Numerické metody
11. přednáška, 5. května 2016

Jiří Zelinka

Opakování

- Gaussova eliminační metoda
- LR rozklad
- Výběr vedoucího prvku (pivota)

Věta

Nechť všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak matici A lze rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice.

Poznámka

Rozklad je jednoznačný, pokud v jedné matici předepíšeme diagonální prvky, zpravidla jedničky.

Důsledky

- Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.
- Nechť matice A je pozitivně definitní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.

Konec opakování

Choleského rozklad

Věta

Nechť matice A je symetrická a její všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak existuje taková horní trojúhelníková matice $T \in \mathcal{M}_n$, že $A = T^T T$.

Prvky matice $T = (t_{ij})$:

- $t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j = 2, \dots, n,$
- $t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li}^2}, \quad i = 2, \dots, n$
- $t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}}(a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li} t_{lj}), \qquad j > i \qquad t_{ij} = 0, \qquad j < i$

Příklad

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\
-x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= -8
\end{aligned}
$$

Rozklad třídiagonální matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} \\ a_{i,i-1} &= l_{i,i-1}, & i &= 2,3,\ldots,n \\ a_{ii} &= l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, & i &= 2,3,\ldots,n \\ a_{i,i+1} &= l_{ii}u_{i,i+1}, & i &= 1,2,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Věta

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$ je třídiagonální matice s vlastnostmi:

$$\begin{array}{lll} a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0, & i = 2, 3, \dots, n-1, & \\ |a_{11}| > |a_{12}|, & & \\ |a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|, & i = 2, \dots, n-1, & \\ |a_{nn}| > |a_{n,n-1}|. & & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ a \\ a \end{array}}\right\} \begin{array}{l} A \text{ – řádkově diagon.} \\ \text{dominantní} \end{array}$$

Pak matice A je regulární a hodnoty l_{ii}, $i = 1, \dots, n$, vypočtené ze uvedených vztahů jsou různé od nuly.

Důsledek

Jsou-li splněny předpoklady věty, lze matici A rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice v uvedeném tvaru.

Příklad

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3 - x_4} &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}- x_4} &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 2x_4 &= 1.5 \end{aligned}$$