte primární simplexovou metodou.