

# Numerické metody

## 7. přednáška, 6. dubna 2016

Jiří Zelinka

## Polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0.$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  kořeny (reálné i komplexní) polynomu  $P$ .

- dělení polynomů se zbytkem
- Hornerovo schema
- zobecněné Hornerovo schema
- hranice kořenů
- počet reálných kořenů polynomu na intervalu – Sturmova věta

Problém – volba počáteční aproximace

## Věta

Nechť  $P \in \Pi_n$  je polynom stupně  $n \geq 2$ . Nechť všechny kořeny  $\xi_i$ ,

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n,$$

jsou reálné. Pak posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  určená Newtonovou metodou je konvergentní klesající posloupnost pro každou počáteční aproximaci  $x_0 > \xi_1$  a platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi_1$ .

## Příklad

$$\begin{aligned}P(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) \\ &= x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720\end{aligned}$$

$$|\xi_i| < 1765$$

$$x_0 = 1765$$

$$x_1 \doteq 1\,226.8$$

$$x_2 \doteq 1\,022.9$$

$$x_3 \doteq 859.99$$

$$x_4 \doteq 711.41$$

⋮

$$x_{10} \doteq 287.99$$

⋮

$$x_{20} \doteq 49.48$$

# Zdvojená Newtonova metoda

Pro velké  $x_k$ :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{(x^k)^n + \dots}{n(x^k)^{n-1} + \dots} \approx x^k \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

## Věta

Nechť  $P \in \Pi_n$ ,  $n \geq 2$ , a necht' všechny kořeny  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  polynomu  $P$  jsou reálné a  $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n$ . Necht'  $\alpha_1$  je největší kořen  $P'$ :

$$\xi_1 \geq \alpha_1 \geq \xi_2.$$

Pro  $n = 2$  předpokládejme  $\xi_1 > \xi_2$ . Pak pro každé  $z > \xi_1$  jsou čísla

$$z' = z - \frac{P(z)}{P'(z)}, \quad y = z - 2\frac{P(z)}{P'(z)}, \quad y' = y - \frac{P(y)}{P'(y)}$$

definována a platí

$$\alpha_1 < y, \quad \xi_1 \leq y' \leq z'.$$

## Algoritmus

Začneme s počáteční aproximací  $x_0 > \xi_1$  a zdvojenou metodou:

$$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Mohou nastat dva případy:

- ①  $P(x_0)P(x_k) > 0$  pro všechna  $k$ . Pak

$$x_0 > x_1 > \dots > x_k > \dots \geq \xi_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi_1$$

- ② Existuje  $x_k$  tak, že  $P(x_k)P(x_0) < 0$ ,  $P(x_{k-1})P(x_0) > 0$ .  
V tomto případě tedy došlo k „přestřelení“ bodu  $\xi_1$  a platí

$$x_0 > x_1 > \dots > x_{k-1} > \xi_1 > x_k > \alpha_1 > \xi_2.$$

Položme  $y_0 = x_k$  a pokračujme dále klasickou Newtonovou metodou s touto počáteční aproximací:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{P(y_k)}{P'(y_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

# Snižování stupně

$P_1(x) = \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_1}$  – numerické nepřesnosti v koeficientech.

## Příklad

$P$  – polynom s kořeny  $\xi_1 = 10, \dots, \xi_{10} = 1$

Aproximace kořenů:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_1 &\doteq 10.000000040624446 \\ \tilde{\xi}_2 &\doteq 8.999999654991576 \\ \tilde{\xi}_3 &\doteq 8.000001300611824 \\ &\vdots \\ \tilde{\xi}_7 &\doteq 4.000018865503898 \\ &\vdots \\ \tilde{\xi}_{10} &\doteq 0.99999962963847448\end{aligned}$$

## Maehlyova metoda

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_1}, \quad P_1'(x) = \frac{P'(x)}{x - \tilde{\xi}_1} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1)^2},$$

Dosazením tohoto vyjádření do vzorce pro Newtonovu metodu pro polynom  $P_1$  dostaneme:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{P_1(x^k)}{P_1'(x^k)} = x^k - \frac{P(x^k)}{P'(x^k) - \frac{P(x^k)}{x^k - \tilde{\xi}_1}}$$



Obecně, jestliže jsme již našli aproximace kořenů  $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_j$ , postupujeme obdobně a sestrojíme polynom

$$P_j(x) = \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)},$$

$$P'_j(x) = \frac{P'(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)} \sum_{i=1}^j \frac{1}{x - \tilde{\xi}_i}$$

Newtonova metoda pro nalezení kořene  $\xi_{j+1}$  je tvaru

$$x^{k+1} = \Phi_j(x^k), \quad \Phi_j(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x) - \sum_{i=1}^j \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_i}}.$$

Vektory – prvky  $\mathbb{R}^n$  nebo  $\mathbb{C}^n$ , sloupcové.

## Normy vektorů

Vektorová norma na  $\mathbb{C}^n$  je funkce  $\| \cdot \|$  (z  $\mathbb{C}^n$  do  $\mathbb{R}$ ) s následujícími vlastnostmi:

- 1  $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
- 2  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{o}, \quad \mathbf{o} = (0, \dots, 0)^T$
- 3  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
- 4  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$

## Příklady vektorových norem:

1  $\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  (eukleidovská norma)

2  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  (oktaedrická norma)

3  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  (krychlová norma)

4  $\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  ( $p$  norma)

Každá vektorová norma indukuje metriku danou vztahem  
 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ .

Konvergence v normě:  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ .

## Matice

Nechť  $A$  je čtvercová matice řádu  $n$  s reálnými resp. komplexními prvky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{M}_n$ : třída všech matic tohoto typu.

Matici  $A$  lze považovat za vektor dimenze  $n^2$ . Mohli bychom tedy definovat normu matice jako normu vektoru. Ale potřebujeme i další vlastnosti:

## Vlastní čísla a vlastní vektory

$$A \cdot x = \lambda x$$

$x$  – vlastní vektor matice  $A$ ,  $\lambda$  – příslušné vlastní číslo

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu

$\psi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A)$ ,  $E$  – jednotková matice

Spektrální poloměr matice:  $\rho(A) = \max\{|\lambda_k|; \lambda_k \text{ je vlastní číslo matice } A\}$

Stopa matice:  $tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$

## Normy matic

Maticová norma na množině  $\mathcal{M}_n$  je reálná funkce  $\| \cdot \|$  s těmito vlastnostmi:

- 1  $\|A\| \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$
- 2  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A$  je nulová matice
- 3  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$
- 4  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n$
- 5  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n$

Vlastnost 5) se nazývá **multiplikativnost**.

## Souhlasnost maticové a vektorové normy

Řekneme, že maticová norma  $\| \cdot \|$  je *souhlasná* s danou vektorovou normou  $\| \cdot \|_\varphi$ , jestliže

$$\|Ax\|_\varphi \leq \|A\| \|x\|_\varphi, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

### Přidružená norma

Nechť  $\| \cdot \|_\varphi$  je vektorová norma na  $\mathbb{C}^n$ . Pak číslo

$$\|A\|_\varphi = \max_{\|x\|_\varphi=1} \|Ax\|_\varphi$$

je maticová norma souhlasná s danou vektorovou normou  $\| \cdot \|_\varphi$ .

Pro jednotkovou matici  $E$  platí

$$\|E\|_\varphi = \max_{\|x\|_\varphi=1} \|Ex\|_\varphi = 1$$

a pro souhlasnou maticovou normu platí  $\|E\| \geq 1$ .

## Věta

Přidružená maticová norma je nejvýše rovna libovolné maticové normě souhlasné s danou vektorovou normou.

## Věta

Nechť maticová norma  $\| \cdot \|$  je souhlasná s danou vektorovou normou  $\| \cdot \|_{\varphi}$ . Pak pro všechna vlastní čísla  $\lambda$  matice  $A$  platí:

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$



## Přidružené maticové normy

Nechť  $A \in \mathcal{M}_n$ . Přidružené maticové normy k vektorovým normám  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_\infty$ ,  $\| \cdot \|_2$  jsou dány vztahy

$$\textcircled{1} \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\textcircled{2} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\textcircled{3} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}, \quad \rho(A^*A) \text{ je spektrální poloměr } A^*A, \\ \text{kde } A^* = \overline{A}^T, \text{ pro reálné matice je } A^* = A^T.$$

$\|A\|_2$  – spektrální norma matice

## Frobeniova norma

$$\|A\|_F = \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^*A)$
- $\|E\|_F = \sqrt{n}$ .
- $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$
- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$
- $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$ .

## Věta

Nechť  $\|B\| < 1$ ,  $\|\cdot\|$  je souhlasná s danou vektorovou normou. Pak matice  $E - B$  je regulární a platí

$$\|(E - B)^{-1}\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|B\|}.$$