

Numerické metody

9. přednáška, 21. dubna 2016

Jiří Zelinka

Iterační metody řešení systémů lineárních rovnic

System

$$Ax = b$$

převodeme na

$$x = Tx + g$$

$$x^{k+1} = Tx^k + g, \quad k = 0, 1, \dots$$

Hlavní věta o konvergenci iteračního procesu

Posloupnost $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ určená iteračním procesem $x = Tx + g$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\rho(T) < 1$, přičemž

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*, \quad x^* = Tx^* + g$$

Jacobiova iterační metoda

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matici A zapišme ve tvaru

$$A = D - L - U,$$

kde

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

D je diagonální matice, L je dolní trojúhelníková matice s nulami na diagonále a U je horní trojúhelníková matice s nulami na diagonále.

$$Ax = (D - L - U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b.$$

Pokud $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, je matice D regulární a z předchozí rovnice lze vypočítat

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b.$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix},$$

Maticový tvar Jacobiovy iterační metody

Jacobiova iterační matice: $T_J = D^{-1}(L + U)$

$$\mathbf{x}^{k+1} = T_J \mathbf{x}^k + D^{-1} \mathbf{b},$$

$T_J = (t_{ij})$, $t_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ pro $i \neq j$, $t_{ii} = 0$ pro $i = 1, \dots, n$.

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Realizace výpočtu:

Z první rovnice vypočteme x_1 :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - \dots - a_{1n}x_n^k),$$

z druhé rovnice vypočteme x_2 :

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k),$$

obecně z i -té rovnice vypočteme x_i :

$$x_i^{k+1} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}},$$

až z n -té rovnice vypočteme x_n , a na pravé straně takto získaného systému jsou prvky matice T_J .

Věta o konvergenci Jacobiovy iterační metody:

Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná metodou $\mathbf{x}^{k+1} = T_J \mathbf{x}^k + D^{-1} \mathbf{b}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\rho(T_J) < 1$.

Odhad chyby:

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\|_{\infty} \leq \frac{\|T_J\|_{\infty}^k}{1 - \|T_J\|_{\infty}} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_{\infty}.$$

Silné řádkové sumační kritérium:

Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Silné sloupcové sumační kritérium:

Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ik}|, \quad k = 1, \dots, n.$$

Pak Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Gaussova-Seidelova iterační metoda

Z první rovnice vypočteme x_1 :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - \dots - a_{1n}x_n^k),$$

z druhé rovnice vypočteme x_2 , pro x_1 použijme novou iteraci:

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k),$$

ze třetí rovnice vypočteme x_3 , pro x_1 a x_2 použijme novou iteraci:

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - a_{34}x_4^k \dots - a_{3n}x_n^k),$$

Obecně

$$x_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Maticový zápis:

$$\begin{aligned} Ax = \mathbf{b} &\Rightarrow (D - L - U)x = \mathbf{b} \\ &(D - L)x = Ux + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

$a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n,$ \Rightarrow matice $D - L$ je regulární a

$$\mathbf{x} = (D - L)^{-1} U\mathbf{x} + (D - L)^{-1} \mathbf{b}.$$

Položme $T_G = (D - L)^{-1} U$, Gaussova-Seidelova iterační metoda je tvaru

$$\mathbf{x}^{k+1} = T_G \mathbf{x}^k + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = (D - L)^{-1} \mathbf{b}.$$

Věta

Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Gaussovou-Seidelovou iterační metodou $\mathbf{x}^{k+1} = (D - L)^{-1}U\mathbf{x}^k + (D - L)^{-1}\mathbf{b}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\rho(T_G) < 1$.

Silné řádkové sumační kritérium:

Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Silné sloupcové sumační kritérium:

Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ik}|, \quad k = 1, \dots, n.$$

Pak Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Příklad

Geometrický význam

Věta (Stein-Rosenberg)

Nechť pro prvky matice A platí $a_{ij} \leq 0$ pro všechna $i \neq j$ a $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$. Pak platí právě jedno z následujících tvrzení:

- $0 < \rho(T_G) < \rho(T_J) < 1$
- $1 < \rho(T_J) < \rho(T_G)$
- $\rho(T_J) = \rho(T_G) = 0$
- $\rho(T_J) = \rho(T_G) = 1$.

To znamená, že konvergují-li obě metody, Gaussova-Seidelova metoda konverguje rychleji.

Věta

Nechť A je pozitivně definitní matice. Pak Gaussova-Seidelova metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci.

Modifikace Gaussovy–Seidelovy metody, ω – relaxační parametr

$$x_i^{k+1} = (1 - \omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right].$$

Relaxační metodu lze maticově zapsat takto

$$\mathbf{x}^{k+1} = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]\mathbf{x}^k + \omega(D - \omega L)^{-1}\mathbf{b}$$

$$T_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$$

Hodnoty parametru ω :

- Pro $0 < \omega < 1$ se iterační metody nazývají **metodami dolní relaxace**. Tyto metody jsou vhodné v případě, že Gaussova-Seidelova metoda nekonverguje.
- Pro $\omega = 1$ je relaxační metoda totožná s Gaussovou-Seidelovou metodou.
- Pro $1 < \omega$ se metody nazývají **metodami horní relaxace**, nebo častěji **SOR metodami** (SOR = Successive Over-Relaxation). Tyto metody lze užít ke zrychlení konvergence Gaussovy-Seidelovy metody.

Věta (Kahan).

Nechť $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Pak

$$\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|.$$

Důsledek: Má smysl uvažovat jen $\omega \in (0, 2)$.

Věta (Ostrowski-Reich).

Pro pozitivně definitní matici A platí $\rho(T_\omega) < 1$ pro všechna $\omega \in (0, 2)$.

Třídiagonální matice:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = 0, \text{ pro } |i - j| > 1$$

Věta.

Nechť A je třídiagonální pozitivně definitní matice. Pak $\rho(T_G) = \rho^2(T_J) < 1$ a optimální hodnota relaxačního parametru je dána vztahem

$$\omega = \omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(T_J)}}.$$

Při této volbě je $\rho(T_\omega) = |1 - \omega|$.

Cykly v iteračních metodách

Například pro systémy

$$x_1 + kx_2 = b_1$$

$$x_1 - kx_2 = b_2$$

Jacobiova metoda: cyklus délky 4

Gaussova–Seidelova metoda: cyklus délky 2

Relaxační metody: cykly různých délek

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$qx_1 + x_2 = 1.$$

Pro $\omega = 2$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2q & 4q - 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi, \quad q = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$$

$\varphi = 2\pi l/p$, $0 < l < p/2 \Rightarrow$ existuje cyklus délky p .

Body cyklu leží na elipse se středem v hledaném řešení.

$$\begin{aligned}f_1(x_1, \dots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) &= 0\end{aligned}$$

Kořen systému: uspořádaná m -tice reálných čísel

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m),$$

která tomuto systému vyhovuje.

Vektorový tvar:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{o} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m.$$

System převedeme na ekvivalentní rovnici

$$\mathbf{x} = G(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$$

neboli

$$\begin{aligned}x_1 &= g_1(x_1, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ x_m &= g_m(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

a budeme hledat pevný bod zobrazení $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definujme nyní v prostoru \mathbb{R}^m metriku:

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i|.$$

Prostor \mathbb{R}^m s takto definovanou metrikou je úplným metrickým prostorem. Nyní lze pro vyšetřování konvergence iteračního procesu $\mathbf{x}^{k+1} = G(\mathbf{x}^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ užít Banachovy věty o pevném bodě.

Věta

Nechť zobrazení $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je kontrakce na \mathbb{R}^m ,

$$\varrho(G(x), G(y)) \leq q\varrho(x, y), \quad 0 \leq q < 1.$$

Pak pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in \mathbb{R}^m$ je posloupnost $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $x^k = G(x^{k-1})$, konvergentní v \mathbb{R}^m a $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \xi$, kde ξ je jediný pevný bod zobrazení G .

Věta

Nechť $\xi \in \mathbb{R}^m$ je pevný bod rovnice $x = G(x)$. Nechť funkce $g_i, i = 1, \dots, m$, mají spojité parciální derivace pro všechna $x \in \Omega(\xi, r)$, $\Omega(\xi, r) = \{x | \varrho(x, \xi) \leq r\}$. Nechť dále platí

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{q}{m}, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

$0 \leq q < 1$ a necht' $x^0 \in \Omega(\xi, r)$. Pak všechny iterace $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ určené vztahem $x^{k+1} = G(x^k)$ leží v množině $\Omega(\xi, r)$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \xi$.

Jednodušší předpoklad:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq q < 1.$$

Seidelova metoda

Pro výpočet x_i^{k+1} použijeme již vypočtených hodnot $x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$, tj.

$$\begin{aligned}x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k) \\x_2^{k+1} &= g_2(x_1^{k+1}, x_2^k, \dots, x_m^k) \\x_3^{k+1} &= g_3(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_m^k) \\&\vdots \\x_m^{k+1} &= g_m(x_1^{k+1}, \dots, x_{m-1}^{k+1}, x_m^k).\end{aligned}$$

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \quad F \in C^2(O(\xi))$$

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Taylorův rozvoj:

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{x}) + J_F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^2) \cdot (1, \dots, 1)^T$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^k, \quad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$$

Zanedbáme chybový člen,

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{o} \Rightarrow J_F(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = -F(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - J_F^{-1}(\mathbf{x}^k)F(\mathbf{x}^k)$$

Iterační funkce

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J_F^{-1}(\mathbf{x})F(\mathbf{x})$$

Věta

Nechť ξ je kořenem rovnice $F(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$. Necht' $J_F(\mathbf{x})$ je regulární matice se spojitými prvky v okolí $O(\xi)$ bodu ξ , přičemž

$$\|J_F^{-1}(\mathbf{x})\|_{\infty} \leq K, \quad K = \text{konst.},$$

pro všechna \mathbf{x} z tohoto okolí. Necht' funkce $f_i, i = 1, \dots, m$, mají spojitě druhé parciální derivace v $O(\xi)$.

Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje ke kořenu ξ za předpokladu, že počáteční aproximace \mathbf{x}^0 leží dostatečně blízko ξ . Řád metody je roven dvěma.