

Numerické metody

Jiří Zelinka

jaro 2016

- Horová I., Zelinka J.: Numrické metody, 2. rozšířené vydání, MU, 2004
- Ralston A.: Základy numerické matematiky, Academia, 1978
- Vitásek E.: Numerické metody, SNTL, 1987
- Mathews, J.H., Fink, K.D.: Numerical methods using MATLAB, Pearson Prentice Hall, 2003

Osnova

- Řešení nelineárních rovnic
- Polynomy
- Řešení soustav lineárních rovnic – přímé metody
- Řešení soustav lineárních rovnic – iterační metody
- Řešení soustav nelineárních rovnic

Předpoklady

- Lineární algebra
- Diferenciální počet v \mathbb{R} (\mathbb{R}^n)
- Integrální počet v \mathbb{R}

x : přesná hodnota, \tilde{x} : aproximace x
 $\tilde{x} - x$: *absolutní chyba* aproximace \tilde{x}
 $|\tilde{x} - x| \leq \alpha$: *odhad absolutní chyby*

$\frac{x - \tilde{x}}{x}$: *relativní chyba*
 $\left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| \leq \delta$: *odhad relativní chyby*

Symbolika O , o

f – funkce definovaná v okolí bodu a (může být i $a = \pm\infty$)

g – funkce nenulová v prstencovém okolí bodu a

$$f(x) = O(g(x)) \text{ pro } x \rightarrow a \quad \limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty.$$

Význam: funkce f se v okolí bodu a chová „podobně“ jako funkce g .

$$f(x) = o(g(x)) \text{ pro } x \rightarrow a \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Význam: funkce f konverguje v bodě a k nule „rychleji“ než funkce g .

Podobně

$$a_n = O(b_n) \text{ nebo } a_n = o(b_n) \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

kde a_n, b_n jsou prvky posloupností.

Dodatek „pro $x \rightarrow a$ “ se často vynechává, pokud je jasné, o které a se jedná. Např. $a_n = O(1/n)$, $f(h) = o(h^3)$.

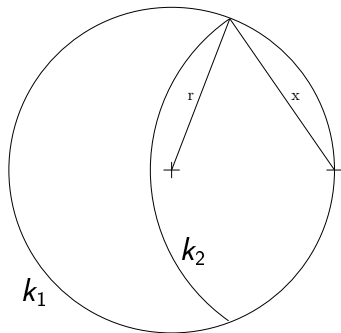
Příklad: Taylorův rozvoj

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + O(h^2), \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$

Motivační příklad

Pro kružnici k_1 o poloměru r sestrojte kružnici k_2 se středem na kružnici k_1 tak, aby oblast ohraničená oběma kružnicemi měla poloviční obsah než vnitřek kružnice k_1 .



Úloha ze starého Egypta

Stojíš před stěnou, za kterou je studna Lotosu jako kruh Slunce. Vedle studny je položen jeden kámen, jedno dláto a dva stvoly třtiny. Jeden stvol je dlouhý tři míry, druhý je dlouhý dvě míry. Stvoly (opřené ve stabilní poloze v diametrálně protilehlých bodech na okraji dna) se kříží na povrchu vody ve studni Lotosu a ten povrch je jednu míru nade dnem. Kdo určí velikost nejdelší délky, kterou lze umístit do dna studny Lotosu, ten si vezme oba stvoly a bude knězem boha Ra.

Řešíme rovnici $f(x) = 0$ na **uzavřeném** intervalu $I = [a, b]$,
pro reálnou **spojitou** funkci f , ξ – řešení rovnice,

Iterační proces: vytváříme posloupnost $(x_k)_{k=0}^{\infty}$, $x_k \rightarrow \xi$.
 $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ – iterační posloupnost.

Metoda půlení intervalu – bisekce

$f(a) \cdot f(b) \leq 0$, $a_0 = a$, $b_0 = b$, položíme $x_0 = (a_0 + b_0)/2$.

Pokud $f(a_0) \cdot f(x_0) \leq 0$ volíme

$a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$, jinak

$a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$,

tedy $\xi \in [a_1, b_1]$.

Obecně: známe $a_k, b_k, f(a_k) \cdot f(b_k) \leq 0$, tedy $\xi \in [a_k, b_k]$,
položíme $x_k = (a_k + b_k)/2$.

Pokud $f(a_k) \cdot f(x_k) \leq 0$ volíme

$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$, jinak

$a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$,

tedy $\xi \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Odhad absolutní chyby v k -tém kroku:

$$|x_k - \xi| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}$$

Algoritmus končí, pokud je absolutní chyba dostatečně malá.

Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

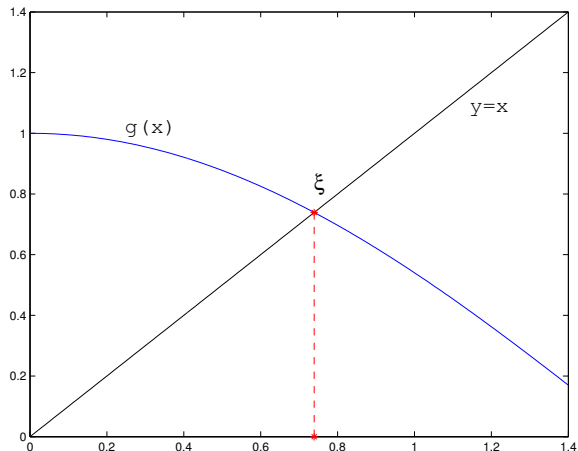
- Tato metoda se používá pro rovnici $x = g(x)$
- Funkce g je spojitá na $I = [a, b]$
- Řešení ξ této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce g

Iterační proces

- Zvolíme $x_0 \in I$ a položíme $x_1 = g(x_0)$
- Obecně $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce g se nazývá **iterační funkce**

Geometrická interpretace

Pevný bod ξ je průsečík grafu funkce g a přímky $y = x$.



Existence pevného bodu

Věta: Jestliže spojitá funkce g zobrazuje interval I do sebe, tj. pro každé $x \in I$ platí $g(x) \in I$, pak na intervalu I existuje alespoň jeden pevný bod ξ funkce g .

Jednoznačnost pevného bodu

Definice Funkce g zobrazující interval I do sebe se nazývá kontrakce na I , jestliže existuje taková konstanta L (Lipschitzova konstanta), $0 \leq L < 1$, že pro každé $x, y \in I$ platí

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Banachova věta o pevném bodě

Jestliže g je kontrakce na I , pak g má na tomto intervalu jediný pevný bod a iterační posloupnost definovaná vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ konverguje k pevnému bodu funkce g pro libovolné $x_0 \in I$.

Věta: Necht' g je kontrakce s Lipschitzovou konstantou L na I a $x_0 \in I$ je libovolné. Pak pro iterační posloupnost definovanou vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ platí odhad

$$|x_k - \xi| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_0 - x_1|$$

Určení konstanty L pomocí derivace

Lagrangeova věta o střední hodnotě:

$$g(x) - g(y) = g'(\mu) \cdot (x - y)$$

Bod μ leží mezi x a y .

Pokud pro každé $x \in I$ platí $|g'(x)| \leq L < 1$ a g zobrazuje I do sebe, je g kontrakce na I .

$$L = \max_{x \in I} |g'(x)|$$