Pojistná matematika

Jednorázové netto pojistné pro případ dožití a pro případ smrti

Silvie Kafková

2015

Obsah

Obsah

Pojistné

- Platí, že **pojistné = netto pojistné + náklady pojišťovny**
- Pojistné se také někdy nazývá **brutto pojistné**, pojistná sazba nebo pojistný tarif. Jedná se o ekvivalentní výrazy.
- Netto pojistné se někdy nazývá **čisté pojistné** nebo rizikové pojistné.
- **Podle frekvence plateb pojistného rozlišujeme**
  - **Jednorázové** pojistné - pojistné je zaplaceno jednou a dále se nic neplatí.
  - **Běžné** pojistné - pojistné je placeno jednou za rok. Dá se dále rozlišit placení běžné po celou dobu pojištění a placení běžné placené kratší dobu, než je doba pojištění.
  - **Področní** pojistné - je placeno *m* krát za rok, např. měsíčně, půlročně, atd.

Základní principy pojištění osob

Při stanovení výše pojistného vycházíme ze dvou záladních principů. Jsou to

- **princip fiktivního souboru** - spočívá v předpokladu, že stejný typ pojištění uzavřou všechny osoby, které jsou ve věku x naživu. Tento předpoklad zjednodušuje všechny úvahy, ale nakonec vede k výsledkům dostatečně přesným na praktické použití.
- **princip ekvivalence** - vychází z požadavku, aby se rovnaly příjmy a výdaje pojišťovny, pokud se diskontují nebo zúročí ke stejnému datu.

Při výpočtech prováděných v rámci principu ekvivalence musí pojišťovna odhadnout své budoucí příjmy a výdaje se zohledněním **dvou hlavních aspektů**

- **Časové rozložení příjmů a výdajů** - finanční toky rozložené v čase se vztáhnou diskontováním do jejich počáteční hodnoty nebo úročením do koncové hodnoty.
- **Náhodný charakter finančních toků** v rámci pojištění a to jak na straně pojistného plnění (dožití se výplaty životního důchodu není jisté), tak na straně pojistného (placení pojistného obvykle končí smrtí klienta). Proto se obvykle pracuje se **středními hodnotami** příslušných veličin.

- Pojišťovna oceňuje své budoucí příjmy a výdaje hlavně pomocí jejich **očekávaných počátečních hodnot.** Princip ekvivalence pak má tento tvar:

  očekávaná počáteční hodnota pojistného=
  =očekávaná počáteční hodnota pojistného plnění.

- V nejjednodušším případě představuje počáteční hodnota pojištění **jednorázové netto pojistné**, protože částka v této výši jednorázově pokryje průměrná pojistná plnění pojišťovny.
- Pro jednoduchost budeme uvažovat jednotková pojistná plnění, pak mluvíme o **jednotkové počáteční hodnotě pojištění.**

Ocenění některých druhů pojištění

- Postupně si popíšeme hlavní druhy pojištění osob.
- Ukážeme si především výpočet jednotkové počáteční hodnoty pojištění- jednorázové nettopojistné na jednotkovou pojistnou částku.
- Výpočet se provádí dvěma způsoby:
  - pomocí výpočtu střední hodnoty vhodné náhodné veličiny;
  - pomocí komutačních čísel.

Obsah

Pojištění pro případ dožití

- Pojišťovna vyplatí sjednanou částku, jestliže se osoba pojištěná ve věku x dožije konce sjednané pojistné doby n, tedy věku $x+n$.
- Zemře-li pojištěný před koncem pojistné doby, pojištění zanikne bez náhrady.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** ${}_nE_x$ nebo $A_{x\overline{n}|}^{\;1}$
- ***Výpočet*** ${}_nE_x$ ***pomocí náhodné veličiny***: Zvolíme odpovídající náhodnou veličinu Z jako

$$Z = \begin{cases} 0, & K_x = 0, 1, \ldots, n-1, \\ v^n, & K_x = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

kde K_x označuje **celočíselnou délku života ve věku** x

- Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny Z je

$$p(z) = \begin{cases} {}_{0|}q_x, & Z = 0,\ K_x = 0, \\ {}_{1|}q_x, & Z = 0,\ K_x = 1, \\ \vdots & \\ {}_{n-1|}q_x, & Z = 0,\ K_x = n-1 \\ {}_np_x & Z = v^n,\ K_x \geq n. \end{cases}$$

- Tedy ${}_nE_x$ je

$${}_nE_x = E(Z) =_n p_x \cdot v^n.$$

- ***Výpočet*** $_nE_x$ ***pomocí komutačních čísel:*** zde využijeme již známého $_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ a tedy

$$_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

- Pokud chceme vypočítat jednorázové netto pojistné pro jinou pojistnou částku, vynásobíme vzorec danou pojistnou částkou PČ:

$$\pi(_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \text{PČ}.$$

Příklad

Jaké je jednorázové nettopojistné pro pojištění 40 leté osoby na dožití věku 60 let na 1 000Kč pojistné částky? Počítáme s úrokovou mírou 2%.

Obsah

(Doživotní) pojištění pro případ smrti

- Pojišťovna vyplatí sjednanou pojistnou částku na konci pojistného roku, v němž osoba pojištěná ve věku x zemře.
- Pojistné plnění je vyplaceno dědicům nebo určeným osobám.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** A_x
- ***Výpočet*** A_x ***pomocí náhodné veličiny:*** Zvolíme odpovídající náhodnou veličinu Z jako

$$Z = v^{K_x+1},$$

kde K_x označuje celočíselnou délku života ve věku x.

(Doživotní) pojištění pro případ smrti

- Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny Z je

$$p(z) = \begin{cases} {}_{0|}q_x, & Z = v,\ K_x = 0, \\ {}_{1|}q_x, & Z = v^2,\ K_x = 1, \\ {}_{2|}q_x, & Z = v^3,\ K_x = 2, \\ \vdots & \end{cases}$$

- Tedy A_x je

$$A_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}$$

(Doživotní) pojištění pro případ smrti

- ***Výpočet A_x pomocí komutačních čísel:*** zde využijeme již známého $_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$ a tedy

$$
\begin{aligned}
A_x &= \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots = \\
&= \frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \ldots}{l_x \cdot v^x} \\
&= \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}.
\end{aligned}
$$

(Doživotní) pojištění pro případ smrti

Příklad

Jaké je jednorázové netto pojistné pro pojištění 30leté osoby pro případ smrti na 1 000 000Kč? Úroková míra jsou 2%.

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní pojištění pro případ smrti. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Dočasné pojištění pro případ smrti

- Pojišťovna vyplatí sjednanou pojistnou částku na konci pojistného roku, v němž osoba pojištěná ve věku x zemře, pokud k úmrtí dojde před uplynutím pojistné doby n.
- Dožije-li se pojištěný konce pojistné doby, pojištění zanikne bez náhrady.
- Často bývá podmínkou pro poskytnutí hypotečního úvěru.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** $A^1_{x\overline{n|}}$
- ***Výpočet*** $A^1_{x\overline{n|}}$ ***pomocí náhodné veličiny:*** Zvolíme odpovídající náhodnou veličinu Z jako

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x = 0, 1, ..., n-1, \\ 0, & K_x = n, n+1, ..., \end{cases}$$

Dočasné pojištění pro případ smrti

- Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny Z je

$$p(z) = \begin{cases} {}_{0|}q_x, & Z = v,\ K_x = 0, \\ {}_{1|}q_x, & Z = v^2,\ K_x = 1, \\ {}_{2|}q_x, & Z = v^3,\ K_x = 2, \\ \vdots & \\ {}_{n-1|}q_x & Z = v^n,\ K_x = n-1, \\ {}_{n}p_x, & Z = 0,\ K_x \geq n, \end{cases}$$

- Tedy $A^1_{x\overline{n}|}$ je

$$A^1_{x\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}$$

Dočasné pojištění pro případ smrti

- ***Výpočet A_x pomocí komutačních čísel:*** zde využijeme již známého ${}_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$ a tedy

$$
\begin{aligned}
A_x &= \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} v^n = \\
&= \frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \ldots + d_{x+n-1} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} \\
&= \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}
$$

Dočasné pojištění pro případ smrti

Příklad

Vypočtěte počáteční hodnotu dočasného pojištění pro případ smrti 40-ti leté osoby na dobu 5 let s pojistnou částkou 1 000 000 Kč.

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasné pojištění pro připad smrti na 50 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

(Doživotní) pojištění pro případ smrti odložené o t roků

- Pojišťovna vyplatí sjednanou pojistnou částku na konci pojistného roku, v němž osoba pojištěná ve věku x zemře, pokud k úmrtí dojde po uplynutí doby $x + t$.
- Zemře-li osoba před dovršením věku $x + t$, pojištění zaniká bez náhrady.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** $_{k|}A_x$
- ***Výpočet $_{k|}A_x$ pomocí náhodné veličiny:*** Zvolíme odpovídající náhodnou veličinu Z jako

$$Z = \begin{cases} 0, & K_x = 0, 1, ..., t-1, \\ v^{K_x+1}, & K_x = t, t+1, ..., \end{cases}$$

(Doživotní) pojištění pro případ smrti odložené o t roků

- Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny Z je

$$p(z) = \begin{cases} {}_{0|}q_x, & Z = 0,\ K_x = 0, \\ {}_{1|}q_x, & Z = 0,\ K_x = 1, \\ \vdots & \\ {}_{t-1|}q_x, & Z = 0,\ K_x = t-1, \\ {}_{t|}q_x & Z = v^{t+1},\ K_x = t, \\ {}_{t+1|}q_x & Z = v^{t+2},\ K_x = t+1, \\ \vdots & \end{cases}$$

(Doživotní) pojištění pro případ smrti odložené o t roků

- Tedy ${}_{k|}A_x$ je

$$ {}_{k|}A_x = E(Z) = \sum_{k=t}^{\omega-x} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=t}^{\omega-x} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} $$

- ***Výpočet ${}_{k|}A_x$ pomocí komutačních čísel:***

$$ \begin{aligned} {}_{k|}A_x &= \frac{d_{x+t}}{l_x} \cdot v^{t+1} + \frac{d_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+2} + \ldots = \\ &= \frac{d_{x+t} \cdot v^{x+t+1} + d_{x+t+1} \cdot v^{x+t+2} + \ldots}{l_x \cdot v^x} \\ &= \frac{C_{x+t} + C_{x+t+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_{x+t}}{D_x}. \end{aligned} $$

(Doživotní) pojištění pro případ smrti odložené o t roků

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní pojištění pro případ smrti s karenční dobou 15 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Poznámka

Karenční doba udává, za jak dlouho od uzavření pojištění má klient právo na vyplacení případného pojistného plnění.

Dočasné pojištění pro případ smrti odložené o t roků

- Pojišťovna vyplatí sjednanou pojistnou částku na konci pojistného roku, v němž osoba pojištěná ve věku x zemře, pokud k úmrtí dojde po uplynutí doby $x + t$ a zároveň před uplynutím doby $x + t + n$.
- Zemře-li osoba před dovršením věku $x + t$ nebo po dovršení věku $x + t + n$ pojištění zaniká bez náhrady.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** ${}_{k|}A^{1}_{x\overline{n}|}$

Dočasné pojištění pro případ smrti odložené o t roků

- ***Výpočet*** ${}_{k|}A^{1}_{x\overline{n}|}$ ***pomocí náhodné veličiny:*** Zvolíme odpovídající náhodnou veličinu Z jako

$$Z = \begin{cases} 0, & K_x = 0, 1, ..., t-1, \\ v^{K_x+1}, & K_x = t, t+1, ..., t+n-1 \\ 0, & K_x \geq t+n \end{cases}$$

Dočasné pojištění pro případ smrti odložené o t roků

- Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny Z je

$$p(z) = \begin{cases} {}_{0|}q_x, & Z = 0,\ K_x = 0, \\ \vdots & \\ {}_{t-1|}q_x, & Z = 0,\ K_x = t-1, \\ {}_{t|}q_x & Z = v^{t+1},\ K_x = t, \\ {}_{t+1|}q_x & Z = v^{t+2},\ K_x = t+1, \\ \vdots\, {}_{t+n-1|}q_x, & Z = v^{t+n},\ K_x = t+n-1, \\ {}_{t+n}p_x & Z = 0,\ K_x = t+n \\ \vdots & \end{cases}$$

Dočasné pojištění pro případ smrti odložené o t roků

- Tedy ${}_{k|}A^{1}_{xn\rceil}$ je

$$ {}_{k|}A^{1}_{xn\rceil} = E(Z) = \sum_{k=t}^{t+n-1} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=t}^{k+n-1} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} $$

- ***Výpočet ${}_{k|}A^{1}_{xn\rceil}$ pomocí komutačních čísel:***

$$ \begin{aligned} {}_{k|}A^{1}_{xn\rceil} &= \frac{d_{x+t}}{l_x} \cdot v^{t+1} + \dots + \frac{d_{x+t+n-1}}{l_x} \cdot v^{t+n} = \\ &= \frac{d_{x+t} \cdot v^{x+t+1} + \dots + d_{x+t+n-1} \cdot v^{x+t+n}}{l_x \cdot v^x} \\ &= \frac{C_{x+t} + \dots + C_{x+t+n-1}}{D_x} = \frac{M_{x+t} - M_{x+t+n}}{D_x}. \end{aligned} $$

Dočasné pojištění pro případ smrti odložené o t roků

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasné pojištění pro případ smrti na 50 let s karenční dobou 15 let. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby(nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí částkou

- Patří do skupiny speciálního pojištění
- x-letá osoba se pojistí tak, že v případě úmrtí dané osoby v prvím roce pojištění dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku 1*p.j.*, v případě úmrtí dané osoby ve druhém roce pojištění bude pojistné plnění na konci roku 2*p.j.*, ...
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** $(LA)_x$

Pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí částkou

- ***Výpočet*** $(LA)_x$ ***pomocí náhodné veličiny:*** Zvolíme odpovídající náhodnou veličinu Z jako

$$Z = \begin{cases} v, & K_x = 0 \\ 2v^2, & K_x = 1 \\ 3v^3, & K_x = 2 \\ \vdots & \end{cases}$$

- Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny Z je

$$p(z) = \begin{cases} {}_{0|}q_x, & Z = v,\ K_x = 0, \\ {}_{1|}q_x, & Z = 2v^2,\ K_x = 1, \\ {}_{2|}q_x, & Z = 3v^3,\ K_x = 2, \\ \vdots & \end{cases}$$

Pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí částkou

- Tedy $(LA)_x$ je

$$(LA)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x} (k+1)_{k|}q_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} (k+1)_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}$$

- ***Výpočet** $(LA)_x$ **pomocí komutačních čísel:***

$$\begin{aligned} (LA)_x &= \frac{d_x}{l_x} \cdot v + 2 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots = \\ &= \frac{d_x \cdot v^{x+1} + 2 \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \ldots}{l_x \cdot v^x} \\ &= \frac{C_x + 2 \cdot C_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}. \end{aligned}$$

Pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí částkou

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí pojistnou částkou. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře již v prvním roce trvání pojištění(nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry) a o jakou částku se bude pojistná částka každý rok navyšovat?

Reference

- Červinek P.:
  Pojistná matematika I,
  Masarykova univerzita, 2008
- Cipra T.:
  Pojistná matematika- Teorie a praxe,
  Ekopress, 1999
- Čámský F. :
  Pojistná matematika v životním a neživotním pojištění
  Masarykova univerzita, 2004