Pojistná matematika

Jednorázové netto pojistné pro smíšené pojištění, důchodové pojištění

Silvie Kafková

2015

Obsah

Obsah

Smíšené pojištění

- Bylo vytvořeno spojením pojištění na dožití a dočasného pojištění pro případ smrti do jednoho produktu.
- Je tak zaručeno, že nastane pojistná událost a klientovi bude vyplacena pojistná částka.
- Jedná se o nejprodávanější pojištění v rámci životního pojištění.
- Pojišťovna vyplatí v případě úmrtí osoby pojištěné ve věku x do věku $(x+n)$ dědicům pojistné plnění. Pokud se daná osoba dožije věku $(x+n)$ bude pojistné plnění vyplaceno pojištěnému.

- Někdy je možné chápat jako pojištěnou formu spoření. Vklady jsou však vyšší, než by byly vklady v bance, je nutné zaplatit za jistotu, že bude dosaženo cílové částky.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** $A_{x\overline{n}|}$
- ***Výpočet*** $A_{x\overline{n}|}$ ***pomocí náhodné veličiny:*** Zvolíme odpovídající náhodnou veličinu Z jako

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x = 0, 1, ..., n-1, \\ v^n, & K_x = n, n+1, ..., \end{cases}$$

kde K_x označuje celočíselnou délku života ve věku x.

- Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny Z je

$$p(z) = \begin{cases} {}_{0|}q_x, & Z = v,\ K_x = 0, \\ {}_{1|}q_x, & Z = v^2,\ K_x = 1, \\ \vdots & \\ {}_{n-2|}q_x, & Z = v^{n-1},\ K_x = n-2, \\ {}_{n-1}p_x, & Z = v^n,\ K_x \geq n-1 \end{cases}$$

- Tedy $A_{x\overline{n}|}$ je

$$\begin{aligned} A_{x\overline{n}|} &= E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1} + {}_n p_x \cdot v^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1} + {}_{n-1} p_x \cdot v^n. \end{aligned}$$

- ***Výpočet*** $A_{x\overline{n}|}$ ***pomocí komutačních čísel:***

$$
\begin{aligned}
A_{x\overline{n}|} &= \frac{d_x}{l_x}\cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x}\cdot v^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x}\cdot v^n + \frac{l_{x+n}}{l_x}\cdot v^n \\
&= \frac{d_x\cdot v^{x+1} + \ldots + d_{x+n-1}\cdot v^{x+n} + l_{x+n}\cdot v^{x+n}}{l_x\cdot v^x} \\
&= \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}
$$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na smíšené pojištění na 50 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby, respektive kolik obdrží pojištěná osoba, pokud se dožije konce pojištění (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Speciální smíšené pojištění

- Dochází k vyplácení různých pojistných částek při úmrtí pojištěné osoby před dosažením věku $(x+n)$ a při dožití se věku $(x+n)$.
- Označíme-li si hodnotu pojištění $\pi(A_{x\overline{n}|})$ a PČ pojistnou částku, pak platí

$$\begin{aligned}\pi(A_{x\overline{n}|}) &= A^1_{x\overline{n}|} \cdot \text{PČ}_{\text{úmrtí}} + {}_nE_x \cdot \text{PČ}_{\text{dožití}} \\ &= \frac{(M_x - M_{x+n}) \cdot \text{PČ}_{\text{úmrtí}} + D_{x+n} \cdot \text{PČ}_{\text{dožití}}}{D_x}\end{aligned}$$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na smíšené pojištění na 50 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby, respektive kolik obdrží pojištěná osoba, pokud se dožije konce pojištěni (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry) a požaduje při dožití se konce pojištění stokrát větší částku než v případě úmrtí?

Obsah

Důchodová pojištění

- Budeme se zde zabývat tzv. "komerčním"důchodem nikoli klasickým starobním důchodem.
- Někdy se charakterizuje jako pojištění "opakovaného dožití".
- Budeme rozlišovat **dva druhy** důchodů a to
  - ***předlhůtní-*** vyplácený pojišťovnou vždy na počátku pojistného roku;
  - ***polhůtní-*** vyplácený pojišťovnou vždy na konci pojistného roku.

Doživotní důchod předlhůtní

- Pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na počátku pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije.
- Klient kupuje okamžitě splatnou doživotní rentu.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** $\ddot{a}_x$
- ***Odvození pravděpodobnostního vzorce z rovnice ekvivalence:***

  Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot \ddot{a}_x = l_x + l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \ldots + l_\omega \cdot v^{\omega-x}$$

  Rovnici vydělíme výrazem l_x:

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots + \frac{l_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega-x}$$

- Nyní využijeme vzorce ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ a rovnici upravíme na

$$\ddot{a}_x = {}_0p_x + {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \ldots + {}_{\omega-x}p_x \cdot v^{\omega-x}$$

A odtud dostáváme

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot v^k$$

- ***Výpočet $\ddot{a}_x$ pomocí komutačních čísel:***

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

Příklad

Vypočtěte jednorázové nettopojistné pro šedesátiletou osobu na 1000 Kč ročního důchodu.

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod. Kolik bude dostávat na začátku každého roku?

Doživotní důchod polhůtní

- Pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na konci každého pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** a_x
- ***Odvození pravděpodobnostního vzorce z rovnice ekvivalence:***

  Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot a_x = l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \ldots + l_\omega \cdot v^{\omega - x}$$

  Rovnici vydělíme výrazem l_x:

$$a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots + \frac{l_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega - x}$$

- Nyní využijeme vzorce ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ a rovnici upravíme na

$$a_x = {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \ldots + {}_{\omega-x}p_x \cdot v^{\omega-x}$$

A odtud dostáváme

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot v^k$$

- ***Výpočet a_x pomocí komutačních čísel:***

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní polhůtní důchod. Kolik bude dostávat na konci každého roku?

Příklad

Jaký je vztah mezi předlhůtním a polhůtním doživotním důchodem?

Dočasný důchod předlhůtní

- Pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na počátku pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije a neuplynula pojistná doba n.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** $\ddot{a}_{x\overline{n}|}$
- ***Odvození pravděpodobnostního vzorce z rovnice ekvivalence:***

  Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|} = l_x + l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \ldots + l_{x+n-1} \cdot v^{n-1}$$

  Rovnici vydělíme výrazem l_x:

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^{n-1}$$

- Nyní rovnici upravíme na

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = {}_0p_x + {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \ldots + {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1}$$

A odtud dostáváme

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \cdot v^k$$

- ***Výpočet*** $\ddot{a}_{x\overline{n}|}$ ***pomocí komutačních čísel:***

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasný předlhůtní důchod trvající 40 let. Kolik bude dostávat na začátku každého roku?

Příklad

Vypočtěte jednorázové nettopojistné pro čtyřicetiletou osobu na 1000 Kč ročního předlhůtního důchodu trvajícího 20 let.

Dočasný důchod polhůtní

- Pojišťovna vyplácí důchod sjednané výše vždy na konci pojistného roku, pokud osoba pojištěná ve věku x žije a neuplynula pojistná doba n.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** $a_{x\overline{n}|}$
- ***Odvození pravděpodobnostního vzorce z rovnice ekvivalence:***
  Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot a_{x\overline{n}|} = l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + \ldots + l_{x+n} \cdot v^n$$

  Rovnici vydělíme výrazem l_x:

$$a_{x\overline{n}|} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots + \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n$$

- Nyní rovnici upravíme na

$$a_{x n\rceil} = {}_1 p_x \cdot v + {}_2 p_x \cdot v^2 + \ldots + {}_n p_x \cdot v^n$$

A odtud dostáváme

$$a_{x n\rceil} = \sum_{k=1}^{n} {}_k p_x \cdot v^k$$

- ***Výpočet $a_{x n\rceil}$ pomocí komutačních čísel:***

$$\begin{aligned} a_{x n\rceil} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} \ldots + D_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasný polhůtní důchod trvající 40 let. Kolik bude dostávat na konci každého roku?

Obsah

Doživotní důchod odložený předlhůtní

- x-letá osoba se pojistí tak, že na začátku každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacen sjednaný důchod, přičemž první výplata bude až ve věku $x + t$
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** ${}_{t|}\ddot{a}_x$
- ***Odvození pravděpodobnostního vzorce z rovnice ekvivalence:***

  Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot {}_{t|}\ddot{a}_x = l_{x+t} \cdot v^t + l_{x+t+1} \cdot v^{t+1} + \ldots + l_\omega \cdot v^{\omega-x}$$

  Rovnici vydělíme výrazem l_x:

$${}_{t|}\ddot{a}_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^t + \frac{l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1} + \ldots + \frac{l_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega-x}$$

- Nyní rovnici upravíme na

$$ {}_{t|}\ddot{a}_x = {}_t p_x \cdot v^t + {}_{t+1} p_x \cdot v^{t+1} + \ldots + {}_{\omega-x} p_x \cdot v^{\omega-x} $$

A odtud dostáváme

$$ {}_{t|}\ddot{a}_x = \sum_{k=t}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot v^k $$

- ***Výpočet ${}_{t|}\ddot{a}_x$ pomocí komutačních čísel:***

$$ \begin{aligned} {}_{t|}\ddot{a}_x &= \sum_{k=t}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} \ldots + D_\omega}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+t}}{D_x} \end{aligned} $$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod. Kolik bude dostávat na začátku každého roku, pokud první výplatu chce obdržet za 15 roků?

Dočasný důchod odložený předlhůtní

- x-letá osoba se pojistí tak, že na začátku každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacen sjednaný důchod, přičemž první výplata bude až ve věku $x + t$ a bude vyplaceno n důchodů.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** ${}_{t|}\ddot{a}_{x\overline{n}|}$
- ***Odvození pravděpodobnostního vzorce z rovnice ekvivalence:***

  Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot {}_{t|}\ddot{a}_{x\overline{n}|} = l_{x+t} \cdot v^t + l_{x+t+1} \cdot v^{t+1} + \ldots + l_{x+t+n-1} \cdot v^{t+n-1}$$

  Rovnici vydělíme výrazem l_x:

$${}_{t|}\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^t + \frac{l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1} + \ldots + \frac{l_{x+t+n-1}}{l_x} \cdot v^{t+n-1}$$

- Nyní rovnici upravíme na

$$ {}_{t|}\ddot{a}_{x\overline{n}|} = {}_{t}p_x \cdot v^t + {}_{t+1}p_x \cdot v^{t+1} + \ldots + {}_{t+n-1}p_x \cdot v^{t+n-1} $$

A odtud dostáváme

$$ {}_{t|}\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \sum_{k=t}^{t+n-1} {}_{k}p_x \cdot v^k $$

- ***Výpočet $_{t|}\ddot{a}_{x\overline{n}|}$ pomocí komutačních čísel:***

$$ \begin{aligned} {}_{t|}\ddot{a}_{x\overline{n}|} &= \sum_{k=t}^{t+n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} \ldots + D_{x+t+n-1}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+t} - N_{x+t+n}}{D_x} \end{aligned} $$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasný předlhůtní důchod trvající 40 let. Kolik bude dostávat na začátku každého roku, pokud první výplatu chce obdržet za 15 roků?

Obsah

Doživotní předlhůtní důchod s garancí vyplácení prvních n roků

- x-letá osoba se pojistí tak, že na začátku každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacena smluvená pojistná částka, přičemž prvních n roků bude pojistná částka vyplacena, ať osoba žije nebo nežije.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** π
- ***Odvození pravděpodobnostního vzorce z rovnice ekvivalence:***
  Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot \pi = l_x + l_x \cdot v + l_x \cdot v^2 + \ldots + l_x \cdot v^{n-1} + l_{x+n} \cdot v^n + \ldots + l_\omega \cdot v^{\omega - x}$$

- Rovnici vydělíme výrazem l_x:

$$\pi = 1+v+v^2+\ldots+v^{n-1}+\frac{l_{x+n}}{l_x}\cdot v^n+\frac{l_{x+n+1}}{l_x}\cdot v^{n+1}+\ldots+\frac{l_\omega}{l_x}\cdot v^{\omega-x}$$

a upravíme na

$$\pi = \frac{1-v^n}{1-v} +_n p_x \cdot v^n +_{n+1} p_x \cdot v^{n+1} + \ldots +_{\omega-x} p_x \cdot v^{\omega-x}$$

A odtud dostáváme

$$\pi = \frac{1-v^n}{1-v} + \sum_{k=n}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot v^k$$

- ***Výpočet π pomocí komutačních čísel:***

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{1-v^n}{1-v} + \sum_{k=n}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k \\
&= \frac{1-v^n}{1-v} + \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + \dots D_{\omega}}{D_x} \\
&= \frac{1-v^n}{1-v} + \frac{N_{x+n}}{D_x} \\
&= \ddot{a}_{\overline{n|}} + {}_{n|}\ddot{a}_x
\end{aligned}$$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod. Kolik bude dostávat na začátku každého roku, pokud chce garanci vyplácení prvních 15 let?

Doživotní předlhůtní důchod rostoucí lineárně

- x-letá osoba se pojistí tak, že pokud je naživu, jí bude vyplacena 1. rok smluvená pojistná částka, 2. rok dvojnásobek této částky, atd.
- ***Označení jednotkové počáteční hodnoty:*** $(I\ddot{a})_x$
- ***Odvození pravděpodobnostního vzorce z rovnice ekvivalence:***
  Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot (I\ddot{a})_x = l_x + 2 \cdot l_{x+1} \cdot v + 3 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 + \ldots + (\omega - x + 1) \cdot l_\omega \cdot v^{\omega - x}$$

- Rovnici vydělíme výrazem l_x:

$$(I\ddot{a})_x = \frac{l_x}{l_x} + 2 \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + ... + (\omega - x + 1) \cdot \frac{l_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega - x}$$

a upravíme na

$$(I\ddot{a})_x = {}_0 p_x + 2 \cdot {}_1 p_x \cdot v + ... + (\omega - x + 1) \cdot {}_{\omega - x} p_x \cdot v^{\omega - x}$$

A odtud dostáváme

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega - x} (1 + k) \cdot {}_k p_x \cdot v^k$$

- ***Výpočet*** $(I\ddot{a})_x$ ***pomocí komutačních čísel:***

$$
\begin{aligned}
(I\ddot{a})_x &= \sum_{k=0}^{\omega-x}(k+1)\frac{l_{x+k}}{l_x}\cdot v^k \\
&= \frac{D_x + 2\cdot D_{x+1} + \dots + (\omega - x + 1)\cdot D_\omega}{D_x} \\
&= \frac{S_x}{D_x}
\end{aligned}
$$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod, přičemž pojistná částka má růst lineárně vždy o stejnou částku. Kolik bude první pojistná částka? Kolik bude 5. pojistná částka?

Obsah

Področní důchody

- V praxi se vyplácejí mnohem častěji než roční důchody.
- Vyplácí se m-krát ročně.
- Uplatňuje se zde področní úročení.
- Pracuje se opět s jednotkovými počátečními hodnotami področních důchodů, kdy se m-krát ročně vyplácí částka $\frac{1}{m}$, tedy dohromady za rok jednotková hodnota.
- Např.pro jednotkovou počáteční hodnotu področního předlhůtního doživotního důchodu s platbami na začátku jednotlivých měsíčních období platí

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot {}_{\frac{k}{m}} p_x \cdot v^{\frac{k}{m}}.$$

- V praxi se používají aproximace vycházející z nepodročních hodnot.
- Je možné využít **Woolhouseův vzorec** pro diferencovatelnou funkci u_t:

$$u_0 + u_{\frac{1}{m}} + \ldots + u_{\frac{km}{m}} \approx m \cdot (u_0 + u_1 + \ldots + u_k) - \\ -\frac{m-1}{2} \cdot (u_0 + u_k) - \frac{m^2-1}{12} \cdot (u'_k - u'_0) \\ -\frac{m^4-1}{720} \cdot (u'''_k - u'''_0).$$

- Za předpokladu, že zanedbáme členy s derivacemi a přihlédneme k limitnímu vztahu ${}_tp_x \cdot v^t \to 0$ pro $t \to \infty$ podle tohoto vzorce můžeme psát

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot {}_{\frac{k}{m}} p_x \cdot v^{\frac{k}{m}} \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x \cdot v^k - \frac{m-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot {}_0 p_x + 0\right) \\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}.\end{aligned}$$

- Podobně se dají odvodit i ostatní vzorce.

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod vyplácený každý měsíc. Jak vysoká bude vyplácená měsíční částka?

Reference

- Červinek P.:
  Pojistná matematika I,
  Masarykova univerzita, 2008
- Cipra T.:
  Pojistná matematika- Teorie a praxe,
  Ekopress, 1999
- Čámský F. :
  Pojistná matematika v životním a neživotním pojištění
  Masarykova univerzita, 2004