Pojistná matematika

Brutto pojistné a rezervy v neživotním pojištění

Silvie Kafková

2015

Obsah

Obsah

Brutto pojistné

- Konstruuje se z příslušného netto pojistného podobným způsobem jako v životním pojištění:

$$\text{brutto pojistné} = \text{netto pojistné} + \text{bezpečnostní přirážka} + \text{správní náklady} + \text{kalkulovaný zisk.}$$

- Po přidání bezpečnostní přirážky často mluvíme o **rizikovém pojistném.**

Bezpečnostní přirážka (výkyvová přirážka)

- Měla by krýt výkyvy škodního průběhu, které jsou z hlediska pojistitele nepříznivé.
- Tyto škody jsou způsobeny především
  - aplikací pravděpodobnostního počtu a expertních odhadů na reálná data;
  - ekonomickými a jinými změnami relevantními pro daný pojistný produkt.
- Bývá jedním ze zdrojů při vytváření rezervy na vyrovnávání mimořádných rizik.

Bezpečnostní přirážka statistické povahy

- Nejčastější konstrukce rizikového pojistného RP (tj. netto pojistné P s bezpečnostní přirážkou) je

$$RP = (1 + \lambda_1) \cdot P + \lambda_2 \cdot s + \lambda_3 \cdot s^2,$$

  kde

  - s (resp. s^2) je odhadnutá směrodatná odchylka (resp. odhadnutý rozptyl) související se statistickým odhadem netto pojistného P;
  - λ_i jsou nezáporné koeficienty.

- Problém rizikového pojistného se pak redukuje na výpočet odhadu s (resp. s^2) a na numerické nastavení hodnot λ_i.

- Nejčastější v praxi bývá **princip směrodatné odchylky**:

$$RP = P + \lambda \cdot s.$$

- Uvažujme případ, kdy máme údaje za jeden rok pro tarifní skupinu s N pojistkami, pojistnoju částkou S a s ročním netto pojistným p kalkulovaným na jednotkovou pojistnou částku.
- Pro každou pojistku máme údaje o výši škody v daném roce vyjádřené jako $z_i \cdot S$, kde z_i má význam škodního stupně i-té pojistky.

- Platí

$$N \cdot p \cdot S = \sum_{i=1}^{N} z_i \cdot S,$$

kde
  - na levé straně je celkové netto pojistné v dané tarifní skupině za daný rok
  - na pravé staně je celková škoda.
- Odtud

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i.$$

- Odhadnutá směrodatná odchylka výše škody na jednu pojistku je

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i \cdot S - p \cdot S)^2},$$

kde při větších hodnotách N nevadí, že ve jmenovateli není $N - 1$.

- Využijeme vzorec pro p a aproximaci $p^2 \approx 0$, která je přípustná vzhledem k malým hodnotám pojistné sazby p.

- Pak dostaneme

$$\begin{aligned} s &= S \cdot \sqrt{\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^2 - 2 \cdot p \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i + N \cdot p^2\right)} \\ &= S \cdot \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i^2 - p^2} \approx S \cdot \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i^2}. \end{aligned}$$

- Odhadnutá směrodatná odchylka celkové škody pro všechny pojistky v uvažované tarifní skupině je proto

$$R = \sqrt{N} \cdot s \approx S \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} z_i^2}$$

.

- Za předpokladu normálního rozdělení celkové škody a s využitím distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$ pak platí

$$P\left(\frac{\text{celková škoda} - \text{celkové netto pojistné}}{R} < k\right) \approx \Phi(k).$$

- Snažíme se určit bezpečnostní přirážku tak, aby byla téměř stoprocentně bezpečná. Platí $\Phi(4) = 0,9997$ a odtud podle předchozího vzorce dostáváme

$$\Phi(4) \approx P(\text{celkové netto pojistné} + 4R > \text{celková škoda}).$$

- Tedy volíme-li bezpečnostní přirážku ve výši čtyřnásobku R, pak po rozpočtení na jednotlivé pojistky z uvažované tarifní skupiny dostáváme rizikové pojistné ve tvaru

$$RP = P + \frac{4R}{N} = P + \frac{4}{N} \cdot S \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} z_i^2} = P + \frac{4}{\sqrt{N}} \cdot s.$$

Příklad

Stanovte roční rizikové pojistné v tarifní skupině kde máme uzavřených 44 500 pojistek, pojistná hodnota je 300 000 Kč, součet čtverců šodních stupňů z_i je 179,64, škodní frekvence je 2%, škodní stupeň je 0,3082 a pojistně technická úroková míra činí 4%, víte-li, že se jedná o ryzí zájmové pojištění.

Obsah

Pojistné rezervy

- Hrají významnou roli v pojištění.
- V ČR vymezujeme pro oblast neživotního pojištění tvorbu následujících rezerv:
- **Rezerva na nezasloužené pojistné:**
  - Tvoří se z části pojistného, které se vztahuje k budoucímu účetnímu období.
  - Přijaté pojistné je nutno rozdělit na pojistné odpovídající sledovanému období a na pojistné, které patří do následujícího období.
  - Výše je zcela jednoznačně dána výší předepsaného pojistného a obdobím, na které je toto pojistné určeno

$$\text{výše rezervy} = \frac{\text{délka období po 31.12.}}{\text{délka pojistného období}} \cdot \text{pojistné}$$

Rezerva na pojistná plnění

- Je určena na pojistná plnění z pojistných událostí:
  - hlášených do konce běžného účetního období, ale v běžném účetním období dosud nezlikvidovaných. Značíme **RBSN rezerva** (Reported But Not Settled). Mluvíme o otevřených pojistných nárocích.
  - vzniklých do konce běžného účetního období, ale v běžném účetním období dosud nehlášených. Značíme **IBNR rezerva** (Incurred But Not Reported).
- Pro odhad výše této rezervy se využívají matematicko-statistické metody.
- Zahrnuje také předpokládané výdaje spojené s likvidací pojistných událostí a snižuje se o předpokládanou výši vymahatelných pohledávek za pojistné plnění.

Rezerva na prémie a slevy

- Je určena na poskytování prémií a slev na pojistném v souladu se všeobecnými pojistnými podmínkami dané pojišťovny.
- Při tvorbě se vychází z principu, že prémie a slevy představují určitý druh pojistného plnění.

Rezerva na vyrovnávání mimořádných rizik (výkyvová rezerva):

- Je určena na vyrovnání meziročních výkyvů ve výplatách pojistných plnění.
- Stanovuje se metodou kvalifikovaného odhadu podle objemu a rizikovosti provozovaných pojištění a způsobu jejich zajištění.

Trojúhelníková schémata

- Využívají se pro výpočet rezerv typu RBNS a IBNR.
- Vycházejí z uspořádání podkladových údajů za minulé roky podle roku vzniku pojistné události do trojúhelníkových schémat.
- V trojúhelníkovém schématu jsou celková dosud vyplacená pojistná plnění uspořádaná v řádcích podle roku vzniku pojistné události a ve sloupcích podle počtu let, které od vzniku pojistné události uplynuly.
- Obvykle se zde zohledňuje inflace.

Obsah

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

- Trojúhelníkové schéma se doplňuje na obdélík následujícím způsobem:
  1) K dispozici máme údaje o inflaci v jednotlivých letech a údaje o pojistných plněních $P_{i,j}$, které byly vyplaceny v jednotlivých letech $j = 0, 1, ..., n$ uplynulých od roku vzniku $i = 1, 2, ..., n$ pojistné události.
  2) Vyplacené pojistné plnění $P_{i,j}$ přepočítáme podle měr inflace za jednotlivé roky na úroveň cen ke konci vývojového roku n.
  3) Takto upravené trojúhelníkové schéma přepočítáme na kumulativní trojúhelnkové schéma podle vztahů

$$C_{i,0} = P_{i,0}$$

$$C_{i,j+1} = P_{i,j+1} + C_{i,j} \quad \text{pro } j \geq i.$$

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

4) Určíme **koeficienty vývoje pojistného plnění** λ_j podle vztahů

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{C_{0,1} + C_{1,1} + \dots + C_{n-1,1}}{C_{0,0} + C_{1,0} + \dots + C_{n-1,0}};$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{C_{0,2} + C_{1,2} + \dots + C_{n-2,2}}{C_{0,1} + C_{1,1} + \dots + C_{n-2,1}};$$

$$\vdots$$

$$\hat{\lambda}_n = \frac{C_{0,n}}{C_{0,n-1}};$$

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

5) Doplníme trojúhelník **odhady plnění** $\hat{C}_{i,j}$ podle vztahů

$$\hat{C}_{n,1} = \hat{\lambda}_1 \cdot C_{n,0};$$

$$\hat{C}_{n,2} = \hat{\lambda}_2 \cdot \hat{C}_{n,1} = \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_1 \cdot C_{n,0};$$

$$\hat{C}_{n-1,2} = \hat{\lambda}_2 \cdot C_{n-1,1};$$

$$\vdots$$

$$\hat{C}_{n,n} = \hat{\lambda}_n \cdot \hat{\lambda}_{n-1} \cdot \dots \cdot \hat{\lambda}_1 \hat{C}_{n,0}.$$

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

6) Odhadneme **celkové rezervy na pojistné plnění** na konci n-tého roku. V posledním sloupci tabulky totiž dostaneme odhadnuté kumulativní rezervy v posledním vývojovém roce $\hat{C}_{i,n}$. Odhad celkovývh rezerv na konci n-tého roku na pojistné události vzniklé ve sledovaných letech dostaneme, když od hodnot v posledním sloupci tabulky odečteme hodnoty, které jsou na diagonále a tyto výsledky sečteme. Tedy platí

$$\text{celkové rezervy} = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \right).$$

Doplněný kumulativní vývojový trojúhelník

Rok vzniku i	Vývojový rok					
	0	**1**	**2**	$\cdots$	**n-1**	**n**
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	$\cdots$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$\cdots$	$C_{1,n-1}$	$\hat{C}_{1,n}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$\cdots$	$\hat{C}_{2,n-1}$	$\hat{C}_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	$\hat{C}_{n-1,2}$	$\cdots$	$\hat{C}_{n-1,n-1}$	$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$C_{n,0}$	$\hat{C}_{n,1}$	$\hat{C}_{n,2}$	$\cdots$	$\hat{C}_{n,n-1}$	$\hat{C}_{n,n}$

Příklad

Rok vzniku	Vývojový rok			
	0	1	2	3 a více
2011	5802220	4996790	2400010	3336010
2012	4945340	4992930	2922270	
2013	5511360	6090750		
2014	7460030			

Období	2011	2012	2013	2014
Inflace	3%	4%	2%	2%

Chyba odhadu

- To do jaké míry odpovídají naše odhady skutečnosti si můžeme zpětně ověřit výpočtem **relativní chyby odhadu.**
- Tabulky s údaji o vývoji nekumulativních a kumulativních pojistných plnění doplníme zpětně o jejich odhady podle vztahu

$$C_{i,j} = \lambda_j \cdot C_{i,j-1} \quad \text{pro } i = 0, 1, ..., n,\ j = 1, 2, ..., n.$$

- Potom platí

$$\text{relativní chyba odhadu} = \left| \frac{S - O}{S} \right| \cdot 100\%,$$

kde

  - S je skutečná výška kumulativního nebo nekumulativního vyplaceného pojistného,
  - O je odhad pojistného.

Obsah

Separační metoda

- Tuto metodu **navrhl** v roce 1972 **Verbeek**, který ji aplikoval v zajištění na projekci počtu ohlášených škod.
- Výhodou je, že **součástí této metody je odhad míry inflace.**
- Existuje několik postupů této metody.
- **Východiskem je vývojový trojúhelník** s nekumulativním pojistným plněním $P_{i,j}$, které je rozdělené podle roku vzniku pojistné události i a podle vývojového roku j.
- Známe také počet škod n_i, které byly zaznamenány v roce vzniku i.

Separační metoda

- Předpokládá se, že kdyby neexisstovala inflace, pak **v každém vývojovém roce** j by byl z celkové škody, bez ohledu na rok vzniku plnění i, vyplacen **konstantní podíl** r_j a v celém sledovaném období by se neměnila průměrná **výška individuální škody** c.
- Symbolem λ_{i+j} označíme **výšku skutečné průměrné individuální škody** v roce $i + j$, kde i je rok vzniku škody a j je vývojový rok pojistných plnění.
- Hodnoty λ_{i+j} jsou konstantní pro všechny kombinace i, j pro které je součet $i + j$ konstantní.
- Za těchto předpokladů platí

$$P_{i,j} = n_i \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j}$$

- Rozdíl v λ_{i+j} je způsoben změnou míry inflace.

Doplněný kumulativní vývojový trojúhelník

Rok vzniku i	n_i	**Vývojový rok** j				
		0	**1**	…	**n-1**	**n**
0	n_0	$n_0 r_0 \lambda_0$	$n_0 r_1 \lambda_1$		$n_0 r_{n-1} \lambda_{n-1}$	$n_0 r_n \lambda_n$
1	n_1	$n_1 r_0 \lambda_1$	$n_1 r_1 \lambda_2$		$n_1 r_{n-1} \lambda_n$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n_n	$n_n r_0 \lambda_n$				

Separační metoda

- Z hodnot $P_{i,j}$ budeme odhadovat hodnoty $r_0,\ r_1,\ ..., r_n$ a pomocí nich hodnoty $\lambda_0,\ \lambda_1,\ ..., \lambda_n$.
- Pomocí těchto hodnot doplníme předchozí tabulku.
- Zřejmě platí že

$$r_0 + r_1 + ... + r_n = 1,$$

  kde n je mximální počet let potřebných na zlikvidování škody.
- Plnění na každé diagonále předcházející tabulky jsou vykonané ve stejném kalendářním roce. Proto z vývoje hodnot $\lambda_0,\ \lambda_1,\ ..., \lambda_n$ můžeme posoudit vývoj míry inflace.

Separační metoda

- Abychom odstranili vliv hodnot n_i na výšku plateb, budeme dále analyzovat matici standardních hodnot

$$S_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{n_i} = r_j \lambda_{i+j}, \quad \text{pro } 0 \leq i, j \leq n.$$

- **Odhad hodnot r_j a λ_{i+j}** pro $j = 0, 1, ..., n$ a $0 \leq i + j \leq n$:
  - Označme d_i vstupy na i-té diagonále tabulky pro $i = 1, 2, ..., n$. Pak platí

$$\begin{aligned} d_n &= S_{n,0} + S_{n-1,1} + ... + S_{1,n-1} + S_{0,n} \\ &= r_0 \lambda_n + r_1 \lambda_n + ... + r_{n-1} \lambda_n + r_n \lambda_n \\ &= \lambda_n (r_0 + r_1 + ... + r_n) = \lambda_n. \end{aligned}$$

  - A tedy platí

$$\hat{\lambda}_n = d_n.$$

Separační metoda

- Jediný vstup v trojúhelníku v tabulce, který obsahuje r_n je $S_{0,n} = r_n\lambda_n$, ze kterého dostaneme odhad

$$\hat{r}_n = \frac{S_{0,n}}{\hat{\lambda}_n}$$

- Podobně

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= S_{n-1,0} + S_{n-2,1} + ... + S_{0,n-1} \\ &= r_0\lambda_{n-1} + r_1\lambda_{n-1} + ... + r_{n-1}\lambda_{n-1} \\ &= \lambda_{n-1}(r_0 + r_1 + ... + r_{n-1}) = \lambda_{n-1}(1 - r_n). \end{aligned}$$

- A tedy platí

$$\hat{\lambda}_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{1 - \hat{r}_n}.$$

Separační metoda

- Z údajů ve vývojovém roce $(n-1)$ dostáváme odhad $\hat{r}_{n-1}$, platí
$$S_{0,n-1} + S_{1,n-1} = r_{n-1}\left(\lambda_{n-1} + \lambda_n\right)$$
$$\hat{r}_{n-1} = \frac{S_{0,n-1} + S_{1,n-1}}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}.$$
- Takto pokračujeme, dokud nezískáme všechny odhady.

- Pro $t > n$ odhadneme λ_t použitím předpokladů o vývoji inflace v dalších letech.
- Když ve sledovaném období předpokládáme konstantní průměrnou výšku individuální škody ve stabilní měně, pak $\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} - 1$ vyjadřuje **míru inflace** plnění v roce t.
- Odhad rezervy na nevyplacené plnění, které bude vylacené ve vývojovém roce k za škody vzniklé v roce i, kde $i = 0, 1, ..., n$ a $n < i + k \leq 2n$ je daný vztahem

$$\hat{P}_{i,k} = n_i \hat{r}_k \hat{\lambda}_{i+k}$$

Příklad

Počet událostí	Rok vzniku	Vývojový rok			
		0	1	2	3 a více
641	**2011**	9032	2369	1608	985
560	**2012**	4120	2856	1438	
599	**2013**	3926	2507		
605	**2014**	7876			