Príklady na precvičovanie – komplexné krivkové integrály a Cauchyho teória

Riešené príklady

Príklad 1

Vypočítajme komplexný krivkový integrál

$$I = \int_\varphi \mathrm{Re}\, z \,\mathrm{d}z,$$

kde krivka φ je orientovaná úsečka so začiatočným bodom 0 a s koncovým bodom $1 + \mathrm{i}$.

Riešenie:
Úsečka φ má napríklad parametrické vyjadrenie

$$z = 0 + (1 + \mathrm{i} - 0) \cdot t = t + \mathrm{i}t, \qquad t \in [0, 1]$$

(samy overte :)). Táto parametrizácia je súhlasná s predpísanou orientáciou (i toto si samy premyslite ;)). Komplexný krivkový integrál I v zadaní príkladu prevedieme na komplexný určitý integrál (podobne ako pri reálnych krivkových integráloch II. druhu). Vykonáme substitúciu v I, pri ktorej komplexnú premennú z zamieňame za reálnu premennú t. Diferenciál $\mathrm{d}z$ má zrejme tvar

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}t + \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = (1 + \mathrm{i})\,\mathrm{d}t.$$

Pre integrál I v zadaní príkladu potom platí

$$I = \underbrace{+}_{\text{súhlasná orientácia}} \int_0^1 \underbrace{t}_{\mathrm{Re}\, z} \cdot \underbrace{(1 + \mathrm{i})\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}z} = (1 + \mathrm{i}) \cdot \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = (1 + \mathrm{i}) \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1 + \mathrm{i}}{2}.$$

Príklad 2

Stanovme komplexný krivkový integrál

$$I = \int_\varphi |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ je uzavretá, kladne orientovaná krivka s vyjadrením

$$\varphi_1 \,:\, z = t, \quad t \in [-1,1], \qquad \varphi_2 \,:\, z = \cos t + \mathrm{i}\sin t, \quad t \in [0,\pi].$$

Riešenie:
Zo zadania príkladu vyplýva, že krivka φ pozostáva z úsečky s krajnými bodmi -1 a 1 a z hornej polkružnice $|z| = 1$ (samy overte pomocou vhodného nákresu :)). Obidve parametrizácie sú súhlasné s kladnou orientáciou krivky φ. Hľadaný krivkový integrál I vypočítame postupnou integráciou po jednotlivých krivkách φ_1 a φ_2, t.j.,

$$I = \int_{\varphi_1} |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z.$$

V prípade krivky φ_1 máme $|z| = |t|$, $\bar{z} = t$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ a $t \in [-1,1]$, a tak

$$\int_{\varphi_1} |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} |t|\,t\,\mathrm{d}t = 0,$$

pretože výraz $|t|\,t$ je nepárnou funkciou premennej t a integrujeme cez interval stredovo súmerný podľa nuly (samy si premyslite ;)). Pre krivku φ_2 platí $|z| = 1$, $\bar{z} = \cos t - \mathrm{i}\sin t$, $\mathrm{d}z = (-\sin t + \mathrm{i}\cos t)\,\mathrm{d}t$ a $t \in [0,\pi]$, a teda

$$\int_{\varphi_2} |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} (\cos t - \mathrm{i}\sin t)\cdot(-\sin t + \mathrm{i}\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\cdot[t]_0^{\pi} = \mathrm{i}\pi$$

(samy overte uvedené výpočty :)). Pre komplexný integrál I v zadaní príkladu potom máme $I = 0 + \mathrm{i}\pi = \mathrm{i}\pi$.

Príklad 3
Dokážme (Newtonovu–Leibnizovu) formulu

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}}{\mathrm{i}p}\right]_a^b = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}pa} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}pb}}{\mathrm{i}p}, \qquad a,b \in \mathbb{R}, \qquad p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Riešenie:
Uvedená formula na integráciu exponenciálnej funkcie je dobre známa v reálnej analýze. V našom prípade podľa Eulerovho vzorca máme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}pt} = \cos pt + \mathrm{i}\sin pt$$

(samy si premyslite :)). Takže

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\cos pt + \mathrm{i}\sin pt)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \cos pt\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\cdot\int_a^b \sin pt\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{\sin pt}{p}\right]_a^b + \mathrm{i}\cdot\left[-\frac{\cos pt}{p}\right]_a^b = \left[\frac{\sin pt - \mathrm{i}\cdot\cos pt}{p}\right]_a^b$$

$$= \left[\frac{\mathrm{i}\cdot\sin pt - \overbrace{\mathrm{i}^2}^{-1}\cdot\cos pt}{\mathrm{i}p}\right]_a^b = \left[\frac{\cos pt + \mathrm{i}\sin pt}{\mathrm{i}p}\right]_a^b = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}}{\mathrm{i}p}\right]_a^b \qquad :).$$

Poznamenajme, že platí i všeobecnejšia Newtonova–Leibnizova formula, a to

$$\int_a^b \mathrm{e}^{qt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{qt}}{q}\right]_a^b = \frac{\mathrm{e}^{qa} - \mathrm{e}^{qb}}{q}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad q \in \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

t.j., v exponente môžeme uvažovať ľubovoľné nenulové komplexné číslo q (nielen rýdzo imaginárne $\mathrm{i}p$). Dôkaz tejto rovnosti si musíme trochu viac odpracovať, pozri neriešené príklady :).

Príklad 4
Ukážme, že pre dané $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ a $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$I = \int_\varphi (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i}, & n = -1, \end{cases}$$

kde φ je kladne orientovaná kružnica $|z-a| = R$.

Riešenie:
Kružnica φ má parametrizáciu

$$z = a + R \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Táto parametrizácia je súhlasná s predpísanou orientáciou krivky φ. Ďalej $\mathrm{d}z = R \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ (samy overte všetky skutočnosti :)). Pre integrál I teda platí

$$I = \int_0^{2\pi} \left(R \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^n \cdot R \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}R^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

Ak $n \neq -1$, t.j., $n + 1 \neq 0$, potom v súlade s Príkladom 3 integrujeme

$$I = \mathrm{i}R^{n+1} \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1} \cdot \left(\underbrace{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n+1)}}_{\text{toto je 1}} - 1\right) = 0 \quad :).$$

V poslednom kroku sme využili fakt, že komplexná exponenciálna funkcia e^z je periodická s periódami $2\pi\mathrm{i}k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (samy si premyslite ;)). V prípade $n = -1$, t.j., $n + 1 = 0$, je integrácia obzvlášť jednoduchá

$$I = \mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \quad ;).$$

Všimnime si, že hodnota integrálu I vôbec *nezávisí* na umiestnení danej kružnice v komplexnej rovine a ani na jej polomere :). Tento prekvapivý výsledok je malou ochutnávkou slávnej *Cauchyho teórie* počítania komplexných krivkových integrálov po uzavretých krivkách. Ilustrujeme ju v nasledujúcich príkladoch. Cauchy teória umožnuje hľadať hodnoty mnohých komplexných integrálov bez toho, aby sme ich priamo počítali pomocou parametrizácie danej krivky. Táto sofistikovaná a hlboká metóda má ďalekosiahle aplikácie takmer vo všetkých oblastiach matematiky :).

Príklad 5 (Cauchyho integrálna veta a integrálna formula)
Nájdime hodnotu krivkového integrálu

$$I = \int_\varphi \frac{1}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z,$$

kde krivka φ je kladne orientovaná kružnica s vyjadrením

$$\text{a) } |z| = \frac{1}{2}, \qquad \text{b) } |z| = 2, \qquad \text{c) } |z - i| = 1.$$

Riešenie:
Prvým základným výsledkom Cauchyho teórie krivkových integrálov je tzv. *Cauchyho integrálna veta.* Ak $f(z)$ je funkcia holomorfná v jednoducho súvislej oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$, potom pre každú uzavretú cestu φ ležiacu v G platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Inými slovami, komplexný krivkový integrál z $f(z)$ nezávisí na integračnej ceste v oblasti G. Druhým dôležitým tvrdením je tzv. *Cauchyho integrálna formula.* Ak φ je kladne orientovaná Jordanova cesta a funkcia $f(z)$ je holomorfná vo vnútri φ a spojitá a konečná na φ, potom

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot f(z_0) \quad \text{pre každý bod } z_0 \in \operatorname{Int}\varphi.$$

V našom prípade pracujeme s funkciou

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}.$$

Funkcia $f(z)$ je holomorfná v celej komplexnej rovine okrem koreňov jej menovateľa, t.j., bodov $\pm\mathrm{i}$ (samy overte :)). V úlohe a) nech G značí otvorený kruh $|z| < \frac{3}{4}$. Zrejme G je jednoducho súvislá oblasť, pričom $\pm\mathrm{i} \neq G$. Naviac, kružnica φ leží v oblasti G (samy overte pomocou vhodného nákresu ;)). Nakoľko funkcia $f(z)$ je holomorfná na celom G, podľa Cauchyho integrálnej vety pre integrál I máme

$$I = \int_\varphi \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 0 \quad :).$$

Na druhej strane, v úlohe b) obidva problematické body $\pm\mathrm{i}$ ležia vo vnútri kružnice φ, takže nemôžeme použiť Cauchyho integrálnu vetu :/. Keďže $f(z)$ je racionálna lomená funkcia, rozložíme ju v $\mathbb{C}$ na parciálne zlomky

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{z+\mathrm{i}} - \frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{z-\mathrm{i}}$$

(samy overte detaily ;)). Pre integrál I v zadaní príkladu potom máme

$$I = \int_\varphi \left(\frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{z+\mathrm{i}} - \frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{z-\mathrm{i}} \right) \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \int_\varphi \frac{1}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z - \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \int_\varphi \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z.$$

Na posledné dva integrály teraz aplikujeme Cauchyho integrálnu formulu

$$\int_\varphi \frac{1}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{\overbrace{1}^{\text{toto je holomorfné v } \operatorname{Int}\varphi}}{z - \underbrace{(-\mathrm{i})}_{\text{toto je } z_0 \in \operatorname{Int}\varphi}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \overbrace{1}^{\text{toto je hodnota 1 v } z_0} = 2\pi\mathrm{i},$$

$$\int_\varphi \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{\overbrace{1}^{\text{toto je holomorfné v } \operatorname{Int}\varphi}}{z - \underbrace{\mathrm{i}}_{\text{toto je } z_0 \in \operatorname{Int}\varphi}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \overbrace{1}^{\text{toto je hodnota 1 v } z_0} = 2\pi\mathrm{i}$$

(samy si dobre premyslite jednotlivé argumenty ;)). Hľadaný integrál I má potom hodnotu

$$I = \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot 2\pi\mathrm{i} - \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot 2\pi\mathrm{i} = 0 \quad :).$$

Poznamenajme, že kým v a) hodnota $I = 0$ bola dôsledkom Cauchyho integrálnej vety, v tomto prípade hodnota $I = 0$ vyplynula z Cauchyho integrálnej formuly. V úlohe c) leží vo vnútri φ iba jeden bod i (samy overte :)). Na výpočet I opäť využijeme rozklad $f(z)$ na parciálne zlomky. Teraz však

$$\int_\varphi \frac{1}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 0$$

podľa Cauchyho integrálnej vety, nakoľko výraz $\frac{1}{z+\mathrm{i}}$ je holomorfný vo vnútri φ (samy si premyslite :)). Naproti tomu

$$\int_\varphi \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot 1 = 2\pi\mathrm{i},$$

v súlade s Cauchyho integrálnou formulou (i toto si samy rozmyslite ;)). Preto

$$I = -\frac{\mathrm{i}}{2} \cdot 2\pi\mathrm{i} = \pi \quad :).$$

Hodnotu I sme mohli nájsť pomocou Cauchyho integrálnej formuly aj takto

$$I = \int_\varphi \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{\overbrace{\frac{1}{z+\mathrm{i}}}^{\text{toto je holomorfné v } \operatorname{Int}\varphi}}{z - \underbrace{\mathrm{i}}_{\text{toto je } z_0 \in \operatorname{Int}\varphi}}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \cdot \left[\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right]_{z=z_0=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} = \pi \quad :).$$

Príklad 6 (Cauchyho integrálna veta)
Určme krivkový integrál

$$I = \int_\varphi \frac{1}{\cos z}\,\mathrm{d}z, \qquad \varphi\,:\,|z| = 1, \quad \circlearrowleft.$$

Riešenie:
Z vlastností komplexnej goniometrickej funkcie $\cos z$ vieme, že jej nulové body sú práve nepárne násobky $\frac{\pi}{2}$ (samy overte :)). A keďže vo vnútri φ sa nenachádza ani jeden z nich, funkcia $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ je holomorfná vo vnútri φ (presnejšie, existuje jednoducho súvislá oblasť obsahujúca φ, na ktorej je funkcia $f(z)$ holomorfná; takouto oblasťou je napríklad otvorený kruh $|z| < \frac{3}{2}$, samy si premyslite ;)). Podľa Cauchyho integrálnej vety potom máme

$$I = \int_\varphi \frac{1}{\cos z}\,\mathrm{d}z = 0 \quad :).$$

Príklad 7 (Princíp deformácie krivky)
Vypočítajme krivkový integrál

$$I = \int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je kladne orientovaný obvod štvorca s vrcholmi v bodoch

$$1+\mathrm{i}, \quad -1+\mathrm{i}, \quad -1-\mathrm{i}, \quad 1-\mathrm{i}.$$

Riešenie:
Princíp deformácie krivky (integračnej cesty) je užitočné a často využívané pozorovanie. Umožňuje zameniť predpísanú integračnú cestu za inú s tým, že hodnota počítaného komplexného integrálu sa nezmení. Presnejšie, ak φ a ψ sú dve kladne orientované Jordanove cesty také, že krivka ψ leží vo vnútri krivky φ, a funkcia $f(z)$ je holomorfná v $\operatorname{Ext}\psi \cap \operatorname{Int}\varphi$ (v oblasti medzi obidvomi krivkami) a spojitá a konečná na uzávere $\overline{\operatorname{Ext}\psi \cap \operatorname{Int}\varphi}$, potom

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\psi f(z)\,\mathrm{d}z.$$

V našom príklade uvažujme kružnicu ψ tvaru $|z| = \frac{1}{2}$. Zrejme ψ leží vo vnútri φ a funkcia $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfná v oblasti medzi týmito dvomi krivkami (samy overte pomocou vhodného obrázku ;)). Podľa vyššie uvedeného tvrdenia potom dostávame

$$I = \int_\psi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Avšak podľa Príkladu 3 (s $n = -1$) má posledný integrál hodnotu $2\pi\mathrm{i}$ (samy si premyslite :)). Preto pre hodnotu I máme

$$I = \int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \quad :).$$

Tento príklad ilustruje výraznú efektívnosť Cauchyho teórie pri praktických situáciach. Krivkový integrál I sa dá v tomto prípade vypočítať i klasickým spôsobom pomocou parametrizácie krivky φ, výpočet by však bol podstatne zdĺhavejší (samy skúste ;)).

Príklad 8 (Cauchyho integrálna formula)
Stanovme krivkový integrál

$$I = \int_\varphi \frac{\sin z}{(z+2)(z-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z, \qquad \varphi\,:\,|z| = \frac{3}{2}, \quad \circlearrowleft .$$

Riešenie:
Pri riešení tohto príkladu môžeme využiť iba Cauchyho fígle, tradičný výpočet pomocou parametrizácie krivky φ zlyháva na plnej čiare :-/ (samy sa presvedčte :)). Keďže $\sin z$ je celá funkcia (t.j., holomorfná v celom $\mathbb{C}$), komplexná funkcia

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z+2)(z-\mathrm{i})}$$

je holomorfná v celej komplexnej rovine okrem bodov -2 a i. Výraz $\frac{1}{(z+2)(z-\mathrm{i})}$ rozložíme na parciálne zlomky

$$\frac{1}{(z+2)(z-\mathrm{i})} = -\frac{\frac{1}{2+\mathrm{i}}}{z+2} + \frac{\frac{1}{2+\mathrm{i}}}{z-\mathrm{i}}$$

(samy overte :)). Funkciu $f(z)$ možno teda vyjadriť v tvare

$$f(z) = -\frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \frac{\sin z}{z+2} + \frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \frac{\sin z}{z-\mathrm{i}}.$$

Tým sme si pripravili vhodnú pôdu na aplikáciu Cauchyho teórie, nakoľko pre integrál I potom dostávame

$$I = \int_\varphi \left(-\frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \frac{\sin z}{z+2} + \frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \frac{\sin z}{z-\mathrm{i}}\right) \mathrm{d}z = -\frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \int_\varphi \frac{\sin z}{z+2}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \int_\varphi \frac{\sin z}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z.$$

Do vnútra kružnice φ patrí iba bod i, preto

$$\int_\varphi \frac{\sin z}{z+2}\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{pomocou Cauchyho integrálnej vety,}$$

$$\int_\varphi \frac{\sin z}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sin i \qquad \text{pomocou Cauchyho integrálnej formuly}$$

(samy si dobre premyslite ;)). Hľadaný komplexný integrál I teda spĺňa

$$I = \frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot \sin i = \frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}}_{\sin \mathrm{i}} = \frac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}\right)$$

$$= \frac{2-\mathrm{i}}{5} \cdot \pi \cdot \frac{1-\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}} = \frac{2\pi(1-\mathrm{e}^2)}{5\mathrm{e}} - \mathrm{i} \cdot \frac{\pi(1-\mathrm{e}^2)}{5\mathrm{e}} \qquad :).$$

Príklad 9 (Cauchyho integrálny vzorec)
Nájdime hodnotu krivkového integrálu

$$I = \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z}{(z+2)^4}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je ľubovoľná kladne orientovaná Jordanova cesta obsahujúca vo svojom vnútri bod -2.

Riešenie:
Pri riešení využijeme ďalší významný výsledok Cauchyho teórie, tzv. *Cauchyho integrálny vzorec*. Jedná sa o zovšeobecnenie Cauchyho integránej formuly. Ak $G \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $f(z)$ je komplexná funkcia holomorfná na G, potom pre každú kladne orientovanú Jordanovu krivku φ ležiacu v G a pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0) \qquad \text{pre každé } z_0 \in \operatorname{Int}\varphi.$$

V našom prípade máme $f(z) = \mathrm{e}^z$ a $z_0 = -2 \in \operatorname{Int}\varphi$ podľa zadania príkladu. Pre hodnotu integrálu I môžeme teda písať

$$I = \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z}{(z+2)^4}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{3!}\cdot\left[(\mathrm{e}^z)'''\right]_{z=-2} = \frac{\pi\mathrm{i}}{3}\cdot\left[\mathrm{e}^z\right]_{z=-2} = \frac{\pi\mathrm{i}}{3\mathrm{e}^2} \qquad :).$$

Príklad 10 (nezávislosť na integračnej ceste)
Zistime hodnotu krivkového integrálu

$$I = \int_\varphi \cos(\mathrm{i}z)\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je ľubovoľná cesta od bodu 0 do bodu 2i.

Riešenie:
Ukážeme, že predložený komplexný krivkový integrál nezávisí na integračnej

ceste φ. Nezávislosť na integračnej ceste je úzko spätá s pojmom primitívna funkcia. Konkrétne, komplexný integrál $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ zo spojitej funkcie $f(z)$ nezávisí na integračnej ceste φ v otvorenej množine $G \subseteq \mathbb{C}$ práve vtedy, keď $f(z)$ má v G primitívnu funkciu, t.j., existuje holomorfná funkcia $F(z)$ s vlastnosťou $F'(z) = f(z)$ pre každé $z \in G$. V tomto prípade potom platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1),$$

kde z_1 je začiatočný bod a z_2 koncový bod orientovanej krivky φ ležiacej v G. Posledná formula je komplexná verzia Newtonovej–Leibnizovej formuly reálnej analýzy. V našom prípade k funkcii $f(z) = \cos(\mathrm{i}z)$ existuje v celom $\mathbb{C}$ primitívna funkcia $F(z) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$, nakoľko pre každé $z \in \mathbb{C}$ máme

$$F'(z) = [-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)]' = -\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\cos(\mathrm{i}z) = \cos(\mathrm{i}z) = f(z).$$

Pre hodnotu integrálu I v zadaní príkladu potom platí

$$I = \int_\varphi \cos(\mathrm{i}z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\mathrm{i}} \cos(\mathrm{i}z)\,\mathrm{d}z = [-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)]_0^{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\sin 2 \quad :).$$

Príklad 11 (Cauchyho veta o rezíduách)
Nájdime krivkový integrál

$$I = \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2-9)}\,\mathrm{d}z, \qquad \varphi\,:\,|z| = 1, \quad \circlearrowleft.$$

Riešenie:
Vrcholom a zovšeobecnením všetkých doterajších Cauchyho trikov pri počítaní komplexných integrálov je tzv. *Cauchyho veta o rezíduách* (alebo tiež *Cauchyho reziduálna veta*). Ukazuje, ako efektívne vypočítať hodnotu krivkového integrálu pozdĺž Jordanovej krivky, vo vnútri ktorej má integrand konečne veľa *izolovaných singularít.* Pod pojmom izolovaná singularita funkcie $f(z)$ rozumieme bod z_0, pre ktorý je funkcia $f(z)$ holomorfná na nejakom jeho prstencovom okolí, ale v samotnom bode z_0 nie je $f(z)$ holomorfná. Ak φ je kladne orientovaná Jordanova krivka a $f(z)$ je funkcia spojitá a konečná

na φ a majúca konečne veľa izolovaných singularít z_1, z_2, ..., z_m vo vnútri krivky φ, potom platí rovnosť

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left[\operatorname{res}_{z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z_2} f(z) + \cdots + \operatorname{res}_{z_m} f(z)\right],$$

kde komplexné číslo $\operatorname{res}_{z_k} f(z)$, $k = 1, \ldots, m$, je tzv. *rezíduum* funkcie $f(z)$ v bode z_k. Súvisí s Laurentovým rozvojom funkcie $f(z)$ v nejakom prstencovom okolí bodu z_k, presnejšie, $\operatorname{res}_{z_k} f(z)$ je práve koeficient pri mocnine $\frac{1}{z-z_k}$ tohto rozvoja. V našom prípade máme integrovať komplexnú funkciu

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2-9)}.$$

Funkcia $f(z)$ má zrejme izolované singularity v bodoch $z_1 = 0$, $z_2 = 3$ a $z_3 = -3$ (samy overte :)). Nakoľko vo vnútri kružnice φ leží iba bod z_1, pre integrál I podľa Cauchyho vety o rezíduách máme

$$I = 2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}_{z_1} f(z).$$

Potrebujeme teda stanoviť rezíduum funkcie $f(z)$ v bode z_1. Z tvaru $f(z)$ vyplýva, že bod z_1 je jej dvojnásobný pól (samy si premyslite :)). V takomto prípade vieme hodnotu $\operatorname{res}_{z_1} f(z)$ určiť i bez priamej konštrukcie Laurentovho radu funkcie $f(z)$ v okolí bodu z_1. Konkrétne, platí vzorec

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right]'.$$

Dosadením potom dostaneme

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2-9)}\right]' = \lim_{z\to 0}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{z^2-9}\right]' = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z\cdot(z^2-9)-\mathrm{e}^z\cdot 2z}{(z^2-9)^2} = -\frac{1}{9}$$

(samy overte detaily výpočtu ;)). Hodnota hľadaného integrálu I teda je

$$I = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{9} \quad :).$$

Príklad 12 (Cauchyho veta o rezíduách)
Pre $R > 0$ stanovme krivkový integrál

$$I = \int_{\varphi} \sin^2 \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z, \qquad \varphi\,:\,|z| = R, \quad \circlearrowleft .$$

Riešenie:
Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Komplexná funkcia $f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}$ má zrejme len jednu konečnú singularitu, a to bod $z = 0$. V tomto prípade sa však jedná o *podstatnú singularitu*, pretože

$$\lim_{z\to 0} \sin^2 \frac{1}{z} = \text{ neexistuje}$$

(samy overte ;)). Na stanovenie rezídua funkcie $f(z)$ v bode $z = 0$ musíme preto (bohužiaľ) zostrojiť samotný Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$ na nejakom prstencovom okolí bodu $z = 0$:/. Z jednoznačnosti Laurentových rozvojov komplexných funkcií vyplýva, že stačí nájsť *akýkoľvek* rozvoj funkcie $f(z)$, v ktorom budú vystupovať celočíselné mocniny argumentu z (samy si dobre premyslite ;)). Podľa definície komplexného sínusu pre každé $z \neq 0$ máme

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \cdot z^{-n}$$

(samy overte ;)). Potrebujeme nájsť druhú mocninu tohto funkcionálneho radu, t.j., zistiť

$$\sin^2 \frac{1}{z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \cdot z^{-n}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \cdot z^{-m}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - \cdots\right) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - \cdots\right).$$

V skutočnosti nás však z celého Laurentovho radu zaujíma iba koeficient pri mocnine z^{-1}. Ale pri postupnom roznásobovaní posledného súčinu mocninu z^{-1} nijako nevyrobíme (samy si dobre premyslite ;)). To znamená, že v danom Laurentovom rozvoji funkcie $f(z)$ v okolí bodu $z = 0$ bude člen s mocninou z^{-1} vystupovať s *nulovým* koeficientom, a preto $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$:). A keďže bod

$z=0$ leží vo vnútri každej kružnice φ s vyjadrením $|z|=R$, $R>0$, podľa vety o rezíduách pre hľadaný integrál I platí $I=2\pi \mathrm{i}\cdot \operatorname{res}_0 f(z)=0$:).

Príklad 13 (Cauchyho veta o rezíduách)
Vypočítajme krivkový integrál

$$I=\int_{\varphi} \frac{z^3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1}\,\mathrm{d}z,$$

kde krivka φ je kladne orientovaná kružnica s vyjadrením $|z|=2$.

Riešenie:
Na výpočet integrálu I v zadaní príkladu aplikujeme Cauchyho vetu o rezíduách. Potrebujeme teda zistiť všetky izolované singularity funkcie

$$f(z)=\frac{z^3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1},$$

ktoré sa nachádzajú vo vnútri kružnice φ, a následne stanoviť v nich rezíduá funkcie $f(z)$. Vidíme, že $f(z)$ má izolované singularity v bodoch $z=-1$ (jednoduchý pól) a $z=0$ (podstatná singularita), pričom oba body ležia vo vnútri φ (podľa vhodného náčrtku :)). Pre rezíduum v póle $z=-1$ platí

$$\operatorname{res}_{-1} f(z)=\lim_{z\to -1}(z+1)\cdot f(z)=\lim_{z\to -1} z^3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Rezíduum funkcie $f(z)$ v bode $z=0$ zistíme priamo pomocou definície rezídua, t.j., rozvojom $f(z)$ do Laurentovho radu na nejakom prstencovom okolí bodu 0. Na základe jednoznačnosti Laurentovho radu to znamená, že potrebujeme rozvinúť $f(z)$ do *akéhokoľvek* radu podľa mocnín z^n, kde $n\in\mathbb{Z}$ (samy si premyslite :)). Z definície komplexnej exponenciálnej funkcie e^z máme

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}\quad \text{pre každé } z\neq 0.$$

Ďalej funkcia $\frac{1}{1+z}$ je pre $|z|<1$ súčtom geometrického radu s kvocientom $q=-z$, pretože

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{m=0}^{\infty}(-z)^m=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^m,\quad |z|<1$$

(samy overte ;)). Pre funkciu $f(z)$ potom dostaneme vyjadrenie

$$f(z) = \frac{z^3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1} = z^3 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z+1} = z^3 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^m\right)$$

platné pre $0 < |z| < 1$ (i toto si samy dobre premyslite ;)). Jedná sa teda (po roznásobení) o hľadaný Laurentov rad funkcie $f(z)$ na prstencovom okolí bodu 0. Chceme nájsť Laurentov koeficient pri mocnine z^{-1}, keďže podľa definície práve to je hľadané rezíduum $\operatorname{res}_0 f(z)$:). Pri roznásobovaní daných nekonečných súčtov má exponent všeobecnej mocniny štruktúru

$$\underbrace{3}_{\text{príspevok od } z^3} \quad + \quad \underbrace{(-n)}_{\text{príspevok od prvej sumy}} \quad + \quad \underbrace{m}_{\text{príspevok od druhej sumy}} \quad ,$$

kde m, n sú nezáporné celé čísla (samy overte :)). Zaujíma nás, kedy platí $3 - n + m = -1$, teda $n = 4 + m$. Index m z druhej sumy je teda nezávislý, kým index n z prvej sumy závisí na aktuálnej hodnote indexu m, a to prostredníctvom rovnosti $n = 4 + m$. Jednotlivé členy, ktoré budú prispievať k celkovému členu s mocninou z^{-1}, sú teda postupne

$$\begin{gathered}
z^3 \cdot \frac{z^{-4}}{4!} \cdot (-1)^0 z^0, \\
z^3 \cdot \frac{z^{-5}}{5!} \cdot (-1)^1 z^1, \\
z^3 \cdot \frac{z^{-6}}{6!} \cdot (-1)^2 z^2, \\
z^3 \cdot \frac{z^{-7}}{7!} \cdot (-1)^3 z^3, \\
\vdots \\
z^3 \cdot \frac{z^{-4-m}}{(4+m)!} \cdot (-1)^m z^m, \\
\vdots \\
\Downarrow
\end{gathered}$$

$$\text{celkový koeficient pri } z^{-1} = \frac{(-1)^0}{4!} + \frac{(-1)^1}{5!} + \frac{(-1)^2}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(4+m)!} + \cdots$$

(samy si dobre premyslite jednotlivé argumenty :)). Pre rezíduum funkcie $f(z)$ v bode 0 potom máme

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(4+m)!} + \cdots .$$

Tento súčet však vieme určiť, pretože platí

$$\mathrm{e}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \underbrace{\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots}_{\text{a toto je už } \operatorname{res}_0 f(z) \text{ :)}} .$$

Preto dostávame rovnosť

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \operatorname{res}_0 f(z) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{res}_0 f = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{3} \quad :).$$

Pre integrál I v zadaní príkladu potom podľa rezíduálnej vety máme

$$I = \int_{\varphi} \frac{z^3\, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1}\, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot [\operatorname{res}_{-1} f(z) + \operatorname{res}_0 f(z)] = 2\pi\mathrm{i} \cdot \left[-\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{3} \right] = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}.$$

Príklad 14 (Taylorov rad)
Rozviňme podľa mocnín z funkciu

$$f(z) = \int_{\varphi} \mathrm{e}^{w^2} \mathrm{d}w,$$

kde krivka φ je orientovaná úsečka od bodu 0 do bodu z, $z \in \mathbb{C}$, a určme obor konvergencie tohto rozvoja.

Riešenie:
V prvom rade si všimnime, že nakoľko je výraz e^{w^2} spojitý v každom $w \in \mathbb{C}$, funkcia $f(z)$ je definovaná na celej komplexnej rovine (samy si premyslite :)). Podľa definície komplexnej exponenciálnej funkcie platí

$$\mathrm{e}^{w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{n!},$$

pričom tento funkcionálny rad konverguje rovnomerne na každej kompaktnej podmnožine v $\mathbb{C}$ (i toto si samy premyslite :)). Funkcia $f(z)$ potom pre každé komplexné číslo z spĺňa

$$f(z) = \int_\varphi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{n!} \right) \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\varphi \frac{w^{2n}}{n!}\, \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \int_\varphi w^{2n}\, \mathrm{d}w$$

(samy overte :)). Každá z funkcií w^{2n}, $n \in \mathbb{N}_0$, je iste holomorfná v celej komplexnej rovine. Preto k nej v celom $\mathbb{C}$ existuje primitívna funkcia, konkrétne $\frac{w^{2n+1}}{2n+1}$. Následne, komplexný krivkový integrál $\int_\varphi w^{2n}\, \mathrm{d}w$ nezávisí na integračnej ceste φ a platí

$$\int_\varphi w^{2n}\, \mathrm{d}w = \left[\frac{w^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^z = \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}$$

(samy si veľmi pozorne premyslite jednotlivé argumenty :)). Z toho potom dostávame hľadaný mocninový rozvoj funkcie $f(z)$ na okolí bodu $z_0 = 0$, t.j.,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}.$$

Oborom konvergencie tohto radu je zrejme celé $\mathbb{C}$ (samy overte :)). Vidíme teda, že funkcia $f(z)$ – ako súčet mocninového radu – je holomorfná v celej komplexnej rovine a získaný rozvoj je jej Taylorovým rozvojom so stredom v bode $z_0 = 0$ (samy si premyslite ;)).

Príklad 15 (ťažší) (Laurentov rad)

Pre reálny parameter p nájdime Laurentove koeficienty funkcie $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{p}{2}\cdot\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ na rýdzom okolí bodu $z_0 = 0$.

Riešenie:

Z komplexnej analýzy vieme, že ak a_n sú koeficienty Laurentovho rozvoja funkcie $f(z)$ na nejakom medzikruží so stredom v bode z_0, t.j.,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pre každé } z \text{ z daného medzikružia,}$$

potom pre každý index $n \in \mathbb{Z}$ platí formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

kde φ je ľubovoľná kladne orientovaná kružnica so stredom v bode z_0 ležiaca v uvažovanom medzikruží. V našom prípade je zrejme funkcia $f(z)$ pre každý parameter $p \in \mathbb{R}$ holomorfná v celom $\mathbb{C}$ okrem bodu $z_0 = 0$. Na každom prstencovom okolí bodu 0 je teda možné ju rozvinúť do Laurentovho radu, pričom jej odpovedajúce Laurentove koeficienty potom spĺňajú

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^{\frac{p}{2} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)}}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Krivku φ budeme uvažovať ako kladne orientovanú kružnicu $|z| = 1$. Daný komplexný integrál vypočítame štandardným spôsob pomocou parametrizácie krivky φ. Keďže v našom prípade máme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, a $\mathrm{d}z = \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t$, po dosadení postupne dostávame

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\frac{p}{2} \cdot (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\frac{p}{2} \cdot 2\mathrm{i} \cdot \sin t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}} \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p \sin t - tn)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(p \sin t - tn) \, \mathrm{d}t + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(p \sin t - tn) \, \mathrm{d}t.$$

(samy overte :)). Posledný určitý integrál má hodnotu nula. Skutočne,

$$\int_0^{2\pi} \sin(p \sin t - tn) \, \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = t - \pi, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t, \\ 0 \rightsquigarrow -\pi, \ 2\pi \rightsquigarrow \pi \end{array} \right| = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left[p \sin(u + \pi) - (u + \pi)n\right] \mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left[-p \sin u - un - n\pi\right] \mathrm{d}u = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(p \sin u + un + n\pi) \, \mathrm{d}u$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} (-1)^n \cdot \sin(p \sin u + un) \, \mathrm{d}u = (-1)^{n+1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(p \sin u + un) \, \mathrm{d}u = 0,$$

pretože funkcia $\sin(p \sin u + un)$ je nepárna. Pri prechode na tretí riadok sme aplikovali rozsínusovanie a využili identity $\cos n\pi = (-1)^n$ a $\sin n\pi = 0$:). Hľadaný Laurentov koeficient a_n má teda vyjadrenie

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(p \sin t - tn) \, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Tento určitý integrál sa v literatúre obvykle vyskytuje pod názvom *Besselova funkcia prvého druhu* (premennej p) a označuje sa $J_n(p)$:).