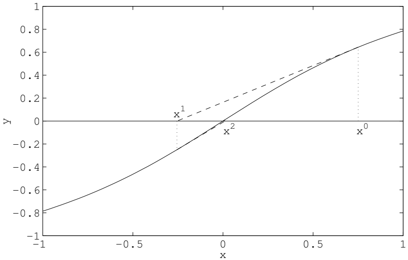
Numerické metody
4. přednáška, 17. března 2016

Jiří Zelinka

Opakování

Newtonova metoda, metoda tečen

Uvažujme opět rovnici $f(x) = 0$. Zvolme x_0 a řešení hledáme na tečně k f v bodě x_0 jako její průsečík s osou x.



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Podobně pokračujeme dál: x_{k+1} je průsečík tečny k funkci f v bodě x_k s osou x.

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ.

Věta

Nechť $f \in C^2[a, b]$ a nechť rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu jediný kořen ξ. Nechť f', f'' nemění znaménka na intervalu $[a, b]$, přičemž $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [a, b]$. Nechť počáteční aproximace x^0 je ten z krajních bodů a, b, v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko f'' na intervalu $[a, b]$. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu ξ.

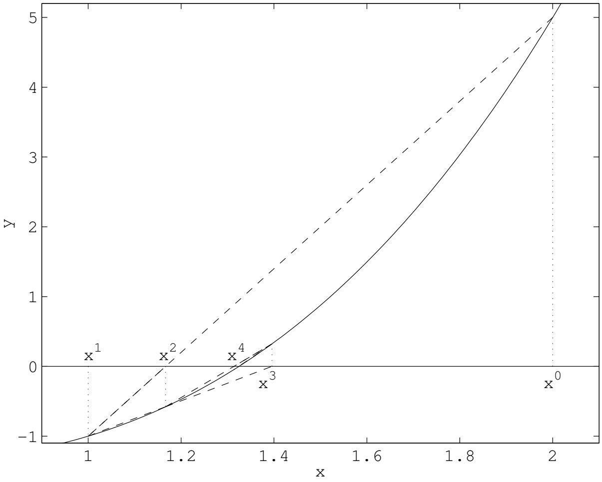
Metoda sečen

Derivaci v bodě x_k u Newtonovy metody nahradíme směrnicí sečny v bodech $[x_{k-1}, f(x_{k-1})$ a $[x_k, f(x_k)$.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Výsledná iterační metoda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad i = 1, 2, \dots$$


5
4
3
2
1
0
−1
y
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x
x^1
x^2
x^4
x^3
x^0

Pozor! Při pokusu o co nejpřesnější výpočet může dojít k nedefinovanému výrazu typu $0/0$.

Věta

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má kořen ξ a nechť derivace f', f'' jsou spojité v okolí bodu ξ, přičemž $f'(\xi) \neq 0$. Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu ξ, pokud zvolíme počáteční aproximace x_0, x_1 dostatečně blízko bodu ξ a metoda je řádu $(1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1{,}618$.

Řád metody pomocí symboliky o

$$\begin{aligned}(x_{k+1} - \xi) &= (x_k - \xi)(x_{k-1} - \xi)(L + o(1)), \text{ t.j.}\\ e_{k+1} &= e_k\, e_{k-1}(L + o(1)), \quad L > 0\end{aligned}$$

Metoda je řádu $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 1} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} &= C > 0\\ \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} &= (C + o(1))\\ |e_{k+1}| &= |e_k|^p (C + o(1))\\ |e_k| &= |e_{k-1}|^p (C + o(1))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|e_{k+1}| &= |e_k|\,|e_{k-1}||L+o(1)| \\
|e_k|^p(C+o(1)) &= |e_k|\,|e_{k-1}||L+o(1)| \\
|e_k|^{p-1}(C+o(1)) &= |e_{k-1}||L+o(1)| \\
(|e_{k-1}|^p)^{p-1}(C+o(1))^{p-1}(C+o(1)) &= |e_{k-1}||L+o(1)| \\
|e_{k-1}|^{p^2-p-1}(C+o(1))^p &= |L+o(1)|
\end{aligned}
$$

$$
p^2-p-1=0 \Rightarrow p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}
$$

Konec opakování

Metoda regula falsi

Předpokládejme $f(a)f(b) < 0$, $f \in C[a,b]$. Použijeme metodu sečen, přitom vybíráme iterace tak, aby ve dvou po sobě jdoucích měla f opačné znaménko:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

kde $s = s(k)$ je největší index takový, že $f(x_k)f(x_s) < 0$, přitom $f(x_0)f(x_1) < 0$ (tj. např. $x_0 = a$, $x_1 = b$).

Poznámka: pokud je funkce f konvexní nebo konkávní na $[a,b]$, je x_s jeden z krajní bodů intervalu.

Řád metody: 1

Kvazinewtonova metoda (plus/minus)

Tečnu u Newtonovy metody nahradíme sečnou procházející bodem $(x_k, f(x_k))$ a bodem $(x_k + f(x_k), f(x_k + f(x_k)))$, respektive bodem $(x_k - f(x_k), f(x_k - f(x_k)))$. Přitom pokud je bod x_k blízko hledaného kořene ξ, pak hodnota $f(x_k)$ je blízká nule a sečna procházející uvedenými body je blízká tečně vedené bodem x_k.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{x_k - (x_k \pm f(x_k))} = \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{\mp f(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{\mp f(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x \pm \frac{f^2(x)}{f(x) - f(x \pm f(x))}$$

Poznámka:

Kvazinewtonova metoda se také někdy nazývá Steffensenova - viz dále.

Věta

Nechť $f \in C^1[a,b]$, $\xi \in [a,b]$ nechť je řešením rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná kvazinewtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \cap [a,b]$. Pokud má funkce f v okolí bodu ξ spojitou druhou derivaci, je řád metody alespoň 2.

Důkaz: L'Hospitalovo pravidlo.

Iterační metody pro násobné kořeny

Kořen ξ násobnosti M

$$f(\xi) = 0, f'(\xi) = 0, \ldots, f^{(M-1)}(\xi) = 0,\ f^{(M)}(\xi) \neq 0$$

Věta

Nechť kořen ξ má násobnost $M > 1$. Pak modifikovaná Newtonova metoda

$$x_{k+1} = x_k - M\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

je metoda druhého řádu.

Násobnost kořene zpravidla neznáme $\Longrightarrow$ univerzální volba:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Funkce u má stejné kořeny jako funkce f, ale násobnosti 1, takže můžeme použít Newtonovu metodu pro funkci u.

Tento postup nefunguje pro funkci, která má všechny derivace nulové – např. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Pro tuto funkci selhávají i kriteria zastavení konvergence:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon, \quad \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon, \quad |f(x_k)| < \varepsilon$$

Urychlení konvergence – Aitkenova δ^2-metoda

Věta

Nechť je dána posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, $x_k \neq \xi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$, a nechť tato posloupnost splňuje podmínky

$$x_{k+1} - \xi = (C + o(1))(x_k - \xi),\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ |C| < 1,\ \lim_{k\to\infty} o(1) = 0$$

Pak posloupnost

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

je definována pro všechna dostatečně velká k a platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\hat{x}_k - \xi}{x_k - \xi} = 0,$$

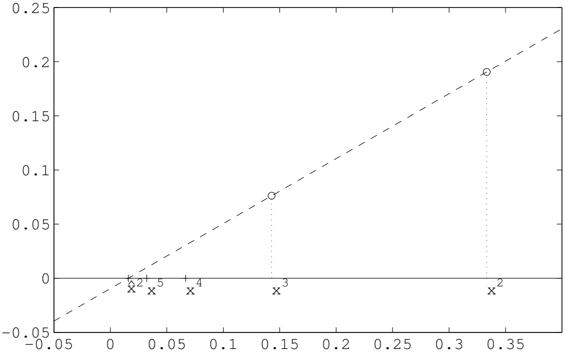
tj. posloupnost $\{\hat{x}_k\}$ konverguje k limitě ξ rychleji než posloupnost $\{x_k\}$.

Geometrická interpretace

Položme

$$\varepsilon(x_k) = x_k - x_{k+1} = x_k - \xi - (x_{k+1} - \xi) = (x_k - \xi)(1 + C + o(1))$$

$$\varepsilon(x_{k+1}) = x_{k+1} - x_{k+2} = (x_{k+1} - \xi)(1 + C + o(1)) =$$
$$= (x_k - \xi)(C + o(1))(1 + C + o(1)) = \varepsilon(x_k)(C + o(1))$$



Rovnice přímky:

$$y - \varepsilon(x_k) = \frac{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}(x - x_k)$$

Průsečík s osou x ($y = 0$) je bod $\hat{x}_k$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{\varepsilon(x_k)(x_k - x_{k+1})}{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$

Vyjádření pomocí diferencí:

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$

$\Delta^3 x_k = \Delta^2 x_{k+1} - \Delta^2 x_k$

$\vdots$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}$$