Pojistná matematika

Pojištění s pevnou dobou výplaty, běžné netto pojistné, všeobecná rovnice ekvivalence

Silvie Kafková

2015

Obsah

Obsah

Běžné netto pojistné

Z hlediska pojistného můžeme uvažovat následující situace

- ***Jednorázové pojistné -*** placené při uzavření smlouvy.
- ***Běžné pojistné -*** placené v pravidelných splátkách. Jedná se o splátky stejné výše placené vždy na počátku pravidelných pojistných období (roční, področní).
- ***Označení běžného netto pojistného:*** P, případně P_x, pokud budeme chtít zdůraznit, že jde o $x-$ letou osobu.

Výpočet běžného netto pojistného

- Předpokládejme hodnotu pojištění π.
- Zákazník si ale přeje platit pojistné m roků ročními předlhůtními splátkami.
- Platí, že $m \leq n$, kde n je doba trvání pojištění.
- Výše předlhůtní splátky je P.
- Vyjdeme opět z rovnice ekvivalence

$$\textit{přijaté jednorázové pojistné } \pi =$$
$$= \textit{ součet ročních pojistných přijatých od žijících osob}$$

- To lze matematicky zapsat jako

$$\pi \cdot l_x = P \cdot l_x + P \cdot l_{x+1} \cdot v + ... + P \cdot l_{x+m-1} \cdot v^{m-1}$$

- Rovnici vynásobíme výrazem v^x a přejdeme ke komutačním číslům

$$\pi \cdot D_x = P \cdot D_x + P \cdot D_{x+1} + ... + P \cdot D_{x+m-1}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \pi \cdot D_x &= P \cdot (N_x - N_{x+m}) \\ P &= \frac{\pi}{\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}} \end{aligned}$$

- A tedy

$$P = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}}$$

- Podobně se dají odvodit i vzorce pro ostatní pojištění
- Jestliže platíme běžně po dobu kratší než je doba trvání pojištění, tj. $m < n$, označujeme pojistné ${}_{|m}P$.

Příklad

Odvoďte vzorec na výpočet netto pojistného na pojištění $x-$leté osoby na dožití se věku $(x+n)$ běžně placeného m let, přičemž $m \leq n$.

Příklad

$40-$ti letá osoba uzavře pojištění pro případ smrti na dobu 5 roků a pojistnou částku 100000 Kč. Jak vysoké by bylo jednorázové pojistné? Jak vysoké by bylo běžné pojistné, pokud by doba placení byla také 5 roků?

Področní běžné netto pojistné

- Zákazník platí pojistné vícekrát do roka, obecně $m-$ krát za rok.
- $P_x^{(m)}$ označujeme ***roční pojistné placené*** $m-$***krát ročně :*** ve výši $\frac{P_x^{(m)}}{m}$.
- Rozlišujeme
  - ***pravé področní pojistné:*** platí $P_x < P_x^{(m)}$. Doživotně placené področní běžné pojistné vypočteme jako $P_x^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_x^{(m)}}$ a pro dočasné placení trvající n roků $P_x^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)}}$
  - ***nepravé področní pojistné:*** počítá se z ročního pjistného vydělením počtem splátek, tedy $\frac{P}{m}$. Pak si pojišťovny účtují přirážku.

Obsah

Pojištění s pevnou dobou výplaty

- Pojišťovna vyplatí sjednanou pojistnou částku na konci pojistné doby n bez ohledu na to, zda osoba pojištěná ve věku x žije.
- Toto pojištění se uzavírá obvykle jako běžné.
- V případě smrti pojištěného před uplynutím pojistné doby trvá pojištění dál, jako by pojišťovna na sebe převzala povinnost placení pojistného.

- ***Označení:*** P_x
- Jednorázové pojistné:

$$\pi_x = v^n$$

výplata jednotkové pojistné částky za n let je jistá. Nezávisí na vstupním věku x.

- Běžné pojistné:

$$P_x = \frac{\pi_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} = \frac{v^n \cdot D_x}{N_x - N_{x+n}}$$

Příklad

50-ti letá osoba uzavřela pojištění s pevnou dobou výplaty na 10 let na pojistnou částku 100000 Kč. Vypočítejte běžné netto pojistné.

Obsah

Hodnota pojištění

- Nárok pojištěného vůči pojišťovně označíme pomocí uspořádané dvojice $(\eta;\xi)$, kde η a ξ jsou konečné posloupnosti nezáporných čísel

$$\eta = \{\eta_j;\ j = 0, 1, \cdots, \omega - x\}$$

$$\xi = \{\xi_j;\ j = 0, 1, \cdots, \omega - x\},$$

kde

  - hodnota η_j je rovna pojistné částce při dožití se věku $x + j$
  - hodnota ξ_j je rovna pojistné částce při úmrtí ve věku $x + j$.

Hodnota pojištění

- **Hodnotu nároků** $(\eta;\xi)$ **pojištěného ve věku** x **vůči pojišťovně** můžeme vyjádřit jako

$$H_x(\eta;\xi) = \frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{\omega-x}\eta_j \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{\omega-x}\xi_j \cdot C_{x+j}.$$

- Platí

$$H_x(\eta;\xi) = \pi_x.$$

- Tedy hodnota nároků pojištěného ve věku x vůči pojišťovně je jednorázovým netto pojistným (počáteční hodnota pojištění).
- Jedná se o **všeobecný vzorec pro výpočet jednorázového netto pojistného.**

Hodnota pojištění

Odvození vzorců na výpočet jednorázového netto pojistného:

- Pojištění na dožití:

$$\eta_j = \begin{cases} 1; & j = n \\ 0; & j \neq n \end{cases} \qquad j \in \{0, 1, ..., \omega - x\}$$

$$\xi_j = 0; \qquad j \in \{0, 1, ..., \omega - x\}$$

- Pak můžeme psát

$$H_x(\eta, \xi) = \frac{1}{D_x} \cdot D_{x+n} + \frac{1}{D_x} \cdot 0 = \frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_n E_x.$$

Hodnota pojištění

- Smíšené pojištění na dobu n let

$$\eta_j = \begin{cases} 1; & j = n \\ 0; & j \neq n \end{cases} \quad j \in \{0, 1, ..., \omega - x\}$$

$$\xi_j = \begin{cases} 1; & j = 0, 1, ..., n-1 \\ 0; & j = n, n+1, ..., \omega - x \end{cases}$$

Hodnota pojištění

- Pak můžeme psát

$$
\begin{aligned}
H_x(\eta,\xi) &= \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=n}^{n} 1\cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{n-1} 1\cdot C_{x+j} \\
&= \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} \\
&= \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x} = A_{x\overline{n}|}.
\end{aligned}
$$

Hodnota pojištění

- Dočasný předlhůtní důchod vyplácený n roků

$$\eta_j = \begin{cases} 1; & j = 0, 1, ..., n-1 \\ 0; & j = n, n+1, ..., \omega - x \end{cases}$$
$$\xi_j = 0 \quad j \in \{0, 1, ..., \omega - x\}$$

- Pak hodnotu můžeme počítat jako

$$\begin{aligned} H_x(\eta, \xi) &= \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} 1 \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x} 0 \cdot C_{x+j} \\ &= \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\ &= \ddot{a}_{x\overline{n}|} \end{aligned}$$

Příklad

30-ti letá osoba se chce zabezpečit předlhůtním doživotním důchodem, který by začal výplatou 10 000 Kč ve věku 50 let a každý rok by rostl o 1 000 Kč. Pokud zemře, chce, aby pozůstalí dostali na pohřeb 50 000 Kč. Jaká je hodnota nároků (pojistné)?

Všeobecná rovnice ekvivalence

- Při výpočtu běžného pojistného můžeme postupovat podobně jako u výpočtu hodnoty pojištění.
- Jednotlivé splátky běžného netto pojistného se diskontují k okamžiku uzavření pojištění.
- Pak na jednotlivé splátky běžného netto pojistného můžeme pohlížet jako na pojistné plnění, které vyplácí pojištěný pojišťovně.
- Nároky pojišťovny vůči pojištěnému označme jako konečnou posloupnost nezáporných čísel

$$\varphi = \{\varphi_j;\ j = 0, 1, ..., \omega - x\}.$$

Všeobecná rovnice ekvivalence

- Hodnotu nároků φ pojišťovny vůči pojištěnému ve věku x můžeme napsat jako

$$H_x(\varphi) = \frac{1}{D_x} \sum_{j=0}^{\omega-x} \varphi_j \cdot D_{x+j},$$

  kde φ_j je výše pojistného, které zaplatíme na začátku $(j+1)$. roku pojištění, což nám umožňuje platit pojistné v různé výši.
- Běžné netto pojistné je možné platit dvěma způsoby:
  - doživotně,
  - dočasně.

Všeobecná rovnice ekvivalence

- Doživotně placené běžné netto pojistné v konstantní výši P

$$\varphi = P; \qquad j \in \{0, 1, ..., \omega - x\}$$

$$H_x(\varphi) = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega - x} P \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \cdot P \cdot N_x = P \cdot \ddot{a}_x$$

- m roků placené běžné netto pojistné v konstantní výši ${}_{|m}P$

$$\varphi_j = \begin{cases} {}_{|m}P; & j = 0, 1, ..., m-1 \\ 0; & j = m, m+1, ...\omega - x \end{cases}$$

$$H_x(\varphi) = \frac{1}{D_x} \sum_{j=0}^{m-1} {}_{|m}P \cdot D_{x+j} = {}_{|m}P \cdot \ddot{a}_{x\overline{m|}}$$

Všeobecná rovnice ekvivalence

- Běžné netto pojistné určíme na základě principu ekvivalence takto:

$$H_x(\varphi) = H_x(\eta, \xi)$$

- Všeobecný vzorec na výpočet běžného netto pojistného tedy je:

$$\frac{1}{D_x} \sum_{j=0}^{\omega-x} \varphi_j \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \sum_{j=0}^{\omega-x} \eta_j \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x} \sum_{j=0}^{\omega-x} \xi_j \cdot C_{x+j}$$

Všeobecná rovnice ekvivalence

Aplikace vzorce pak může vypadat takto:

- m **roků běžně placené pojištění na dožití (**n **let)**

$$\eta_j = \begin{cases} 1; & j = n \\ 0; & j \neq n \end{cases} \quad j \in \{0, 1, \dots, \omega - x\};$$

$$\xi_j = 0; \quad j \in \{0, 1, \dots, \omega - x\}$$

$$\varphi_j = \begin{cases} {}_{|m}P; & j = 0, 1, \dots, m-1 \\ 0; & j = m, m+1, \dots, \omega - x \end{cases}$$

Všeobecná rovnice ekvivalence

m roků běžně placené pojištění na dožití (n let)

- Označíme

$$ {}_{|m}P({}_nE_x) = {}_{|m}P $$

- Pak můžeme psát

$$ \frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{m-1} {}_{|m}P \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \cdot D_{x+n} + \frac{1}{D_x} \cdot 0 $$

- A tedy

$$ {}_{|m}P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} $$

Všeobecná rovnice ekvivalence

Jednorázové smíšené pojištění na dobu n let

$$\eta_j = \begin{cases} 1; & j = n \\ 0; & j \neq n \end{cases} \quad j \in \{0, 1, \ldots, \omega - x\};$$

$$\xi_j = \begin{cases} 1; & j = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 0; & j = n, n+1, \ldots, \omega - x \end{cases}$$

$$\varphi_j = \begin{cases} A_{x\overline{n}|}; & j = 0 \\ 0; & j = 1, 2, \ldots, \omega - x \end{cases}$$

Všeobecná rovnice ekvivalence

Jednorázové smíšené pojištění na dobu *n* let

- Pak můžeme psát

$$\frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{0} A_{x\overline{n}|}\cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=n}^{n} 1\cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{n-1} 1\cdot C_{x+j}$$

- Odtud

$$\frac{1}{D_x}\cdot A_{x\overline{n}|}\cdot D_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

- A tedy

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Příklad

30-ti letá osoba se chce zabezpečit předlhůtním doživotním důchodem, který by začínal výplatou 10 000 Kč ve věku 50 let a každý rok by rostl o 1 000 Kč. Pokud zemře, chce, aby pozůstalí dostali na pohřeb 50 000 Kč. Pojistné chce platit 10 let. Jak vysoké je běžné pojistné?

Reference

- Červinek P.:
  Pojistná matematika I,
  Masarykova univerzita, 2008
- Cipra T.:
  Pojistná matematika- Teorie a praxe,
  Ekopress, 1999
- Čámský F. :
  Pojistná matematika v životním a neživotním pojištění
  Masarykova univerzita, 2004