Príklad
Určme všetky reálne hodnoty $\varphi \in [-\pi, \pi)$, pre ktoré existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{in\varphi}$.

Riešenie:
Pri riešení tohto príkladu je vhodné použiť *Cauchyho–Bolzanovo kritérium* konvergencie postupnosti komplexných čísiel. Toto kritérium poskytuje nutnú a postačujúcu podmienku konvergencie danej postupnosti bez toho, aby sme poznali hodnotu samotnej limity. Funguje rovnako ako v prípade reálnych postupností. Konkrétne, postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ má konečnú limitu (v $\mathbb{C}$) práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ taký, že pre každý index $n \geq n_0$ a pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

Cauchyho–Bolzanovo kritérium vlastne vyjadruje fakt, že postupnosť $\{a_n\}$ je konvergentná v $\mathbb{C}$ práve vtedy, keď je cauchyovská v metrike indukovanej absolútnou hodnotou na $\mathbb{C}$ (samy si premyslite letmou spomienkou na krásne časy Matematickej analýzy II, konkrétne na metrické priestory; obzvlášť, množina $\mathbb{C}$ je vzhľadom na metriku danú absolútnou hodnotou úplným metrickým priestorom :)).

V našom prípade zafixujme nejakú hodnotu $\varphi \in [-\pi, \pi)$ a predpokladajme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{in\varphi}$ existuje konečná. Potom na základe práve uvedeného kritéria pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+k)\varphi} - \mathrm{e}^{in\varphi}\right| < \varepsilon \quad \text{pre každý index } n \geq n_0 \text{ a pre každé } k \in \mathbb{N}.$$

Posledná nerovnosť sa dá upraviť na tvar

$$\left|\mathrm{e}^{in\varphi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} - \mathrm{e}^{in\varphi}\right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left|\mathrm{e}^{in\varphi}\right|}_{\text{toto je 1}} \cdot \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} - 1\right| < \varepsilon.$$

Táto nerovnosť však platí pre *každé* $\varepsilon > 0$ a pre *každé* $k \in \mathbb{N}$ (samy si veľmi pozorne premyslite; uvedená nerovnosť platí *nezávisle* na indexe n_0 :)). Z toho však ihneď vyplýva, že nutne $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} - 1 = 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ (i toto si samy premyslite ;)). Obzvlášť, pre hodnotu $k = 1$ máme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1$, čo signalizuje, že φ je nejaký celočíselný násobok 2π (samy overte :)). V intervale $[-\pi, \pi)$ však leží len jediný celistvý násobok 2π, a to $\varphi = 0$. Preto limita v zadaní príkladu existuje konečná iba pre hodnotu $\varphi = 0$. V tomto prípade platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot 0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Na záver ešte ostáva si premyslieť, že pre žiadne $\varphi \in [-\pi, \pi)$ nemôže nastať situácia $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \infty$ (komplexné nekonečno :)), nakoľko výraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$ spĺňa $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\right| = 1$ pre každé $\varphi \in [-\pi, \pi)$ a každé $n \in \mathbb{N}$ (samy overte ;)).