Pojistná matematika

Úmrtnostní tabulky, komutační čísla a jejich použití

Silvie Kafková

2015

Osnova

Obsah

Délka života T_0

- Kombinace finanční matematiky a matematického modelování úmrtnosti- pojistná událost spočívá v úmrtí nebo dožití se určitého věku.
- charakteristika úmrtnosti:
  - dva stavy- "*naživu*"a "*zemřelý*", o příslušném stavu každého z pojištěných lze jednoznačně rozhodnout;
  - přechod mezi těmito stavy pouze jedním směrem- úmrtí;
  - okamžik úmrtí je náhodný a může být popsán jen s použitím pravděpodobnosních nástrojů.

Délka života T_0

Délka života :

- spojitá náhodná veličina představující **délku života** právě narozeného jedince (doba mezi věkem 0 a úmrtím);
- měří se v letech;

Představa na níž je založen model úmrtnosti:

- náhodně vybereme jednoho jedince z velké skupiny x-letých, jeho délka života není známá, ale můžeme na ni pohlížet jako na náhodnou veličinu s odhadnutelným pravděpodobnostním rozdělením.

Pravděpodobnostní rozdělení

- Pravděpodobnostní rozdělení délky života T_0 popisujeme pomocí **distribuční funkce**

$$F_0(t) = \mathrm{P}(T_0 \leq t)$$

díky spojitosti můžeme psát

$$\mathrm{P}(T_0 \leq t) = \mathrm{P}(T_0 < t).$$

- Někdy se zavádí také **funkce přežití**

$$S_0(t) = \mathrm{P}(T_0 > t) = 1 - F_0(t)$$

- **Budoucí délku života ve věku x** za podmínky, že jedinec se dožil věku x budeme značit T_x.
- Distribuční funkci **délky života ve věku x** počítáme pomocí podmíněné pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathrm{P}(T_x \leq t) = \mathrm{P}(T_0 \leq x + t | T_0 > x) = \\ &= \frac{\mathrm{P}(x < T_0 \leq x + t)}{\mathrm{P}(T_0 > x)} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}. \end{aligned}$$

- Pro **funkci přežití ve věku x** platí

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \mathrm{P}(T_x > t) = \mathrm{P}(T_0 > x + t | T_0 > x) = \\ &= \frac{\mathrm{P}(T_0 > x + t)}{\mathrm{P}(T_0 > x)} = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}. \end{aligned}$$

Značení

- q_x **- pravděpodobnost úmrtí ve věku x**: pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se nedožije věku $x+1$

$$q_x = F_x(1) = \mathrm{P}(T_x \leq 1);$$

- p_x **- pravděpodobnost dožití ve věku x**: pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x+1$:

$$p_x = S_x(1) = \mathrm{P}(T_x > 1);$$

- ${}_tq_x$ - pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře před dosažením věku $x+t$

$${}_tq_x = F_x(t) = \mathrm{P}(T_x \leq t);$$

Značení

- ${}_tp_x$ - pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x + t$

$$ {}_tp_x = S_x(t) = \mathrm{P}(T_x > t); $$

- ${}_{s|}q_x$ - pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře ve věku $x + s$

$$ {}_{s|}q_x = F_x(s+1) - F_x(s) = \mathrm{P}(s < T_x \leq s+1); $$

- ${}_{s|t}q_x$ - pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x + s$, ale zemře před dosažením věku $x + s + t$

$$ {}_{s|t}q_x = F_x(s+t) - F_x(s) = \mathrm{P}(s < T_x \leq s+t). $$

Značení

- ${}^0e_x$ - **střední délka života ve věku x** - udává průměrný počet let života zbývající jedinci ve věku x. Platí

$$^0e_x = E(T_x).$$

Obsah

Intenzita úmrtnosti

- Označme si pravděpodobnostní hustotu veličiny T_0 jako

$$f_0(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_0(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_tq_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - {}_tp_0) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_tp_0.$$

- Jelikož platí

$${}_tq_x + {}_tp_x = 1,$$

pak pravděpodobnostní hustota veličiny T_x je

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = \frac{d}{dt}({}_tq_x) = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = -\frac{d}{dt}({}_tp_x).$$

- Pro f_0 a f_x platí

$$f_x(t) = \frac{f_0(x+t)}{1 - F_0(x)} = \frac{f_0(x+t)}{{}_xp_0}.$$

- **Intenzita úmrtnosti ve věku x**

$$\begin{aligned}\mu_x &= f_x(0) = \frac{f_0(x)}{{}_x p_0} = -\frac{1}{{}_x p_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_x p_0 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln({}_x p_0) \\ \mu_{x+t} &= f_{x+t}(0) = \frac{f_t(x)}{{}_x p_t} = -\frac{1}{{}_x p_t}\frac{d}{dx}{}_x p_t = -\frac{d}{dx}\ln({}_x p_t).\end{aligned}$$

- Budeme-li předpokládat malé přírůstky Δx, pak platí

$$f_0(x)\Delta x \approx F_0(x+\Delta x) - F_0(x) = \mathrm{P}(x < T_0 < x + \Delta x),$$

pak můžeme psát

$$\begin{aligned}\mu_x \Delta x &= f_x(0)\Delta x \approx F_x(\Delta x) - F_x(0) \\ &= \mathrm{P}(x < T_0 < x + \Delta x | T_0 > x).\end{aligned}$$

- Výraz $\mu_x \Delta x$ udává pravděpodobnost úmrtí ve věkovém intervalu $(x, x + \Delta x)$ malé délky Δx za podmínky, že daný jedinec se dožil věku x.

Zákony úmrtnosti

- Praktické využití intenzity úmrtnosti.
- Snaha modelovat lidskou úmrtnost pomocí matematických vzorců, konstrukce *křivek úmrtnosti* pro danou populaci.
- Jedná se pak o úsporný popis velkého množství údajů.
- Úmrtnostní křivky jsou hladké a přispívají k vyhlazování úmrtnostních tabulek.
- Pro rozlišení různých zákonů úmrtnosti jsou vhodné různé volby intenzit úmrtnosti.

Konstantní intenzita úmrtnosti

- Intenzita úmrtnosti je konstantní, tedy

$$\mu_x = \lambda.$$

Vyjdeme ze vztahu

$$\mu_{x+s} = -\frac{d}{ds} \ln({}_s p_x)$$

jehož integrací od 0 po t dostaneme

$${}_t p_x = \exp\left(- \int_0^t \mu_{x+s} \, \mathrm{d}s \right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

- Funkce přežití ${}_t p_x$ zde nezávisí na věku, a proto je tento zákon úmrtnosti pro lidskou populaci nevhodný.

Moivrův zákon úmrtnosti

- Jedná se o rovnoměrné rozdělení délky života s pravděpodobnostní hustotou

$$f_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, \text{ pro } 0 < t < \omega - x,$$

kde ω je stanovený nejvyšší věk pro uvažovanou populaci.

- Platí

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = 1 - F_x(t) = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}, \text{ pro } 0 < t < \omega - x.$$

- Intenzita úmrtnosti

$$\mu_x = f_x(0) = \frac{1}{\omega - x}, \text{ pro } 0 < x < \omega,$$

je hyperbolicky rostoucí funkce.

Další zákony úmrtnosti

- **Gompertzův zákon úmrtnosti:** exponenciálně rostoucí intenzita úmrtnosti

$$\mu_x = Bc^x, \text{ kde } B > 0, \text{ a } c > 1 \text{ jsou parametry.}$$

- **Makehamův zákon úmrtnosti:** zobecnění Gompertzovy intenzity úmrtnosti do tvaru

$$\mu_x = A + Bc^x, \text{kde } A > 0 \text{ je další parametr.}$$

Področní pravděpodobnosti úmrtí a dožití

- Někdy je třeba v praxi určit rozsah kmene pojištěných l_{x+t}, kde $0 < t < 1$, jestliže známe rozsahy kmene pojištěných l_x pro celočíselné věky x.
- Uvedeme si pro to dvě metody související s intenzitou úmrtnosti.

Předpoklad konstantní intenzity úmrtnosti mezi celočíselnými věky

- Metoda je založena na předpokladu

$$\mu_{x+t} = \mu = \textit{konstanta}, \text{ pro } 0 \leq t \leq 1,$$

  x je pevně zvolený celočíselný věk.
- Pro konstantní intenzitu úmrtnosti jsme již dříve odvodili ${}_tp_x = e^{-\mu t}$. Dosazením $t = 1$ dostáváme

$$\mu = -\ln({}_1p_x) = -\ln(p_x).$$

- Hledané področní pravděpodobnosti jsou

$$\begin{aligned} {}_tp_{x+s} &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s+z}\,\mathrm{d}z\right) = \mathrm{e}^{-\mu t}, \\ {}_tq_{x+s} &= 1 - e^{-\mu t}, \end{aligned}$$

Předpoklad področní linearity úmrtnosti

- Metoda je založena na předpokladu

$$ {}_tq_x = tq_x, \; 0 \leq t \leq 1. $$

- Souvislost s intenzitou úmrtnosti je vidět zde:

$$ q_x = \frac{d}{dt} tq_x = \frac{d}{dt} {}_tq_x = \frac{d}{dt} F_x(t) = f_x(t) = {}_tp_x \mu_{x+t}, $$

platí

$$ \mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - t.q_x}, \; 0 \leq t \leq 1. $$

Předpoklad področní linearity úmrtnosti

Pro hledané področní pravděpodobnosti pak platí

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{x+s} &= \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x} = \frac{1-(s+t)q_x}{1-sq_x}, \\
{}_tq_{x+s} &= \frac{tq_x}{1-sq_x},
\end{aligned}
$$

$s, t \geq 0$, $s + t \leq 1$.

Příklad

Nechť jsou známy hodnoty $q_{50} = 0,0049867$, $q_{51} = 0,00557449$, $q_{52} = 0,0061396$, $p_{50} = 0,99501$, $p_{51} = 0,99442$, a $p_{52} = 0,99386$. Najděte hodnoty

- ${}_{0,5}q_{50}$;
- ${}_{2}p_{50,5}$;
- $\mu_{52,75}$.

Obsah

Úmrtnostní tabulky

- jsou základním nástrojem pro výpočty prováděné v rámci životního pojištění. Prezentují model úmrtnosti praktickým způsobem.
- poskytují základní informace o úmrtnosti uzavřené stacionární populace- nedochází k migraci obyvatelstva a v čase se nemění ani velikost populace a její věkové složení.
- pro Českou republiku je každoročně publikuje Český statistický úřad.

Rozlišují se úmrtnostní tabulky:

- **úplné** - mají jednoleté věkové intervaly (tzn. údaje pro věk 0,1,... ,ω roků)
- **zkrácené** - mají víceleté věkové intervaly
- **běžné (průřezové)** - vycházejí z úmrtnostní zkušenosti populace během krátkého (většinou ročního) časového období obvykle nepřesahujícího 10 let
- **generační** - představují skutečný záznam průběhu života konkrétní generace

V pojišťovací praxi se používají především **běžné úplné** úmrtnostní tabulky.

Popis úmrtnostni tabulky

Sloupce úmrtnostní tabulky představují konkrétní veličiny, např. věk osob, počet žijících osob v daném věku, atd. **Řádky** představují hodnoty veličin uvedených ve sloupcích pro konkrétní věk.

Charakteristika konkrétních veličin uvedených v úmrtnostních tabulkách:

- ***x*** - vyjadřuje **věk osoby** - $x \in \{0, 1, ..., \omega\}$, kde ω je předpokládaný nejvyšší věk, který může dosáhnout osoba sledovaného souboru

Veličiny úmrtnostní tabulky

- ***pravděpodobnost dožití*** p_x - vyjadřuje pravděpodobnost, že x-letá osoba se dožije věku $(x+1)$
- ***pravděpodobnost úmrtí*** q_x - vyjadřuje pravděpodobnost, že x-letá osoba se nedožije věku $(x+1)$
- platí $p_x + q_x = 1$
- ***počet dožívajících se věku*** x l_x- vyjadřuje počet osob žijících ve věku x. Počáteční hodnota l_0 vyjadřuje počáteční počet osob modelovaného souboru a nazývá se **kořen úmrtnostní tabulky**.

- Pro libovolná přirozená x můžeme definovat posloupnost l_x jako
$$l_x = l_0 \cdot_x p_0$$
- Protože pro libovolné přirozené n platí vztah ${}_{x+n}p_0 =_x p_0 \cdot_n p_x$, dostaneme z něj vynásobením rovnice kořenem l_0 vztah
$$l_{x+n} = l_x \cdot_n p_x.$$
- Pak pro $n = 1$ dostáváme rekurentní vztah pro posloupnost l_x
$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x.$$

- Můžeme tedy vyjádřit pravděpodobnost dožití z věku x do věku $x + n$ jako
$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$
- Platí také
$$_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}.$$
- Jestliže l_0 je počet jedinců ve věku 0, pak počet jedinců, kteří přežijí do věku x je vzhledem k navzájem nezávislému úmrtnostnímu chování jedinců náhodná veličina s binomickým rozdělením $Bi(l_0, {}_xp_0)$.
- Střední hodnota této veličiny je tedy $l_0 \cdot {}_xp_0 = l_x$.

- l_x lze interpretovat jako střední počet jedinců, kteří se při daném výchozím stavu l_0 dožijí věku x.
- Je zřejmé, že posloupnost l_x je nerostoucí tedy

$$l_0 \geq l_1 \geq l_2 \geq \dots$$

- Bývá zvykem v praxi stanovit nejvyšší věkovou hranici ω jako nejnižší věk x takový, že pak již

$$l_x = 0, \; x > \omega.$$

- ω se volí věk takový, jehož dožití je již málo pravděpodobné.

- ***počet zemřelých ve věku*** x d_x - vyjadřuje počet osob, které zemřely ve věku x.
- Definujeme

$$d_x = l_x - l_{x+1} \text{ s tím, že platí } d_\omega = l_\omega.$$

- Platí tedy, že

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \text{ nebo obecněji } {}_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}.$$

- d_x se analogicky interpretuje jako střední počet jedinců, kteří při daném výchozím stavu l_0 zemřou ve věku x.

- L_x ***- počet let prožitých jedinci ve věku*** x je střední počet roků, které ve věku x celkem prožije l_x jedinců z úmrtnostní tabulky.
- Využijeme dříve zavedenou aproximaci ${}_tq_x = tq_x$, což dává $q_x = f_x(t)$. Pak

$$
\begin{aligned}
L_x &= l_{x+1} + l_x \int_0^1 t f_x(t)\, dt \approx l_{x+1} + l_x \int_0^1 t q_x\, dt \\
&= l_{x+1} + \frac{1}{2} q_x \cdot l_x = l_{x+1} + \frac{1}{2} d_x.
\end{aligned}
$$

- Z původních l_x jedinců ve věku x přispěje každý z l_{x+1} jedinců, kteří se dožijí věku věku $x+1$, do L_x jedním rokem, tj. celkem l_{x+1} roky. Navíc každý z $l_x \cdot_t p_x \cdot \mu_{x+t}$ jedinců kteří zemřou před dosažením věku $x+1$ ve věku $x+t$, přispěje ještě t roky, tj. celkem $t \cdot l_x \cdot_t p_x \cdot \mu_{x+t}$ roky.

- T_x - ***počet zbylých let života jedinců ve věku*** x je střední počet roků, které do konce svého života ještě celkem prožije l_x jedinců z úmrtnostní tabulky.
- Platí, že

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \ldots + L_\omega = l_x \int_0^{\omega - x} t f_x(t)\, dt = l_x \int_0^1 t \, {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

- ${}^0e_x$ - ***střední délka života ve věku*** x vyjadřuje průměrný počet roků, kterých se ještě dožije jedinec ve věku x let.
- Platí následující aproximativní vztah

$$ {}^0e_x = \frac{T_x}{l_x}. $$

Příklad

Kolik osob ve věku 60 let zemřelo během

- 5 roků;
- 7 roků?

Obsah

Komutační čísla

- Jedná se o často se opakující součiny a součty v pojistných výpočtech.
- Tyto součiny a součty byly označeny a jejich hodnoty jsou tabelizovány.
- Hodnoty komutačních čísel závisí na úmrtnostní tabulce a na výšce úrokové míry.
- V dalším budeme používat označení v pro **diskontní faktor**

$$v = \frac{1}{1+i},$$

  kde i je úroková míra.

Rozlišujeme komutační čísla:

- **nultého řádu:**

$$D_x = l_x v^x \quad \text{diskontovaný počet dožívajících se věku } x$$
$$C_x = d_x v^{x+1} \quad \text{diskontovaný počet zemřelých ve věku } x$$

- **prvního řádu**

$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j}$$
$$M_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}$$

- **druhého řádu**

$$
\begin{aligned}
S_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j} \\
R_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j}
\end{aligned}
$$

- Komutační čísla vyšších řádů se nepoužívají.

Reference

- Červinek P.:
  Pojistná matematika I,
  Masarykova univerzita, 2008
- Cipra T.:
  Pojistná matematika- Teorie a praxe,
  Ekopress, 1999
- Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. :
  Actuarial Mathematics
  The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois 1997