Príklady na precvičovanie – Taylorove a Laurentove rady, izolované singularity

Riešené príklady

Príklad 1 (Taylorov rad)
Rozviňme funkciu $f(z) = \frac{z}{z+2}$ do Taylorovho radu na okolí bodu $z_0 = 1$.

Riešenie:
Funkcia $f(z)$ je holomorfná v celej komplexnej rovine okrem bodu $z = -2$. To znamená, že na každom okolí bodu $z_0 = 1$ neobsahujúcom bod -2 je táto funkcia súčtom svojho príslušného Taylorovho radu. Naviac, tento rad je určený jednoznačne. Inými slovami, stačí nám nájsť *akýkoľvek* rozvoj funkcie $f(z)$ podľa mocnín $z - z_0 = z - 1$:). Toto pozorovanie nám často umožňuje vyhnúť sa zdĺhavého počítaniu jednotlivých derivácií funkcie $f(z)$ v bode $z_0 = 1$ (v súlade s definíciou Taylorovho radu). Môžeme si pomôcť nejakým fígľom :). Tak napríklad platí

$$f(z) = \frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{(z-1)+3} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{3}}.$$

Výraz $\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$ je však pre $\left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$ súčtom nekonečného geometrického radu s kvocientom $q = -\frac{z-1}{3}$ a s prvým členom 1 (samy si premyslite ;)). Teda

$$f(z) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n, \qquad |z-1| < 3.$$

Poslednú rovnosť ešte môžeme upraviť oddelením nultého člena na tvar

$$f(z) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n, \qquad |z-1| < 3$$

(samy overte :)). Získali sme tak hľadaný Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ na vhodnom okolí bodu $z_0 = 1$. Všimnime si, že polomer konvergencie $R = 3$ daného mocninového radu je najväčší možný, nakoľko na kružnici $|z-1| = 3$ leží bod $z = -2$ (samy si to dobre premyslite ;)).

Príklad 2 (Taylorov rad)
Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

na okolí bodu $z_0 = 0$.

Riešenie:
Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Racionálnu lomenú funkciu $f(z)$ rozložíme na parciálne zlomky

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{(z^2-1)+1}{(z+1)^2} = \frac{(z-1)(z+1)}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2}$$
$$= \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} = 1 - \frac{2}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Nekonštantné členy tohto rozkladu sa pokúsime rozvinúť do radu podľa mocnín $z - z_0 = z$. Zrejme platí

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot z^n \quad \text{pre } |z| < 1$$

(samy overte :)). Všimnime si ďalej, že zlomok $\frac{1}{(z+1)^2}$ je až na znamienko derivácia výrazu $\frac{1}{z+1}$ podľa premennej z. A keďže mocninové rady môžeme na ich oboroch konvergencie derivovať člen po člene, máme

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \left(-\frac{1}{z+1}\right)' = \left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot z^n\right)'$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n \cdot z^{n-1} \quad \text{pre } |z| < 1$$

(člen s $n = 0$ je konštanta, preto po derivovaní vymizne :)). Posledný rozvoj môžeme ešte kozmeticky vylepšiť posunom indexácie $n \mapsto n+1$, t.j.,

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1) \cdot z^n \quad \text{pre } |z| < 1.$$

Pre funkciu $f(z)$ v zadaní príkladu teda platí

$$f(z) = 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \cdot z^n \quad \text{pre } |z| < 1.$$

Úpravou na jednu spoločnú sumu dostávame finálny výsledok

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n-1) \cdot z^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) \cdot z^n, \qquad |z| < 1$$

(samy overte detaily; celkový koeficient pri mocnine z^0 je nulový, rovnako ako aj celkový koeficient pri z :)).

Príklad 3 (Taylorov rad)
Zostrojme mocninový rozvoj funkcie $f(z) = \sin(2z - z^2)$ podľa mocnín $z - 1$.

Riešenie:
Povedané ľudsky – máme nájsť Taylorov rad funkcie $f(z)$ so stredom v bode $z_0 = 1$:). Na prvý pohľad sa zdá, že ide o náročnú, ba až beznádejnú úlohu :-/. Poďme spoločne vymyslieť nejakú fintu :). Všimnime si takúto banalitu

$$\sin(2z - z^2) = \sin\left[1 - (z^2 - 2z + 1)\right] = \sin\left[1 - (z-1)^2\right] \quad :).$$

To ani nestálo za reč. Pokračujme však ďalej. Z goniometrie vieme, ako „rozsínusovať“ súčet, konkrétne

$$\sin\left[1 - (z-1)^2\right] = \sin 1 \cdot \cos(z-1)^2 - \cos 1 \cdot \sin(z-1)^2.$$

Pre každé komplexné číslo z teda máme takúto zaujímavú identitu

$$\sin(2z - z^2) = \sin 1 \cdot \cos(z-1)^2 - \cos 1 \cdot \sin(z-1)^2 \quad :).$$

Podľa definície komplexného sínusu a kosínusu však platí

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot w^{2n+1} \quad \text{a} \quad \cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot w^{2n}$$

pre každé $w \in \mathbb{C}$. V našom prípade teda pre každé $z \in \mathbb{C}$ dostávame

$$\sin(z-1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (z-1)^{4n+2},$$

$$\cos{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (z-1)^{4n}$$

(samy si dobre premyslite ;)). Dosadením týchto výrazov do odvodenej identity pre funkciu $f(z)$ máme

$$\sin{(2z-z^2)} = \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (z-1)^{4n} - \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (z-1)^{4n+2}.$$

Pravá stranu poslednej rovnosti je práve hľadaný Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ na okolí bodu $z_0 = 1$:). V získanom rozvoji nám však pomerne veľa členov chýba, konkrétne členy s mocninami typu $(z-1)^{4n+1}$ a $(z-1)^{4n+3}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Elegantne to môžeme vyriešiť takto. Funkcia $f(z)$ v zadaní príkladu má mocninový rozvoj $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-1)^m$ s koeficientami a_m tvaru

$$a_m = \left\{ \begin{array}{ll} \sin 1 \cdot \frac{(-1)^n}{(2n)!}, & \text{ak } m = 4n, \\ \\ \cos 1 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}, & \text{ak } m = 4n+2, \\ \\ 0, & \text{inak,} \end{array} \right\} \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}_0 \quad :).$$

Príklad 4 (Taylorov rad)
Napíšme prvé štyri členy Maclaurinovho radu funkcie $f(z) = \log{(1+\mathrm{e}^z)}$, kde $\log{(\cdot)}$ je hlavná vetva komplexnej logaritmickej funkcie $\mathrm{Log}\,(\cdot)$.

Riešenie:
Pri riešení tohto príkladu si vysúkame rukávy a trochu si mechanicky zaderivujeme :). Vieme, že hľadaný Maclaurinov rad má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n.$$

Potrebujeme teda nájsť hodnotu a prvé tri derivácie funkcie $f(z)$ v bode $z = 0$. Pripomeňme, že hlavná vetva logaritmu $\log{(\cdot)}$ sa derivuje rovnako ako reálny logaritmus, len si musíme dať pozor na to, kde derivujeme. Konkrétne,

$$(\log w)' = \frac{1}{w} \quad \text{a funkcia } \log w \text{ je holomorfná pre } w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Tak s chuťou do toho :). Postupne dostávame

$$f(0) = \log(1 + \mathrm{e}^0) = \log 2 = \ln 2,$$

$$f'(0) = [\log(1 + \mathrm{e}^z)]'_{z=0} = \left[\frac{\mathrm{e}^z}{1 + \mathrm{e}^z}\right]_{z=0} = \frac{1}{2},$$

$$f''(0) = \left[\frac{\mathrm{e}^z}{1 + \mathrm{e}^z}\right]'_{z=0} = \left[\frac{\mathrm{e}^z}{(1 + \mathrm{e}^z)^2}\right]_{z=0} = \frac{1}{4},$$

$$f'''(0) = \left[\frac{\mathrm{e}^z}{(1 + \mathrm{e}^z)^2}\right]'_{z=0} = \left[\frac{\mathrm{e}^z(1 - \mathrm{e}^z)}{(1 + \mathrm{e}^z)^3}\right]_{z=0} = 0$$

(samy overte detaily jednotlivých výpočtov ;)). Prvé štyri členy hľadaného rozvoja teda budú

$$\ln 2, \quad \frac{1}{2} \cdot z, \quad \frac{1}{8} \cdot z^2, \quad 0 \cdot z^3.$$

Nakoniec poznamenajme, že tento rozvoj funkcie $f(z)$ bude platný na každom okolí bodu 0, na ktorom je funkcia $f(z)$ holomorfná. Nechávame na čitateľa, aby si sám premyslel, že najväčšie takéto okolie má tvar $|z| < \pi$:).

Príklad 5 (Laurentov rad)
Rozviňme funkciu $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ do Laurentovho radu na vhodných medzikružiach so stredom $z_0 = 0$.

Riešenie:
Teória Laurentových radov je v istom zmysle rozšírením konceptu Taylorových radov – jedná sa o mocninové rady, v ktorých pripúšťame i prítomnosť členov zo *zápornými* mocninami. Obory konvergencie takýchto všeobecnejších radov už nie sú otvorené kruhy, ale otvorené *medzikružia* s vhodnými stredmi. Presnejšie, ak funkcia $f(z)$ je holomorfná na nejakom otvorenom medzikruží $P(z_0, r, R)$ so stredom v bode z_0 (r a R je vnútorný a vonkajší

polomer daného medzikružia, $r < R$), potom $f(z)$ je možné na tomto medzikruží jednoznačne rozvinúť do *Laurentovho radu so stredom v* z_0, t.j., platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} (z - z_0)^{-m} \quad \text{pre každé } z \in P(z_0, r, R),$$

kde a_n a a_{-m}, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, sú tzv. *Laurentove koeficienty* funkcie $f(z)$ v medzikruží $P(z_0, r, R)$. Laurentove koeficienty sa dajú reprezentovať ako hodnoty istých komplexných krivkových integrálov. V praxi sa však uplatňuje opačný postup – znalosť Laurentových koeficientov umožňuje určovať hodnoty týchto integrálov :). Počítanie komplexných integrálov sa teda redukuje na hľadanie Laurentových rozvojov, čo je základná filozofia tzv. *Cauchyho teórie* komplexných integrálov. Je preto nutné vedieť stanoviť koeficienty a_k, $k \in \mathbb{Z}$, Laurentovho rozvoja iným spôsobom než pomocou integrálov.

V našom prípade je funkcia $f(z)$ holomorfná v celom $\mathbb{C}$ okrem bodov $z = 1$ a $z = 2$. Komplexná rovina sa nám preto rozdelí na tri navzájom disjunktné otvorené medzikružia so stredmi v bode $z_0 = 0$, konkrétne

$$\begin{aligned} P(0,0,1) &: \quad 0 < |z| < 1, \\ P(0,1,2) &: \quad 1 < |z| < 2, \\ P(0,2,\infty) &: \quad 2 < |z| < \infty \end{aligned}$$

(samy overte pomocou vhodného obrázku :)). Funkcia $f(z)$ je zrejme racionálna lomená, preto platí rozklad

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$$

(i toto samy overte ;)). Na jednotlivých medzikružiach sa teraz budeme snažiť rozvinúť tieto parciálne zlomky podľa (kladných i záporných) mocnín premennej z. V medzikruží $P(0,0,1)$ platí $|z| < 1$, preto máme

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \left| \; \left|\frac{z}{2}\right| < \frac{1}{2} < 1 \; \right| = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n$$

(samy si dobre premyslite :)). Pre funkciu $f(z)$ teda platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot z^n, \quad z \in P(0,0,1).$$

Získali sme Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$ na medzikruží $P(0,0,1)$. Všimnime si, že tento rad obsahuje iba nezáporné mocniny premennej z. Naviac, je platný aj v bode $z = z_0 = 0$ (samy overte :)). Jedná sa teda o Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ na otvorenom kruhu $|z| < 1$ (dobre si to premyslite; funkcia $f(z)$ je totiž holomorfná i v bode $z = 0$:)).

Poďme preskúmať, ako to bude vyzerať na medzikruží $P(0,1,2)$. Teraz $1 < |z| < 2$, a teda zlomok $-\frac{1}{z-1}$ nemôžeme rozvinúť do nekonečného geometrického radu tak ako v predchádzajúcom prípade (prečo? :)). Platí však $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, a preto môžeme použiť nasledujúci obrat

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad :)$$

(samy overte detaily ;)). Druhý zlomok $\frac{1}{z-2}$ má rovnaký rozvoj ako v predchádzajúcom prípade, pretože i teraz máme $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$. Takže

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot z^n.$$

Laurentov rad funkcie $f(z)$ má potom tvar

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot z^n, \quad z \in P(0,1,2).$$

V tomto prípade rozvoj obsahuje záporné mocniny z (tzv. *hlavná* časť radu) i nezáporné mocniny z (tzv. *regulárna* časť radu).

Na medzikruží $P(0,2,\infty)$, t.j., $2 < |z|$, postupujeme analogicky. Platí

$$-\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot\frac{1}{z^n},$$

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1}-1\right)\cdot\frac{1}{z^n}, \quad z \in P(0,2,\infty)$$

(samy overte detaily výpočtov :)). Výsledný Laurentov rad v tomto prípade má len záporné mocniny z, t.j., len svoju hlavnú časť.

Príklad 6 (Laurentov rad)
Nájdime Laurentov rad funkcie $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$ na rýdzom okolí bod $z_0 = 1$.

Riešenie:
Pri riešení využijeme definíciu komplexnej exponenciálnej funkcie, konkrétne

$$\mathrm{e}^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

V našom prípade dosadením $w = \frac{1}{1-z}$ ihneď dostaneme hľadaný Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$, nakoľko

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^n}, \qquad 0 < |z-1|.$$

Získaný rad pozostáva z hlavnej časti a z regulárnej časti, ktorá je tvorená iba jedným členom 1 (samy si premyslite :)).

Príklad 7 (Laurentov rad)
Zostrojme Laurentove rady funkcie $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ na medzikružiach

$$\text{a) } 0 < |z - \mathrm{i}| < 2, \qquad \text{b) } 1 < |z| < \infty.$$

Riešenie:
Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcich príkladoch.

a) Do funkcie $f(z)$ sa snažíme nejako zamontovať výraz $z - \mathrm{i}$. Napríklad

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} \cdot \frac{1}{(2\mathrm{i}+z-\mathrm{i})^2}$$

$$= \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} \cdot \frac{1}{(2\mathrm{i})^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^2} = -\frac{1}{4(z-\mathrm{i})^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^2}.$$

Na uvažovanom medzikruží platí $\left|\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right| < 1$ (prečo? :)), a preto

$$\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^n}\cdot(z-\mathrm{i})^n, \quad 0<|z-\mathrm{i}|<2.$$

My však potrebujeme rozvinúť druhú mocninu výrazu $\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}}$. Postupne máme

$$\left(\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}}\right)' = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^2} = -2\mathrm{i}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}}\right)'.$$

Do poslednej rovnosti dosadíme získaný rozvoj pre $\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}}$ a dostaneme

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^2} = -2\mathrm{i}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^n}\cdot(z-\mathrm{i})^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^{n-1}}\cdot n\cdot(z-\mathrm{i})^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2\mathrm{i})^{n-1}}\cdot(z-\mathrm{i})^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2\mathrm{i})^n}\cdot(z-\mathrm{i})^n, \qquad 0<|z-\mathrm{i}|<2$$

(v poslednom kroku sme zmenili indexáciu $n \mapsto n+1$:)). Pre funkciu $f(z)$ napokon platí vyjadrenie

$$f(z) = -\frac{1}{4(z-\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{4\cdot(2\mathrm{i})^n}\cdot(z-\mathrm{i})^{n-2}, \quad 0<|z-\mathrm{i}|<2.$$

V poslednej formule pre prehľadnosť oddelíme hlavnú a regulárnu časť získaného Laurentovho rozvoja. Nechávame na čitateľa, aby overil finálnu rovnosť

$$f(z) = \frac{-\frac{1}{4}}{(z-\mathrm{i})^2} - \frac{\frac{\mathrm{i}}{4}}{z-\mathrm{i}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+3)}{16\cdot(2\mathrm{i})^n}\cdot(z-\mathrm{i})^n, \quad 0<|z-\mathrm{i}|<2 \quad :).$$

b) V tomto prípade chceme funkciu $f(z)$ rozvinúť podľa mocnín z. Nakoľko $1<|z|$, platí $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, a teda postupne máme

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}, \quad 1<|z|<\infty$$

(samy overte :)). Keďže platí

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2z} \cdot \left(\frac{1}{z^2+1}\right)'$$

(samy sa presvedčte ;)), pre funkciu $f(z)$ v zadaní príkladu dostávame

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2z} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}\right)' = -\frac{1}{2z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} -(2n+2) \cdot \frac{(-1)^n}{z^{2n+3}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{z^{2n+4}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n-1)}{z^{2n}}, \qquad 1 < |z| < \infty$$

(v poslednom kroku sme vykonali posun indexu $n \mapsto n+2$:)). Výsledný Laurentov rad funkcie $f(z)$ na danom medzikruží obsahuje iba hlavnú časť.

Príklad 8 (Laurentov rad)
Stanovme Laurentov rozvoj funkcie

$$f(z) = \cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$$

na prstencovom okolí bodu $z_0 = 2$.

Riešenie:
Pri riešení vyskúšame podobnú fintu ako v Príklade 3 :). Nakoľko zlomok

$$\frac{z^2-4z}{(z-2)^2} = \frac{(z-2)^2-4}{(z-2)^2} = 1 - \frac{4}{(z-2)^2},$$

dostávame pre každé komplexné číslo $z \neq 2$ formulu

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2} = \cos\left[1 - \frac{4}{(z-2)^2}\right] = \cos 1 \cdot \cos\frac{4}{(z-2)^2} + \sin 1 \cdot \sin\frac{4}{(z-2)^2}$$

(samy overte ;)). Využitím definícií komplexného sínusu a kosínusu (pozri Príklad 3) potom pre funkciu $f(z)$ v zadaní príkladu máme

$$f(z) = \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left[\frac{4}{(z-2)^2}\right]^{2n} + \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left[\frac{4}{(z-2)^2}\right]^{2n+1}$$

$$= \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-2)^{4n}} + \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-2)^{4n+2}}, \quad z \neq 2$$

(samy si premyslite :)). Poznamenajme, že v získanom Laurentovom rozvoji je jeho regulárna časť reprezentovaná iba jediným členom $\cos 1$.

Príklad 9 (Laurentov rad)
Napíšme niekoľko členov Laurentov radu funkcie $f(z) = \operatorname{cotg} z$ na medzikruží $0 < |z| < \pi$.

Riešenie:
Podľa definície komplexného kotangensu máme

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Keďže funkcia $\sin z$ nemá v otvorenom medzikruží $0 < |z| < \pi$ nulový bod (samy si premyslite :)), funkcia $f(z)$ v zadaní príkladu je holomorfná na tomto medzikruží, a teda je možné ju jednoznačne rozvinúť do Laurentovho radu podľa mocnín z. Ďalej vieme, že

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \qquad \text{a} \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

pre každé $z \in \mathbb{C}$. Platí teda

$$\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) : \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \cdots$$

(samy poctivo overte :)). Prvých niekoľko členov hľadaného Laurentovho radu funkcie $f(z)$ bude mať teda tvar

$$f(z) = \operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \cdots, \qquad 0 < |z| < \pi.$$

Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že jediný člen tohto rozvoja so zápornou mocninou bude $\frac{1}{z}$, všetky ostatné členy budú obsahovať už len kladné mocniny z :). Dá sa ukázať, že úplný Laurentov rozvoj funkcie $\operatorname{cotg} z$ na medzikruží $0 < |z| < \pi$ má tvar

$$\operatorname{cotg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot B_{2n}}{(2n)!} \cdot z^{2n-1},$$

kde reálne konštanty B_k, $k \in \mathbb{N}_0$, sú tzv. *Bernoulliho čísla*. Majú mnoho zaujímavých a významných vlastností s početnými aplikáciami v najrôznejších oblastiach matematiky. Platí $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ a všetky ostatné Bernoulliho čísla s nepárnym indexom sú už nulové. Na druhej strane správanie sa Bernoulliho čísiel s párnymi indexami predstavuje i dnes záhadu. Platí

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad \cdots .$$

Poznamenajme, že Bernoulliho čísla sú definované ako koeficienty Taylorovho rozvoja reálnej funkie $\frac{x}{e^x-1}$ so stredom v bode $x_0 = 0$, presnejšie platí

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n, \quad \text{t.j.,} \quad B_n := \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^{(n)}_{x=0} .$$

Na základe tejto definície sa dá pomerne ľahko ukázať, že Bernoulliho čísla spĺňajú rekurentnú reláciu

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k = 0, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

čo umožňuje efektívne počítať ich jednotlivé hodnoty (samy sa pokúste vypočítať hodnotu B_{14} :)). Za zmienku stojí zaujímavá súvislosť Bernoulliho čísiel s hodnotami súčtu nekonečného číselného radu $\sum \frac{1}{n^{2p}}$ pre prirodzené hodnoty p. Konkrétne, pre každé $p \in \mathbb{N}$ platí takáto formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = 1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \cdots = \frac{(-1)^{p-1} 2^{2p-1} B_{2p}}{(2p)!} \cdot \pi^{2p} \qquad :).$$

Príklad 10 (Singulárne body)
Nájdime všetky konečné izolované singulárne body funkcie $f(z) = \frac{1}{z-z^3}$ a určme ich typ.

Riešenie:
Pripomeňme, že komplexné číslo z_0 je *izolovaný singulárny bod* funkcie $f(z)$, ak $f(z)$ je holomorfná na nejakom rýdzom okolí bodu z_0, ale v samotnom bode z_0 nie je holomorfná. Funkciu $f(z)$ teda vieme na vhodnom prstencovom okolí bodu z_0 rozvinúť do Laurentovho radu, čo umožňuje nasledujúcu

klasifikáciu izolovaných singularít. Bod z_0 sa nazýva *odstrániteľná* singularita, ak odpovedajúci Laurentov rad má iba regulárnu časť, t.j., obsahuje iba členy s nezápornými mocninami $z - z_0$. V opačnom prípade hovoríme o *neodstrániteľnej* singularite, ktorá môže byť buď *pól* (konečne veľa členov so zápornými mocninami $z - z_0$) alebo *podstatná* singularita (nekonečne veľa členov so zápornými mocninami $z - z_0$). V prípade pólu nás zaujíma jeho *rád*, čo je absolútna hodnota najmenšieho záporného indexu vyskytujúceho sa v Laurentovom rozvoji.

Nakoľko v našom prípade pre funkciu $f(z)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3} = \frac{1}{z(1-z)(1+z)},$$

máme tri singularity $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ a $z_3 = -1$. Všetky tri sú póly prvého rádu, t.j., *jednoduché póly*. Vyplýva to napríklad z pozorovania, že funkcia $f(z)$ má v bode z_0 pól k-tého rádu práve vtedy, keď sa dá vyjadriť v tvare $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, kde funkcia $g(z)$ je holomorfná a nenulová v z_0. Samy overte túto skutočnosť pre každý z bodov $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ a $z_3 = -1$;).

Príklad 11 (Singulárne body)
Stanovme všetky konečné izolované singularity a ich typ pre funkciu

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}.$$

Riešenie:
Funkcia $f(z)$ má zrejme jedinú izolovanú singularitu v bode $z = 0$. Všimnime si, že funkcia $f(z)$ má konečnú limitu v bode $z = 0$, nakoľko

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = |\text{ l'Hospital }| = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z} = |\text{ l'Hospital }| = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2} = 1.$$

Existencia konečnej limity funkcie $f(z)$ v singulárnom bode z_0 je jedným z poznávacích znakov, že bod z_0 je odstrániteľná singularita funkcie $f(z)$. V našom prípade je teda $z = 0$ ostrániteľný singulárny bod funkcie $f(z)$. Naviac sa dá ukázať, že nová komplexná funkcia

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \neq 0, \\ 1, & z = 0, \end{cases}$$

je holomorfná i v bode $z = 0$. Odtiaľ pochádza i uvedené pomenovanie bodu $z = 0$ termínom „odstrániteľná“ singularita :).

Príklad 12 (Singulárne body a rezíduá)
Určme všetky konečné izolované singularity funkcie $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ a vypočítajme rezíduá funkcie $f(z)$ v týchto bodoch.

Riešenie:
Na základe rozkladu

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}$$

ihneď zistíme izolované singularity v bodoch $z_1 = \mathrm{i}$ a $z_2 = -\mathrm{i}$. V oboch prípadoch sa jedná o dvojnásobný pól (samy overte :)). Vypočítame teraz rezíduá funkcie $f(z)$ v týchto bodoch. Z komplexnej analýzy je známe, že rezíduum funkcie $f(z)$ v bode z_0 (označujeme $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$) je hodnota koeficientu pri mocnine $(z - z_0)^{-1}$ v príslušnom Laurentovom rozvoji funkcie $f(z)$ na okolí bodu z_0. V prípade, ak z_0 je pól rádu k, vieme hodnotu $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$ stanoviť i bez znalosti daného Laurentovho radu. Konkrétne, platí formula

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^k \cdot f(z)\right]^{(k-1)}.$$

V našom príklade teda postupne dostávame (v oboch prípadoch máme $k = 2$)

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z \to \mathrm{i}} \left[(z-\mathrm{i})^2 \cdot f(z)\right]' = \lim_{z \to \mathrm{i}} \left[(z-\mathrm{i})^2 \cdot \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}\right]'$$

$$= \lim_{z \to \mathrm{i}} \left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}\right]' = \lim_{z \to \mathrm{i}} \left[-\frac{2}{(z+\mathrm{i})^3}\right] = -\frac{2}{(2\mathrm{i})^3} = -\frac{\mathrm{i}}{4},$$

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \left[(z+\mathrm{i})^2 \cdot f(z)\right]' = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \left[(z+\mathrm{i})^2 \cdot \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}\right]'$$

$$= \lim_{z \to -\mathrm{i}} \left[\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\right]' = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \left[-\frac{2}{(z-\mathrm{i})^3}\right] = -\frac{2}{(-2\mathrm{i})^3} = \frac{\mathrm{i}}{4} \quad :).$$

Príklad 13 (Singulárne body a rezíduá)
Stanovme rezíduá funkcie $f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ v jej izolovaných singularitách.

Riešenie:
Ihneď vidíme singulárny bod $z_0 = 0$. V tomto prípade ide o podstatnú singularitu. Okrem iného to spoznáme i podľa toho, že limita

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 0} z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} \quad \text{neexistuje (ani vlastná, ani nevlastná).}$$

Nechávame na čitateľa, aby sám overil túto skutočnosť (vyšetrite, čo sa bude diať, keď sa do limitného bodu 0 budeme blížiť po reálnej osi jednak sprava, a jednak zľava ;)). Pre výpočet príslušného rezídua funkcie $f(z)$ však bohužiaľ musíme zostaviť celý Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$ na nejakom rýdzom okolí bodu $z_0 = 0$:-/. Našťastie, v tomto prípade to nebude až tak bolestivé ;). Využitím definície komplexnej exponenciálnej funkcie máme

$$f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-2}}$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{720}\cdot\frac{1}{z^4} + \cdots .$$

Pre hľadané rezíduum teda platí $\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{6}$. Tvar získaného Laurentovho radu nám zároveň potvrdzuje, že bod $z_0 = 0$ je skutočne podstatná singularita funkcie $f(z)$ (samy si premyslite :)).

Príklad 14 (ťažší) (Singulárne body)
Zistime všetky konečné izolované singulárne body a ich typ pre funkciu

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}}{\mathrm{e}^z - 1}.$$

Riešenie:
Jednou z izolovaných singularít funkcie $f(z)$ je iste bod $z = 1$, jedná sa o podstatnú singularitu (samy si premyslite :)). Ďalšie singularity sú nulové body

menovateľa funkcie $f(z)$, t.j., všetky riešenia rovnice $\mathrm{e}^z = 1$ v $\mathbb{C}$. Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že sú to práve body $z_m = 2\pi\mathrm{i}m$, $m \in \mathbb{Z}$ (komplexná exponenciálna funkcia e^z je periodická s periódou $2\pi\mathrm{i}$:)). Pre každé $m \in \mathbb{Z}$ je bod z_m jednoduchým pólom funkcie $f(z)$. Tento fakt vyplýva z vyjadrenia funkcie $f(z)$ pre dané celé m v tvare

$$f(z) = \frac{z - z_m}{\mathrm{e}^z - 1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}} \cdot \frac{1}{z - z_m}.$$

Výraz $\frac{z-z_m}{\mathrm{e}^z-1}$ je možné holomorfne a nenulovo dodefinovať i v bode z_m, pretože

$$\lim_{z\to z_m} \frac{z - z_m}{\mathrm{e}^z - 1} = |\ \mathrm{l'Hospital}\ | = \lim_{z\to z_m} \frac{1}{\mathrm{e}^z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{z_m}} = 1$$

(samy overte; funkcia $\frac{z-z_m}{\mathrm{e}^z-1}$ má v bode z_m odstrániteľnú singularitu, pozri i Príklad 11 ;)). To nás oprávňuje pozerať sa na funkciu

$$g(z) := \frac{z - z_m}{\mathrm{e}^z - 1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$$

ako na holomorfnú a nenulovú v bode z_m (keďže $\mathrm{e}^{\frac{1}{z_m-1}} \neq 0$:)). Preto funkcia $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_m}$ má v bode z_m jednoduchý pól pre každé $m \in \mathbb{Z}$.

Príklad 15 (ťažší) (Singulárne body a rezíduá)
Vypočítajme hodnoty rezíduí daných funkcií v ich konečných singularitách.

$$\text{a)}\ f(z) = \sin z \cdot \sin\frac{1}{z}, \qquad \text{b)}\ f(z) = \mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}.$$

Riešenie:
a) Funkcia $f(z)$ má zrejme jediný konečný singulárny bod $z_0 = 0$. Keďže

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

(samy overte :)), Laurentov rad funkcie $f(z)$ na okolí bodu $z_0 = 0$ má tvar

$$f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \cdots \right).$$

Všimnime si, že pri postupnom roznásobovaní tohto súčinu budú vznikať iba *párne* (kladné i záporné) mocniny premennej z. Obzvlášť, člen s mocninou z^{-1} sa teda nebude vyskytovať v získanom Laurentovom rade. Z toho ihneď vyplýva, že $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$ (samy si to veľmi dobre premyslite ;)).

b) Bod $z_0 = 0$ je jediná konečná izolovaná singularita funkcie $f(z)$. V tomto prípade príslušný Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$ na rýdzom okolí bodu $z_0 = 0$ bude mať tvar

$$f(z) = \mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots \right).$$

Zaujíma nás celkový koeficient pri mocnine z^{-1}. Výsledný člen s mocninou z^{-1} má postupne štruktúru

$$1 \cdot \frac{1}{1!z} + \frac{z}{1!} \cdot \frac{1}{2!z^2} + \frac{z^2}{2!} \cdot \frac{1}{3!z^3} + \frac{z^3}{3!} \cdot \frac{1}{4!z^4} + \frac{z^4}{4!} \cdot \frac{1}{5!z^5} + \frac{z^5}{5!} \cdot \frac{1}{6!z^6} + \cdots$$

$$\Downarrow \text{ celkový koeficient pri mocnine } z^{-1} \Downarrow$$

$$1 + \frac{1}{1! \cdot 2!} + \frac{1}{2! \cdot 3!} + \frac{1}{3! \cdot 4!} + \frac{1}{4! \cdot 5!} + \frac{1}{5! \cdot 6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (n+1)!}$$

(samy si dobre premyslite :)). Pre hľadané rezíduum funkcie $f(z)$ v bode $z_0 = 0$ teda platí

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (n+1)!} \qquad :).$$

Nechávame na čitateľa, aby overil, že nekonečný číselný rad na pravej strane poslednej rovnosti skutočne konverguje ;).