

# Pojistná matematika

## Bonus-malus systém, Markovská analýza

**Silvie Kafková**

2014

# Obsah

**1** Úvod

**2** Obecný bonus-malus systém

**3** Markovská analýza

# Obsah

## 1 Úvod

## 2 Obecný bonus-malus systém

## 3 Markovská analýza

# Úvod

- Tento systém se týká hlavně pojištění automobilů.
- Výška pojistného, které pojišťovna vybírá, z velké části závisí na počtu pojistných nároků v minulosti.
- **Bonus** obvykle získávají ti, kdo neuplatnili po nějakou předem vymezenou dobu pojistný nárok a **malus** ti, kdo uplatnili velké množství pojistných nároků.
- Bonus slouží jako odměna pro opatrné řidiče. Naopak těm, kteří nahlásí dopravní nehodu, je pojistné navýšeno.
- Systém je nevhodný třeba u zdravotního pojištění.

# Úvod

- U pojištění automobilů obvykle rozlišujeme dva typy pojištění a to **povinné ručení** neboli pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem motorového vozidla a **havarijní pojištění**.
- **Povinné ručení** se týká škod, které jsou způsobeny další osobě. Jedná se o povinně smluvní pojištění vozidel.
- **Havarijní pojištění** je nepovinné smluvní pojištění vozidel. Slouží ke krytí škod na vlastním automobilu. Využívá se více u nových automobilů.
- Typický bonus-malus systém vznikl v Nizozemí.

# Obsah

**1** Úvod

**2** Obecný bonus-malus systém

**3** Markovská analýza

# Obecný bonus-malus systém

- Každá země má vlastní bonus-malus systém.
- Systém stanovení pojistného probíhá takto:
  - Základní pojistné je určeno použitím ratingových faktorů jako váha vozu, cena vozu, typ automobilu, způsob použití (soukromé nebo k podnikání) a rozsah pojistky (havarijní, povinné ručení nebo kombinace). Takto stanovené pojistné platí řidiči bez historie.
  - Poté jsou zavedeny bonusy nebo malusy použitím stupnice určující jejich výši.
  - Nový pojištěnec obvykle platí pojistné 100%. A pak podle počtu let bez nehod dostává procentuální slevu podle stupnice. Dojde-li k uplatnění pojistného nároku, na stupnici klesá.

# Obecný bonus-malus systém

- Ne všechny **faktory rizika** je možné použít jako ratingové faktory. Např. schopnosti řidiče, rychlost reakcí, agresivita za volantem, počet odřízených kilometrů jsou těžko měřitelné faktory.
- Pro některé z těchto faktorů je možné najít **zástupce**, např. počet najetých kilometrů je možné určit podle váhy a stáří auta, podle typu paliva nebo podle způsobu využití automobilu. Např. v Nizozemí mají diesellový motor spíše zkušenější řidiči.
- Rychlost, kterou řidič jezdí je možné odhadnout podle výkonu motoru a váhy automobilu.



# Obecný bonus-malus systém

- Ale použitím pouze těchto faktorů je nemožné určit budoucí vývoj množství pojistných nároků.
- Proto je potřeba použít **historii pojistných nároků** jako raitingový faktor.
- Výzkumem bylo zjištěno, že váha auta je **korelovaná s celkovým rozsahem pojistných nároků**, který je součinem průměrného počtu pojistných nároků a průměrné velikosti škody. U silnějších automobilů dochází k pojistnému nároku častěji a také u nehod, kde figurují, vzniká větší škoda.

# Obecný bonus-malus systém

- Dalším podobným faktorem, který přímo úměrně souvisí s výší pojistného, je cena automobilu.
- Další ukazatelem je **počet let bez nehody**. Riziko řidiče s velkým počtem let bez nehody klesá. V pozdějších letech je pokles pomalejší.
- Řidiči se "špatnou historií" jsou horší než "nováčci". Jejich pojistné je pak vyšší než 100%, uplatňuje se zde malus.

# Obsah

**1** Úvod

**2** Obecný bonus-malus systém

**3** Markovská analýza

# Markovská analýza

- Bonus-malus systém je možné považovat za speciální **Markovský proces**.
- V takovém procesu dochází k přechodu z jednoho stavu do jiného během času.
- **Markovská vlastnost** říká, že se jedná o **proces bez paměti**, což znamená že pravděpodobnost takového přechodu nezávisí na tom, v jakých stavech se objekt nacházel v minulosti, ale pouze na tom, v jakém stavu je objekt nyní.
- Použitím této analýzy je možné zjistit, jaký je poměr řidičů v jednotlivých stavech, tedy na jednotlivých stupních bonus-malus stupnice.

# Markovská analýza

## Matice pravděpodobnosti přechodu $P$ :

- Jedná se o čtvercovou matici prvků  $p_{ij}$ , které udávají pravděpodobnost přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$
- Každý řádek  $i$  reprezentuje pravděpodobnost, že ze stavu  $i$  v dalším kroku přejdeme do stavu  $j$ .
- Každý prvek je proto nezáporné číslo z intervalu  $[0, 1]$ .
- Je to stochastická matice, což znamená, že součet prvků na řádku je vždy roven 1.
- Platí tedy

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Markovská analýza

- Předpokládejme, že začínáme v čase  $t = 0$ . **Vektor počátečních pravděpodobností**  $l(0)$  udává pravděpodobnost toho, že se na počátku nacházíme ve stavu 1 nebo 2  $\dots$  nebo  $n$ . Tedy

$$l(0) = (l_1, l_2, \dots, l_n).$$

- Platí  $l_j > 0$  a  $l_1 + l_2 + \dots + l_n = 1$ .
- Pravděpodobnost toho, že začínáme ve stavu  $i$  a po roce přejdeme do stavu  $j$  vypočítáme jako  $l_i p_{ij}$ .

# Markovská analýza

- Tedy celková pravděpodobnost toho, že po roce budeme ve stavu  $j$ , jestliže uvažujeme vektor počátečních pravděpodobností  $I(0)$ , je dána vztahem

$$I(1) = I(0)P = (I_1, \dots, I_n) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ & \ddots & \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

- Situaci ve druhém roce zjistíme jako

$$I(2) = I(1)P = I(0)P^2.$$

- Stejným způsobem se dá pokračovat dále.

# Markovská analýza

- Platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t+1) = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t)P.$$

- Označíme-li  $I(\infty) = a$ , pak platí

$$a = aP.$$

- Vektor  $a$  nazýváme **stacionární vektor** stochastické matice  $P$ . Řekneme, že složka  $a_j$  stacionárního vektoru  $a$  vyjadřuje pravděpodobnost toho, že objekt se bude nacházet ve stavu  $j$  po uplynutí dostatečně dlouhé doby, kdy už došlo k odeznění vlivu počáteční podmínky.
- Vektor  $a$  je stochastický vektor a proto platí

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$



## Příklad

Řidiči platí pojistné  $c$ , jestliže v předchozích dvou letech uplatnili 1 nebo více pojistných nároků. Ostatní řidiči platí pojistné  $a$ , kde  $a < c$ . Tedy rozlišujeme 3 skupiny řidičů:

- 1** Uplatnili v současném roce pojistný nárok a bude platit pojistné  $c$ .
- 2** Neuplatnili pojistný nárok v současném roce, ale v minulém roce ano, a proto platí pojistné  $c$ .
- 3** Neuplatnili pojistný nárok v současném ani v předchozím roce a platí pojistné  $a$ .

Pravděpodobnost toho, že řidič uplatní jeden nebo více nároků je  $q$ . Pak přejde do skupiny 1. Pravděpodobnost toho, že neuplatní v daném roce pojistný nárok a postoupí o skupinu výš, je-li to možné, je  $s$ . Určete stacionární vektor.

## "Hlad" po bonusu

- Uvažujme řidiče s pravděpodobností pojistného nároku  $q$  z předchozího příkladu (3 stavy), který způsobil škodu o rozsahu  $t$ .
- Jesliže není povinen hlásit tento nárok své pojišťovně, pro jaké  $t$  se mu vyplatí nárok uplatnit?
- Některé pojistky umožňují rozhodnout se do 31.12., zda uplatnit tento nárok, tedy až když je jisté, že v daném roce nebude uplatněn žádný další nárok.
- Po dvou letech "zmizí" vliv uplatnění nároku. Při rozhodování tedy uvažujeme 2 letý horizont.

## "Hlad" po bonusu

- Řidič pak ve dvou po sobě jdoucích letech bude platit pojistné a případně škodu  $t$  v závislosti na tom, zda pojistný nárok uplatní nebo ne a na tom, zda dojde k uplatnění nároku v příštím roce.
- Situace bude následující:

	<b>Neuplatní nárok v příštím roce</b>	<b>Uplatní nárok v příštím roce</b>
<b>Neuplatnil nárok</b>	$a + a + t$	$a + c + t$
<b>Uplatnil nárok</b>	$c + c$	$c + c$

## "Hlad" po bonusu

- K uplatnění pojistného nároku dojde v případě, že to pro řidiče bude výhodné, tedy když

$$(1 - q)(2a + t) + q(a + c + t) \geq 2c.$$

Odtud

$$t \geq (2 - q)(c - a).$$

- Odtud je vidět, že by nebylo "rozumné" uplatnit pojistný nárok v menším rozsahu než je očekávaná ztráta ze snížení bonusu.
- Tento jev se nazývá "**hlad po bonusu**".

## "Hlad" po bonusu

- Pojišťovna je tak připravena o vyšší pojistné, které jí náleží, protože pojištěný "tají", že je ve skutečnosti špatný řidič.
- Tato skutečnost je kompenzována tím, že i malé škody jsou spojeny s jistými správními náklady a ty pojišťovna ušetří.
- Složitější modely zkoumají například delší nebo nekonečný časový horizont s více stupni bonusu.
- Důležitý je také okamžik v roce, kdy ke vzniku škody dojde.