Lineární programování – jaro 2013 – 4. termín

1. (15 bodů) Nechť $\varphi\colon \mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}^k$ a $\psi\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^k$ jsou lineární zobrazení definovaná předpisy $\varphi(x) = xA$ a $\psi(x) = xB$. Uvažme následující polyedry:

$$\begin{aligned} P &= \{\, x \in \mathbb{Q}^m \mid xC = b,\ x \le 0 \,\}, \\ Q &= \{\, x \in \mathbb{Q}^n \mid xD \le c \,\}, \\ R &= \{\, x \in \mathbb{Q}^k \mid xF \ge 0 \,\}. \end{aligned}$$

Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na matice A, B, C, D, F a vektory b, c, aby polyedry $\varphi(P)$, $\psi(Q)$ a R měly společný bod.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici B a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{\, f \mid Bz + a \ge 0 \,\}$$

je duální k úloze

$$\max \{\, x_1 + \cdots + x_m \mid x_1 \ge y \cdot d_1, \ldots,\ x_m \ge y \cdot d_m,\ Ax = b,\ y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n \,\},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, d_1, …, d_m konstantní vektory a A matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Formulujte větu o rozkladu polyedrů a definujte v ní použité pojmy. Předveďte rozklad uvedený v této větě na polyedru

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1 \,\};$$

přitom útvary, na které polyedr rozkládáte, zadejte v souladu s příslušnými definicemi. Dokažte implikaci uvedené věty, která tvrdí, že rozklad existuje.

4. (30 bodů) (Zadání čtěte velmi pozorně!) Řešte primární simplexovou metodou úlohu minimalizovat

$$x + 3y + z$$

při omezeních $x \ge 0$, $z \ge 0$ a

$$\begin{aligned} x - 2y - \ \ z &\ge -7, \\ x - \ \ y - \ \ z &\le -2. \end{aligned}$$

Po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$2x - 2y - 3z \ge -7$$

a využijte závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení úlohy primární simplexovou metodou. Konečně, po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$x - 2y - 3z \ge -5$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.