1.) $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $Rs(0,\theta)$, $\theta > 0$. Uvažujme odhady parametru θ:

$T_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}$; $\tilde{T}_1 = \frac{n+1}{n} \cdot T_1$, $T_2 = 2 \cdot \overline{X}$.

a) nestrannost
b) konzistence } viz cvičení

vsuvka: odvození hustoty odhadu T_1 : označme jeho distribuční funkci $F_{T_1}(t)$ a hustotu $f_{T_1}(t)$, pak

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \le t) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \le t) = P(X_1 \le t, \dots, X_n \le t) \overset{\text{NEZ.}}{=} P(X_1 \le t) \cdot \ldots \cdot P(X_n \le t) = [F(t)]^n,$$ kde

F je distribuční funkce $Rs(0,\theta)$, tedy $F(t) = \frac{t}{\theta}$ pro $t \in [0,\theta]$. Tedy

$$F_{T_1}(t) = \frac{t^n}{\theta^n}, \quad 0 \le t \le \theta$$

$$f_{T_1}(t) = F'_{T_1}(t) = \frac{n}{\theta^n} \cdot t^{n-1}, \quad 0 \le t \le \theta$$
$$= 0, \quad \text{jinak}$$

c) Který z odhadů je „nejlepší"? Pro porovnání přesnosti se používá střední čtvercová (kvadratická) chyba: $E(T - \theta)^2$. Ta se dá dále rozepsat: $E(T-\theta)^2 = E((T-ET)+(ET-\theta))^2 = E(T-ET)^2 + \underbrace{2 \cdot E((T-ET)(ET-\theta))}_{=0}$

$+ E(ET-\theta)^2 = DT + (ET-\theta)^2$.

Pro nestranné odhady je tedy střední čtvercová chyba rovna rozptylu.

$$E(T_1-\theta)^2 = DT_1 + (ET_1-\theta)^2 = \frac{\theta^2 \cdot n}{(n+2)(n+1)^2} + \left(\frac{\theta n}{n+1} - \theta\right)^2 = \frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{\overbrace{\theta^2 n + \theta^2 n + 2\theta^2}^{2\theta^2(n+1)}}{(n+2)(n+1)^2} =$$

$$= \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)}.$$

$$E(\tilde{T}_1-\theta)^2 = D\tilde{T}_1 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

$$E(T_2-\theta)^2 = DT_2 = \frac{\theta^2}{3n}.$$

Nejmenší střední čtvercovou chybu má $\tilde{T}_1$, největší naopak T_2.

Odhad parametrické funkce $\tau(\theta): \Theta \mapsto \mathbb{R}$.

a) Řekneme, že odhad T parametrické funkce $\tau(\theta)$ je nestranný, jestliže $ET = \tau(\theta), \ \forall \theta \in \Theta$.

b) asymptoticky nestranný, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} ET = \tau(\theta), \ \forall \theta \in \Theta$.

c) konzistentní, jestliže $T \xrightarrow[n\to\infty]{P} \tau(\theta), \ \forall \theta \in \Theta$.

2) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $Po(\lambda)$, kde $\lambda > 0$ je neznámý parametr. Uvažujme 2 odhady parametrické funkce $e^{-\lambda} = P(X_1 = 0)$:

$$U = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^S, \qquad \text{kde } S = X_1 + \dots + X_n$$

$$V = e^{-\bar{X}}, \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

Jsou uvedené odhady nestrannými odhady parametrické funkce $e^{-\lambda}$?

Nápověda: Pro náh. výběr z Poissonova rozdělení platí $S \sim Po(n\lambda)$, tj. $P(S = s) = e^{-n\lambda} \cdot \frac{(n\lambda)^s}{s!}$, $s = 0, 1, 2, \dots$.

a) $$EU = E\left(1 - \frac{1}{n}\right)^S = \sum_{s=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \cdot P(S = s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \cdot e^{-n\lambda} \cdot \frac{(n\lambda)^s}{s!} = e^{-n\lambda} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n\lambda - \lambda)^s}{s!} = e^{-n\lambda} \cdot e^{n\lambda - \lambda} =$$

$= e^{-\lambda}, \ \forall \lambda > 0 \implies U$ je nestranný odhad $e^{-\lambda}$.

b) $$EV = E e^{-\bar{X}} = E e^{-\frac{1}{n} S} = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s}{n}} \cdot e^{-n\lambda} \cdot \frac{(n\lambda)^s}{s!} = e^{-n\lambda} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{n}} \cdot n\lambda\right)^s}{s!} = e^{-n\lambda} \cdot e^{n\lambda \cdot e^{-\frac{1}{n}}} = e^{-n\lambda\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)} \neq e^{-\lambda}$$

V není nestranný odhad $e^{-\lambda}$, ale je asymptoticky nestranný, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} EV = e^{-\lambda}, \ \forall \lambda > 0$.