Cvičení 4.: Testy normality, parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z normálního rozložení

Úkol 1.: U 45 studentek VŠE v Praze byla zjišťována výška a obor studia (1 – národní hospodářství, 2 – informatika). Hodnoty jsou uloženy v souboru vyska.sta. Pomocí Lilieforsovy modifikace K-S testu, pomocí S-W testu a pomocí A-D testu testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že data pocházejí z normálního rozložení. Pomocí N-P grafu posuďte vizuálně předpoklad normality.

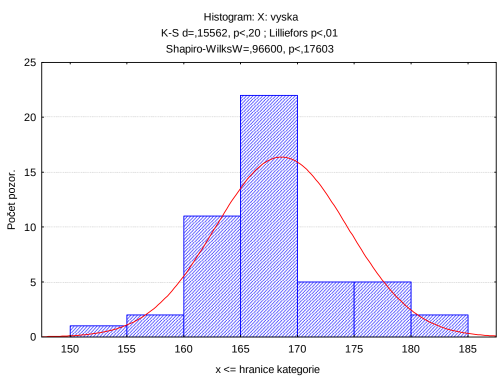
Návod:
1. způsob provedení Lilieforsova a S-W testu: Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Tabulky četností – OK – Proměnné X – OK – Normalita – zaškrtneme Lilieforsův test a S-W test – Testy normality.

Proměnná	Testy normality (vyska.sta) N	max D	Lilliefors p	W	p
X: vyska	48	0,155621	p < ,01	0,965996	0,176031

Výstupní tabulka obsahuje počet pozorování, hodnotu testové statistiky Lilieforsovy modifikace K-S testu (max D = 0,155621), p-hodnotu (p < 0,01), testovou statistiku S-W testu (W = 0,965996) a odpovídající p-hodnotu (p = 0,176031). Vidíme, že Lilieforsův test zamítá hypotézu o normalitě na hladině významnosti 0,05, zatímco S-W test nikoli.

2. způsob provedení Lilieforsova a S-W testu: Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Normalita – zaškrtneme K-S test & Lilieforsův test a S-W test – Tabulky četností (nebo Histogram).

Kategorie	Tabulka četností:X: vyska (vyska.sta) K-S d=,15562, p<,20 ; Lilliefors p<,01 Shapiro-WilksW=,96600, p<,17603 Četnost	Kumulativní četnost	Rel.četn. (platných)	Kumul. % (platných)	Rel.četn. všech	Kumul. % všech
150,0000<x<=155,0000	1	1	2,08333	2,0833	2,08333	2,0833
155,0000<x<=160,0000	2	3	4,16667	6,2500	4,16667	6,2500
160,0000<x<=165,0000	11	14	22,91667	29,1667	22,91667	29,1667
165,0000<x<=170,0000	22	36	45,83333	75,0000	45,83333	75,0000
170,0000<x<=175,0000	5	41	10,41667	85,4167	10,41667	85,4167
175,0000<x<=180,0000	5	46	10,41667	95,8333	10,41667	95,8333
180,0000<x<=185,0000	2	48	4,16667	100,0000	4,16667	100,0000
ChD	0	48	0,00000		0,00000	100,0000



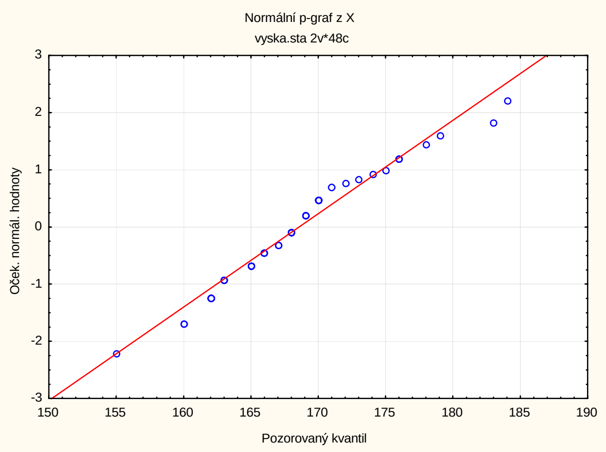
V tomto případě dostaneme v záhlaví tabulky či histogramu stejné informace jako pomocí předešlého způsobu.

Provedení A - D testu:
Statistiky – Rozdělení & simulace – proložení dat rozděleními – OK – Proměnné Spojité: X – na záložce Spojité proměnné ponecháme zaškrtnuté pouze Normální, na záložce Možnosti vybereme Anderson – Darling – OK – Souhrnné statistiky rozdělení.

	Souhrn rozdělení for Proměnná: X (vyska.sta)			
	K-S d	K-S p-hodn.	AD stat.	AD p-hodn.
Normální (poloha,měřítko)	0,155621	0,175802	0,660990	0,591425

Testová statistika A – D testu je 0,66099, odpovídající p-hodnota je 0,5914, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Grafické ověření normality pomocí N-P grafu – viz úkol 8 ve cvičení 1.



Upozornění: Při vytváření N-P plotu lze zaškrtnout volbu Shapiro- Wilkův test a pak současně s grafem obdržíme i hodnotu testové statistiky a p-hodnotu.

Samostatný úkol: Testy normality a grafické ověření normality proveďte jak pro výšky studentek oboru národní hospodářství, tak pro výšku studentek oboru informatiky.
Pro kontrolu:
Výsledky Lilieforsova testu a S-W testu pro obor národní hospodářství:

	Testy normality (vyska.sta) Zhrnout podmínku: z=1				
Proměnná	N	max D	Lilliefors p	W	p
X: vyska	28	0,167473	p < ,05	0,970969	0,606793

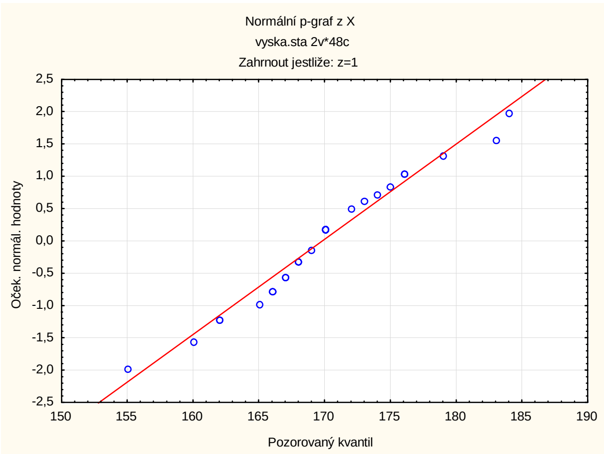
Vidíme, že Lilieforsova varianta K-S testu zamítá hypotézu o normalitě na hladině významnosti 0,05 (p-hodnota je menší než 0,05), zatímco S-W test hypotézu o normalitě nezamítá (p-hodnota je větší než 0,05).

Výsledky A-D testu pro obor národní hospodářství:

	Souhrn rozdělení for Proměnná: X (vyska.sta) Zhrnout podmínku: z=1			
	K-S d	K-S p-hodn.	AD stat.	AD p-hodn.
Normální (poloha,měřítko)	0,167473	0,370570	0,419238	0,828398

Testová statistika A – D testu je 0,4193, odpovídající p-hodnota je 0,8284, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

N-P plot pro obor národní hospodářství:



Výsledky Lilieforsova testu a S-W testu pro obor informatika:

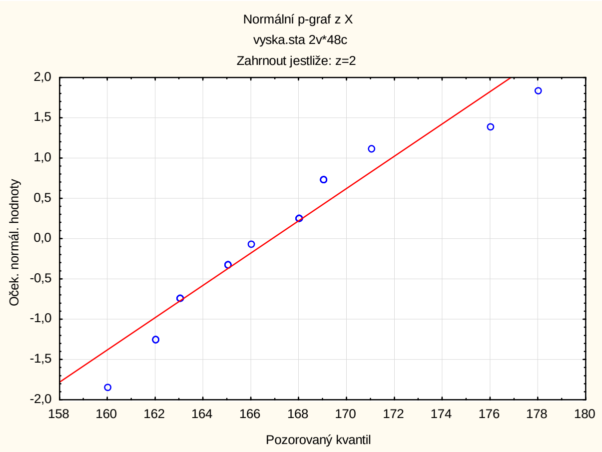
Proměnná	Testy normality (vyska.sta) Zhrnout podmínku: z=2				
	N	max D	Lilliefors p	W	p
X: vyska	20	0,172301	p < ,15	0,922747	0,111924

Vidíme, že Lilieforsova varianta K-S testu ani S-W test nezamítají hypotézu o normalitě na hladině významnosti 0,05 (v obou případech je p-hodnota je větší než 0,05).
Výsledky A-D testu pro obor informatika:

	Souhrn rozdělení for Proměnná: X (vyska.sta) Zhrnout podmínku: z=2			
	K-S d	K-S p-hodn.	AD stat.	AD p-hodn.
Normální (poloha,měřítko)	0,172301	0,536360	0,566019	0,678546

Testová statistika A – D testu je 0,5660, odpovídající p-hodnota je 0,6785, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

N-P plot pro obor informatika:



Úkol 2.: Vlastnosti výběrového průměru z normálního rozložení

Předpokládejme, že velký ročník na vysoké škole má výsledky ze statistiky normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 bodů se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Najděte pravděpodobnost, že průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude větší než 80 bodů.

Návod:

$X_1, \ldots, X_{10}$ je náhodný výběr z N(72, 81). Počítáme P(M > 80), přičemž výběrový průměr M má normální rozložení se střední hodnotou E(M) = μ = 72 a rozptylem D(M) $= \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{81}{10} =$ 8,1 (viz skripta Základní statistické metody, věta 6.1.1.1., bod 2).

Tedy P(M > 80) = 1 - P(M ≤ 80) = 1 – Φ(80), kde Φ(80) je hodnota distribuční funkce rozložení N(72; 8,1) v bodě 80.

Vytvoříme datový soubor o jedné proměnné a o jednom případu. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme =1 – INormal(80;72;sqrt(8,1)). Zjistíme, že 1 - Φ(80) = 0,00247005.

Funkce INormal(x;μ;σ) počítá hodnotu distribuční funkce rozložení $N(\mu,\sigma^2)$ v bodě x.

	1 Prom1
1	0,00247

Úkol 3.: Intervaly spolehlivosti pro parametry μ, σ^2 **normálního rozložení**

Z populace stejně starých selat téhož plemene bylo vylosováno šest selat a po dobu půl roku jim byla podávána táž výkrmná dieta. Byly zaznamenávány průměrné denní přírůstky hmotnosti v Dg. Z dřívějších pokusů je známo , že v populaci mívají takové přírůstky normální rozložení, avšak střední hodnota i rozptyl se měnívají. Přírůstky v Dg: 62, 54, 55, 60, 53, 58.

a) Najděte 95% empirický levostranný interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ při neznámé směrodatné odchylce σ.
b) Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku σ.

Návod:

Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné X a 6 případech. Do proměnné X napíšeme dané hodnoty.

Ad a) Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. (ostatní volby zrušíme) – pro jednostranný interval změníme hodnotu na 90,00 - Výpočet. (Hodnotu změníme na 90, protože dolní mez levostranného 95% intervalu spolehlivosti pro μ je stejná jako dolní mez oboustranného 90% intervalu spolehlivosti pro μ.)

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka1) Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000
X	54,05683	59,94317

Vidíme, že $\mu > 54{,}06$ Dg s pravděpodobností aspoň 0,95.

Ad b) Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze sp. směr. odch., ponecháme implicitní hodnotu 95,00 – Výpočet.

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka1) Spolehlivost Sm.Odch. -95,000%	Spolehlivost Sm.Odch. +95,000%
X	2,233234	8,774739

Dostáváme výsledek: $2{,}23$ g $< \sigma <$ $8{,}77$ g s pravděpodobností aspoň 0,95.

Úkol 4.: Testování hypotézy o parametru μ normálního rozložení

Systematická chyba měřicího přístroje se eliminuje nastavením přístroje a měřením etalonu, jehož správná hodnota je $\mu = 10{,}00$. Nezávislými měřeními za stejných podmínek byly získány hodnoty: 10,24 10,12 9,91 10,19 9,78 10,14 9,86 10,17 10,05, které považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 9 z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Je možné při riziku 0,05 vysvětlit odchylky od hodnoty 10,00 působením náhodných vlivů?

Návod:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu H_0: $\mu = 10$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu \neq 10$. Jde o úlohu na jednovýběrový t-test. Ten je ve STATISTICE implementován. Otevřeme datový soubor mereni_etalonu.sta. V Základních statistikách/tabulkách vybereme t-test, samostatný vzorek. Do Referenčních hodnot zapíšeme 10. Ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu. Pokud p-hodnota bude menší nebo rovna 0,05, zamítneme hypotézu H_0: $\mu = 10$ ve prospěch oboustranné alternativní hypotézy H_1: $\mu \neq 10$ na hladině významnosti 0,05. V opačném případě H_0 nezamítáme. V našem případě je

Proměnná	Test průměrů vůči referenční konstantě (hodnotě) Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
Prom1	10,05111	0,162669	9	0,054223	10,00000	0,942611	8	0,373470

Protože p-hodnota 0,373470 > 0,05 nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Odchylky od hodnoty 10 můžeme vysvětlit působením náhodných vlivů.
Všimněme si ještě hodnoty testového kriteria: $t_0 = 0{,}942611$. Kritický obor

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(8)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(8), \infty\right) =$$

$$= \left(-\infty, -2{,}306\right\rangle \cup \left\langle 2{,}306, \infty\right)$$

Protože $t_0 \notin W$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 .

Úkol 5.: Interval spolehlivosti pro rozdíl parametrů $\mu_1 - \mu_2$ dvourozměrného rozložení
Bylo vylosováno 6 vrhů selat a z nich vždy dva sourozenci. Jeden z nich vždy dostal náhodně dietu č. 1 a druhý dietu č. 2. Přírůstky v Dg jsou následující: (62,52), (54,56), (55,49), (60,50), (53,51), (58,50). Za předpokladu, že rozdíly uvedených dvojic tvoří náhodný výběr z normálního rozložení se střední hodnotou $\mu_1 - \mu_2$, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot.

Návod:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky, do proměnné v3 uložíme rozdíly v1 - v2.
Ve STATISTICE je implementován výpočet oboustranného intervalu spolehlivosti pro μ, když σ^2 neznáme. Pomocí Popisných statistik zjistíme meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu proměnné v3 tak, že zaškrtneme Meze spoleh. prům.

Proměnná	Popisné statistiky Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%
Prom3	0,626461	10,70687

Dostaneme výsledek: 0,63 Dg < μ < 10,71 Dg s pravděpodobností aspoň 0,95.

Úkol 6.: Testování hypotézy o rozdílu parametrů $\mu_1 - \mu_2$ dvourozměrného rozložení
Pro data z úkolu 5. testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že obě výkrmné diety mají stejný vliv.

Návod:

Označme $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu H_0: $\mu = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu \neq 0$. Jde o úlohu na párový t-test. Ten je ve STATISTICE implementován.Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky. V menu Základní statistiky/tabulky vybereme t-test, závislé vzorky. Zadáme názvy obou proměnných a ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu.

Proměnná	t-test pro závislé vzorky Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000 Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílu	t	sv	p
Prom1	57,00000	3,577709						
Prom2	51,33333	2,503331	6	5,666667	4,802777	2,890087	5	0,034183

Protože p-hodnota 0,034183 < 0,05, zamítáme hypotézu H_0: $\mu = 0$ ve prospěch alternativní hypotézy H_1: $\mu \neq 0$ na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že jsme s rizikem omylu nejvýše 5% prokázali rozdíl v účinnosti obou výkrmných diet.
Všimněme si ještě hodnoty testového kriteria: $t_0 = 2,890087$. Kritický obor

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(5)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(5), \infty\right) =$$

$$= \left(-\infty, -2,5706\right\rangle \cup \left\langle 2,5706, \infty\right)$$

Protože $t_0 \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0.

Příklady k samostatnému řešení

Příklad 1.: Měřením délky deseti válečků byly získány hodnoty (v mm): 5,38 5,36 5,35 5,40 5,41 5,34 5,29 5,43 5,42 5,32. Těchto deset hodnot považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 10 z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Jsou uloženy v souboru valecky.sta.

a) Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ
b) Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou směrodatnou odchylku σ.
c) Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že střední hodnota délky válečků je 5,3 mm proti oboustranné alternativě.

Výsledky:
ad a)
5,3228 mm $< \mu <$ 5,4172 mm s pravděpodobností aspoň 0,99
ad b)
0,0284 mm $< \sigma <$ 0,1046 mm s pravděpodobností aspoň 0,99.
ad c) Testujeme H_0: $\mu = 5{,}3$ proti H_1: $\mu \neq 5{,}3$ na hladině významnosti 0,01. Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,01 a přijímáme alternativní hypotézu.

Příklad 2.: Bylo náhodně vybráno 15 desetiletých chlapců a byla zjištěna jejich výška (v cm). Výsledky měření 130, 140, 136, 141, 139, 133, 149, 151, 139, 136, 138, 142, 127, 139, 147 považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 15 z rozložení $N(\mu,\sigma^2)$. Jsou uloženy v souboru vysky_chlapcu.sta.
Podle názoru odborníků by střední hodnoty výšky desetiletých chlapců měla být 136,1 cm. Testujte tuto hypotézu na hladině významnosti 0,05.
Pomocí N-P plotu a S-W testu ověřte normalitu dat.
Výsledky:
S-W test poskytl p-hodnotu 0,7998, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Dále testujeme H_0: $\mu = 136{,}1$ proti H_1: $\mu \neq 136{,}1$ na hladině významnosti 0,05. Protože $p = 0{,}0947 > 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 3.: Pět mužů se rozhodlo, že budou hubnout. Zjistili svou hmotnost před zahájením diety a po ukončení diety.

Číslo osoby	1	2	3	4	5
Hmotnost před dietou	84	77,5	91,5	84,5	97,5
Hmotnost po dietě	78,5	73,5	88,5	80	97

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že dieta neměla vliv na hmotnost.
Výsledky:
Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Testová statistika nabývá hodnoty 4,1105, odpovídající p-hodnota je 0,0147, tedy nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% jsme tedy prokázali, že dieta má vliv na střední hodnotu hmotnosti.