

Lineární programování – jaro 2014 – 3. termín

- (15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby bylo možno zajistit požadovanou cirkulaci vody v uzavřeném chladicím systému, který sestává z n čerpadel, kde i -té čerpadlo má kapacitu a_i l/s, pro $i = 1, \dots, n$, přičemž z i -tého do j -tého čerpadla vede potrubí o maximálním možném průtoku b_{ij} l/s a minimálním požadovaném průtoku c_{ij} l/s, pro všechna $i, j = 1, \dots, n$. (Všechna voda, která do některého čerpadla vstupuje, musí být před opuštěním tohoto čerpadla vyčerpána vzhůru.) (Praktická poznámka: pokud některé potrubí neexistuje, zvolili jsme příslušná b_{ij} a c_{ij} nulová.)
- (20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z , matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid zF = a, z \leq 1 \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cx \mid (y + 1)A = p, Bx \geq q, yb \leq dx \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \dots, 1)$)

- (25 bodů)** Definujte stěny polyedru. Charakterizujte polyedry, které nemají žádné maximální stěny. Charakterizujte minimální stěny polyedrů pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Uveďte, jak lze z matice zadávající polyedr určit dimenzi minimálních stěn, a svoje tvrzení dokažte. Dejte příklad polyedru dimenze 3 takového, že průnikem libovolné dvojice jeho maximálních stěn je jeho minimální stěna.
- (30 bodů)** Vytvořte simplexovou tabulku odpovídající bazické množině indexů $\{3, 1, 2\}$ (v tomto pořadí) pro úlohu lineárního programování maximalizovat

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5$$

při omezeních $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$ a

$$2x_1 + x_2 + 3 = x_3 + x_4 + 2x_5,$$

$$x_1 + 2x_4 + 5 = x_3 + 2x_5,$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 13$$

a s touto počáteční tabulkou vyřešte úlohu primární simplexovou metodou. Po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$x_4 + 1 \geq x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.