Domácí úkol z 15. 3. 2016

Příklad 3. *Afinita f prostoru $\mathcal{A}_3$ je zadána obrazem čtveřice bodů $A[1,0,0]$, $B[0,1,1]$, $C[1,1,0]$, $D[0,2,0]$ v obecné poloze: $A' = [5,2,-5]$, $B' = [3,6,4]$, $C' = [0,-2,-5]$, $D' = [-9,-7,-1]$. Určete rovnice afinity f a obraz roviny $\alpha : x + 3z = 0$ v afinitě f.*

Řešení. Najít rovnice afinity f znamená najít matice A (typu 3x3) a B (typu 3x1) takové, že vyhovují rovnici $(X') = A(X) + B$. Nejprve nalezneme matici A a to přechodem k asociované lineární transformaci $\varphi : V_3 \to V_3$ charakterizované rovnicí $(\mathbf{x}') = A(\mathbf{x})$. Protože se jedná o zobrazení vektorových prostorů, je třeba ze zadání „vyrobit“ tři nezávislé vektory a jejich obrazy:

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \varphi(B - A) = \varphi((-1,1,1)) = \varphi(\overrightarrow{A'B'}) = B' - A' = (-2,4,9)$$

$$\varphi(\overrightarrow{AC}) = \varphi(C - A) = \varphi((0,1,0)) = \varphi(\overrightarrow{A'C'}) = C' - A' = (-5,-4,0)$$

$$\varphi(\overrightarrow{AD}) = \varphi(D - A) = \varphi((-1,2,0)) = \varphi(\overrightarrow{A'D'}) = D' - A' = (-14,-9,4)$$

Pokud označíme jednotlivé koeficienty matice A jako $a, \ldots, i$ a postupně dosadíme do rovnice $(\mathbf{x}') = A(\mathbf{x})$ vypočítané vektory a jejich obrazy, dostáváme soustavu 9 rovnic o devíti neznámých, z nichž každé tři mají stejné koeficienty.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} -2 = -a + b + c & 4 = -d + e + f & 9 = -g + h + i \\ -5 = +b & -4 = +e & 0 = +h \\ -14 = -a + 2b & -9 = -d + 2e & 4 = -g + 2h \end{array}$$

Můžeme vyřešit všechny tři soustavy najednou úpravou levého bloku následující matice na jednotkovou matici (za svislými čarami pak vystupují postupně koeficienty a, b, c v prvním sloupci, d, e, f v druhém a g, h, i ve třetím – tedy v celém pravém bloku za první svislou čarou vidíme matici A transponovanou).

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 1 & 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -14 & -9 & 4 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

Nyní přejdeme zpátky k rovnici $(X') = A(X) + B$ a určíme matici B (jejíž koeficienty označíme j, k, l) dosazením libovolného z bodů A, B, C, D a jeho odpovídajícího obrazu. Ukážeme např. dosazením bodů A a A':

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5 &= 4 \quad + j & \qquad j &= 1 \\ 2 &= 1 \quad + k & k &= 1 \\ -5 &= -4 + l & l &= -1 \end{aligned}$$

Tedy hledané rovnice afinity f jsou tvaru:

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ve druhém úkolu máme v afinitě f zobrazit rovinu $\alpha : x + 3z = 0$, což uděláme tak, že zobrazíme její tři libovolné nekolineární body K, L, M. Volíme $K[3, 0, -1]$, $L[0, 1, 0]$ a $M[0, 2, 0]$ (tak, aby jejich souřadnice splňovaly rovnici roviny α) – dosazením do vypočítaných rovnic afinity f zjistíme, že $K'[6, -5, -18]$, $L'[-4, -3, -1]$ a $M'[-9, -7, -1]$.

Nyní už jen stačí zjistit obecnou rovnici roviny α' procházející body K', L' a M' – středoškolským výpočtem zjistíme, že $\alpha' : 68x - 85y + 50z + 67 = 0$.