

# Numerické metody

## 2. přednáška

Jiří Zelinka

3. března 2016

## Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

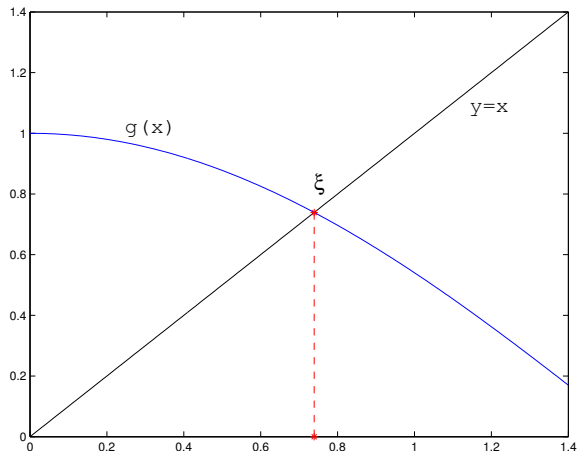
- Tato metoda se používá pro rovnici  $x = g(x)$
- Funkce  $g$  je spojitá na  $I = [a, b]$
- Řešení  $\xi$  této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce  $g$

## Iterační proces

- Zvolíme  $x_0 \in I$  a položíme  $x_1 = g(x_0)$
- Obecně  $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce  $g$  se nazývá **iterační funkce**

# Geometrická interpretace

Pevný bod  $\xi$  je průsečík grafu funkce  $g$  a přímky  $y = x$ .



# Existence pevného bodu

**Věta:** Jestliže spojitá funkce  $g$  zobrazuje interval  $I$  do sebe, tj. pro každé  $x \in I$  platí  $g(x) \in I$ , pak na intervalu  $I$  existuje alespoň jeden pevný bod  $\xi$  funkce  $g$ .

## Jednoznačnost pevného bodu

**Definice** Funkce  $g$  zobrazující interval  $I$  do sebe se nazývá kontrakce na  $I$ , jestliže existuje taková konstanta  $L$  (Lipschitzova konstanta),  $0 \leq L < 1$ , že pro každé  $x, y \in I$  platí

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

## Banachova věta o pevném bodě

Jestliže  $g$  je kontrakce na  $I$ , pak  $g$  má na tomto intervalu jediný pevný bod a iterační posloupnost definovaná vztahem  $x_{k+1} = g(x_k)$  konverguje k pevnému bodu funkce  $g$  pro libovolné  $x_0$ .

**Věta:** Necht'  $g$  je kontrakce s Lipschitzovou konstantou  $L$  na  $I$  a  $x_0 \in I$  je libovolné. Pak pro iterační posloupnost definovanou vztahem  $x_{k+1} = g(x_k)$  platí odhad

$$|x_k - \xi| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_0 - x_1|$$

## Určení konstanty $L$ pomocí derivace

Lagrangeova věta o střední hodnotě:

$$g(x) - g(y) = g'(\mu) \cdot (x - y)$$

Pokud pro každé  $x \in I$  platí  $|g'(x)| \leq L < 1$  a  $g$  zobrazuje  $I$  do sebe, je  $g$  kontrakce na  $I$ .

$$L = \max_{x \in I} |g'(x)|$$

## Konec opakování

## Víceková metoda

$$x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-s+1})$$

## Nestacionární metoda

$$x_{k+1} = g_k(x_k)$$

## Nestacionární víceková metoda

$$x_{k+1} = g_k(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-s+1})$$

Pevný bod  $\xi$  funkce  $g$  se nazývá

- **přitahující** (atraktivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí  $V$  tohoto bodu  $\xi$ , že pro každou počáteční aproximaci  $x_0 \in V$  posloupnost iterací  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  konverguje k bodu  $\xi$ .
- **odpuzující** (repulzivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí  $U$  bodu  $\xi$ , že pro každou počáteční aproximaci  $x^0 \in U, x_0 \neq \xi$ , existuje takové  $k$ , že  $x_k \notin U$ .

**Věta:** Necht'  $g \in C[a, b]$ ,  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  a necht'  $\xi$  je pevný bod.

- Jestliže pro všechna  $x \neq \xi$  z nějakého okolí  $V$  bodu  $\xi$  platí

$$\left| \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right| < 1,$$

pak  $\xi$  je přitahující pevný bod.

- Jestliže pro všechna  $x \neq \xi$  z nějakého okolí  $U$  bodu  $\xi$  platí

$$\left| \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right| > 1,$$

pak  $\xi$  je odpuzující pevný bod.



**Důsledek:** Necht'  $g \in C[a, b], g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  a necht'  $g$  má v bodě  $\xi$  derivaci.

- Je-li  $|g'(\xi)| < 1$ , pak  $\xi$  je přitahující pevný bod.
- Je-li  $|g'(\xi)| > 1$ , pak  $\xi$  je odpuzující pevný bod.

# Hledání vhodného tvaru iterační funkce

$$f(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad g(x) = x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{k}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}$$

## Řád konvergence posloupnosti

**Definice** Mějme posloupnost  $(x_n)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ .

Chyba v  $k$ -tém členu:  $e_k = x_k - \xi$

Existuje-li nyní reálné číslo  $p \geq 1$  takové, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \neq 0,$$

řekneme, **řád konvergence** posloupnosti je  $p$ .

Pokud posloupnost  $(x_n)$  byla získána nějakou iterační metodou, říkáme, že **metoda je řádu  $p$** .

**Poznámka:** Definici lze použít pro libovolné (např. vícekrokové nebo nestacionární) iterační metody.

## Řád prosté iterační metody

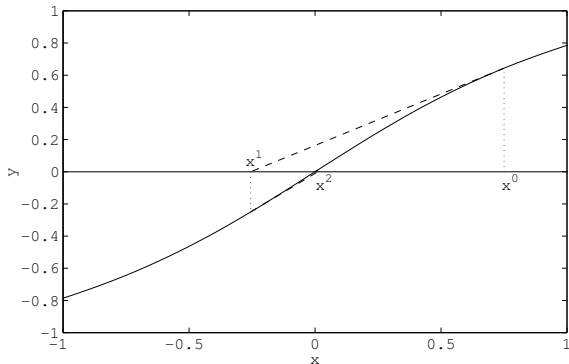
**Věta:** Necht' funkce  $g$  má v okolí bodu  $\xi$  derivace až do řádu  $p \geq 1$  včetně. Iterační metoda  $x_{k+1} = g(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  je řádu  $p$  tehdy a jen tehdy, když platí

$$\xi = g(\xi), \quad g^{(j)}(\xi) = 0, \quad 1 \leq j < p, \quad g^{(p)}(\xi) \neq 0.$$

**Důkaz:** Z Taylorova rozvoje.

# Newtonova metoda

Uvažujme opět rovnici  $f(x) = 0$ . Zvolme  $x_0$  a řešení hledáme na tečně k  $f$  v bodě  $x_0$  jako její průsečík s osou  $x$ .



Podobně pokračujeme dál:  $x_{k+1}$  je průsečík tečny k funkci  $f$  v bodě  $x_k$  s osou  $x$ .

Rovnice tečny:

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Máme tedy iterační funkci

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Newtonova metoda se také nazývá **metoda tečen**.

## Věta

Nechť  $f \in C^2[a, b]$ . Nechť  $\xi \in [a, b]$  je kořenem rovnice  $f(x) = 0$  a  $f'(\xi) \neq 0$ . Pak existuje  $\delta > 0$  tak, že posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  generovaná Newtonovou metodou konverguje k bodu  $\xi$  pro každou počáteční aproximaci  $x^0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq [a, b]$ .

## Důkaz

Ukážeme, že na  $[\xi - \delta, \xi + \delta]$  je funkce  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  kontrakcí.

## Důsledek:

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen  $\xi$ .

## Příklad

Výpočet  $\sqrt[3]{10}$ :

$$f(x) = x^3 - 10, \quad x \in I = [2, 3]$$

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 10}{3x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3x^2}$$

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2.1667, \quad x_2 = 2.1545, \quad x_3 = 2.1544$$



## Věta

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty,

$M = \max_{x \in I} |f''(x)|$ ,  $m = \min_{x \in I} |f'(x)| > 0$ ,  $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$ . Pak

pro posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  generovanou Newtonovou metodou platí

$$\text{a) } |x_{k+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m}(x_k - \xi)^2$$

$$\text{b) } |x_{k+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m}(x_{k+1} - x_k)^2$$

## Důkaz

Z Taylorova rozvoje.

## Věta

Nechť  $f \in C^2[a, b]$  a necht' rovnice  $f(x) = 0$  má v intervalu jediný kořen  $\xi$ . Necht'  $f'$ ,  $f''$  nemění znaménka na intervalu  $[a, b]$ , přičemž  $f'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Necht' počáteční aproximace  $x_0$  je ten z krajních bodů  $a, b$ , v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko  $f''$  na intervalu  $[a, b]$ . Pak posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu  $\xi$ .

## Příklady – volba počáteční iterace

Výpočet převrácené hodnoty, funkce  $\arctan x$ .