Lineární programování – jaro 2015 – 2. termín

1. (15 bodů) V jedné demokratické zemi se blíží prezidentské volby a v současnosti vládnoucí diktátor si potřebuje zajistit vítězství. Aby se mu podařilo volby věrohodně zfalšovat, potřebuje získat alespoň 30% hlasů, přičemž v zemi je α voličů a žádný volič si nedovolí nepřijít k volbám. Mezi voliči má diktátor aktuálně β příznivců a γ odpůrců; každý ze zbývajících „standardních" voličů jej bude volit s pravděpodobností 50%. Současně se musí diktátor vyhnout nebezpečí revoluce, která hrozí, pokud zastoupení odpůrců mezi voliči překročí 60%. Diktátor zná dvě metody, jak zvýšit svoji popularitu: výboje a hledání vnitřního nepřítele; přitom nejvyšší částka, kterou může za tímto účelem použít, je δ miliónů. Investováním jednoho miliónu do výbojů dojde k přesunu ε standardních voličů mezi příznivce a ζ standardních voličů mezi odpůrce, přičemž η standardních voličů zemře na bojišti. Investováním jednoho miliónu do hledání vnitřního nepřítele dojde k popravě ϑ příznivců, přičemž ι standardních voličů se stane diktátorovými příznivci a κ příznivců se přesune mezi odpůrce. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby se diktátor nemusel uchýlit k „použití nedemokratických prostředků". (Jedná se o velkou zemi, takže lze všechny veličiny považovat za spojité a počet voličů v žádné skupině se nikdy nepřiblíží k nule.)

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min\{\, f \mid Cz \geq a,\ z \leq 1\,\}$$

je duální k úloze

$$\max\{\, dx \mid |x_1| \leq y_1,\ \ldots,\ |x_n| \leq y_n,\ cx = yb,\ Ax \geq b,\ yB \leq c\,\}$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, c, d jsou konstantní vektory a A, B jsou matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Definujte stěny polyedru. Charakterizujte maximální stěny polyedrů algebraicky pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Uveďte, jak je možné pomocí lineárního programování určit, zda je nerovnice implicitní rovnicí. Dejte příklad polyedru dimenze 3, jehož všechny vlastní stěny jsou současně maximální i minimální.

4. (30 bodů) Vyřešte primární simplexovou metodou úlohu lineárního programování

$$\text{minimalizovat} \quad 2x + y - 10z - t$$

při omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $8 \geq z \geq 0$, $t \geq 0$ a

$$\begin{aligned} x - y + 2z + 2t &\leq -11,\\ 2x - 2y + 3z + 4t &\geq -29,\\ x \phantom{{}-2y} - 2z - t &\geq 6. \end{aligned}$$

Poté využijte závěrečnou simplexovou tabulku k vyřešení úlohy, která vznikne z původní úlohy nahrazením podmínky $8 \geq z$ podmínkou $1 \geq z$, duální metodou.