

Dodatek: Základní poznatky o markovských řetězcích se spojitým časem

Definice markovského řetězce se spojitým časem

Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor,

$T = \langle 0, \infty \rangle$ je indexová množina, jejíž prvky nazveme okamžiky a

$J = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ je nejvýše spočetná množina stavů (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ nebo $J = \{0, 1, \dots, n\}$).

Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ definovaný na měřitelném prostoru (Ω, \mathcal{A}) , jehož složky X_t nabývají hodnot z množiny stavů J , se nazývá **markovský řetězec** (se spojitým časem), jsou-li splněny následující podmínky:

a) $\forall j \in J \exists t \in T : P(X_t = j) > 0$ (vyloučení nepotřebných stavů)

b) $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T \forall j_0, j_1, \dots, j_n \in J : P(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_{t_0} = j_0) = P(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1})$

za předpokladu, že $P(X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \dots \wedge X_{t_0} = j_0) > 0$ (markovská vlastnost – budoucí chování markovského řetězce závisí pouze na přítomném stavu a nikoliv na stavech minulých).

Vysvětlení: Markovské řetězce se spojitým časem modelují fyzikální či jiné soustavy, které mohou v libovolném okamžiku náhodně přejít do některého ze svých možných stavů.

Markovská vlastnost znamená, že to, do jakého stavu se soustava dostane při následující změně, závisí pouze na tom, v jakém stavu se soustava právě nachází a nezávisí na stavech předchozích.

Např. sledujeme-li během pracovní doby provoz automatických strojů v dílně, náhodná veličina X_t , $t \in \langle 0, T \rangle$ je počet strojů, které v okamžiku t nepracují (jsou opravovány nebo čekají na opravu).

Označení:

Jev $\{X_t = j\}$ – markovský řetězec je v okamžiku t ve stavu j .

$P(X_t = j) = p_j(t)$ – absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku t .

$\mathbf{p}(t) = (\dots, p_j(t), \dots)$ – **vektor absolutních pravděpodobností**.

$P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(t, t+h)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku t do stavu j

v okamžiku $t+h$ $\mathbf{P}(t, t+h) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(t, t+h) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ – **matice pravděpodobností přechodu mezi**

okamžiky $t, t+h$.

$P(X_0 = j) = p_j(0)$ – počáteční pravděpodobnost stavu j .

$\mathbf{p}(0) = (\dots, p_j(0), \dots)$ – **vektor počátečních pravděpodobností**.

Definice HMŘ se spojitým časem

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec se spojitým časem. Řekneme, že tento řetězec je **homogenní**, jestliže platí:

$$\forall i, j \in J \forall t, h \in T: P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(h).$$

Vysvětlení: Znamená to, že pravděpodobnosti přechodu $P(X_{t+h} = j / X_t = i)$ – pokud existují – závisí pouze na časovém přírůstku h a nezávisí na časovém okamžiku t .

Matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(t, t+h)$ se pak značí $\mathbf{P}(h)$ a nazývá se **matice přechodu za časový přírůstek h** . Pro HMŘ se spojitým časem tedy existuje celý systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Je zvykem definovat $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$.

Vlastnosti HMŘ se SČ (CH-K rovnice a zákon evoluce)

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, s vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$ a systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Pak pro $\forall h, g \in T$ platí:

a) $\mathbf{P}(h+g) = \mathbf{P}(h) \mathbf{P}(g)$ (Chapmanova – Kolmogorovova rovnice)

b) $\mathbf{p}(h) = \mathbf{p}(0) \mathbf{P}(h)$ (zákon evoluce)

Definice matice intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem se systémem matic přechodu $\{P(h), h \in T\}$. Pak definujeme:

$$\text{a) } \forall i, j \in J: q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} - \text{intenzita přechodu ze stavu } i \text{ do stavu } j$$

$$\text{b) } \forall i \in J: q_i = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} - \text{intenzita výstupu ze stavu } i.$$

Matice $Q = (q_{ij})_{i,j \in J}$, kde $q_{ii} = -q_i$, se nazývá **matice intenzit přechodu** HMŘ se spojitým časem.

Vysvětlení: Matice Q je charakterizována tím, že $q_{ij} \geq 0$ pro $i \neq j$ a $q_{ii} < 0$ a součet prvků v každém řádku je nulový. Je to **kvazistochastická matice**.

Matici intenzit přechodu lze graficky vyjádřit pomocí **přechodového diagramu**. Je to ohodnocený orientovaný graf, kde

a) vrcholy jsou stavy, b) hrany odpovídají nenulovým intenzitám přechodu

c) ohodnocení hran je rovno těmto intenzitám. Hrany, které nejsou smyčkami, mají kladné ohodnocení ($q_{ij} > 0$) a smyčky mají záporné ohodnocení ($q_{ii} < 0$).

Definice stacionárního vektoru HMŘ se SČ

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$. Stochastický vektor \mathbf{a} takový, že pro $\forall t \in T$ platí $\mathbf{a} = \mathbf{aP}(t)$, se nazývá **stacionární vektor** (**stacionární rozložení**) daného řetězce.

Výpočet stacionárního vektoru pomocí matice intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$ a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$.

Jestliže existuje $t \in T$ tak, že matice $\mathbf{P}(t)$ je regulární (tj. všechny její prvky jsou kladné), pak existuje stacionární vektor daného řetězce a je dán vztahem: $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$. Toto řešení je jediné.

Kolmogorovovy systémy a systém evolučních diferenciálních rovnic

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má systém matic přechodu $\{P(t); t \in T\}$, systém vektorů absolutních pravděpodobností $\{p(t); t \in T\}$, vektor počátečních pravděpodobností $p(0)$ a matici intenzit přechodu Q . Pak platí:

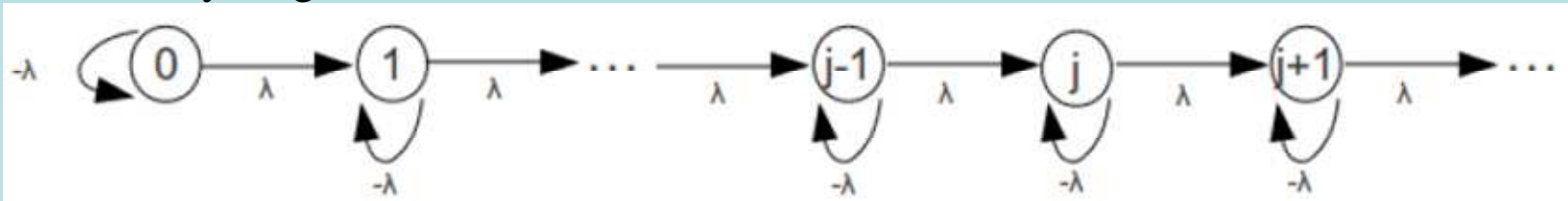
- a) $P'(t) = P(t)Q$ s počáteční podmínkou $P(0) = I$ (Kolmogorovův systém prospektivních diferenciálních rovnic)
- b) $P'(t) = QP(t)$ s počáteční podmínkou $P(0) = I$ (Kolmogorovův systém retrospektivních diferenciálních rovnic)
- c) $p'(t) = p(t)Q$ s počáteční podmínkou $p(0) =$ daný stochastický vektor (systém evolučních diferenciálních rovnic).

Definice Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda > 0 \text{ je konstanta, nazývá se } \textbf{intenzita}.$$

Přechodový diagram:



Tento HMŘ se nazývá **Poissonův proces** (s parametrem λ). (Vidíme, že v Poissonově procesu je možné jen setrvání v dosavadním stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.)

Pravděpodobnostní rozložení složek Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí:

$$\forall t \in T \forall j \in J : p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}.$$

Vysvětlení: Náhodná veličina X_t , která udává např. počet zákazníků, kteří přijdou do fronty v intervalu $(0, t)$, se řídí rozložením $Po(\lambda t)$. Střední hodnota počtu událostí, které nastanou v intervalu $(0, t)$, je rovna číslu λt , tedy konstanta λ představuje střední hodnotu počtu událostí, které nastanou za jednotkový časový interval. Proto se λ nazývá intenzita procesu.

Čísla $p_j(t)$ udávají pravděpodobnosti, že v intervalu $(0, t)$ nastalo právě j událostí.

Číslo $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost, že v intervalu $(0, t)$ nenastala žádná událost.

Označíme-li S dobu čekání na změnu mezi stavy (tj. dobu čekání na příchod události resp. dobu setrvání ve

stavu), pak $P(S > t) = e^{-\lambda t}$, tedy $P(S \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. To znamená, že je-li rozložení počtu událostí,

kteřé nastaly v intervalu $(0, t)$ Poissonovo, je rozložení doby čekání na změnu resp. doby setrvání ve stavu exponenciální.

Pravděpodobnosti přechodu v Poissonově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ . Pak platí:

$$\forall t \in T \forall i, j \in J: p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pro } j \geq i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases} .$$

Bodový a intervalový odhad parametru λ Poissonova procesu

Nechť v intervalu $\langle 0, T \rangle$ byl sledován Poissonův proces s neznámým parametrem λ a bylo pozorováno n událostí.

a) Bodový odhad parametru λ je dán vzorcem: $\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$, přičemž $E(\hat{\lambda}) = \lambda$ (tj. $\hat{\lambda}$ je nestranný

odhad) a $D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{T}$.

b) $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro λ má meze: $d = \frac{1}{2T} \chi^2_{\alpha/2}(2n)$, $h = \frac{1}{2T} \chi^2_{1-\alpha/2}(2n+2)$.

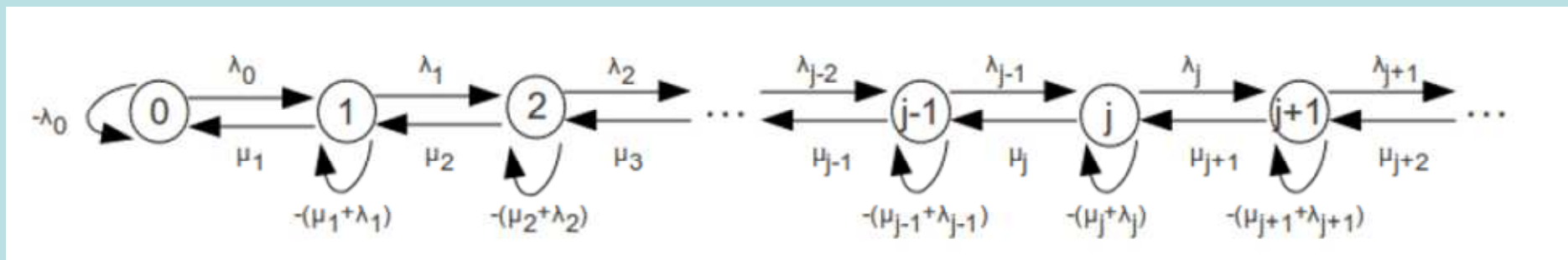
Definice procesu vzniku a zániku

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$ a matici intenzit přechodu

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda_j > 0, j=0,1,2,\dots \text{ a } \mu_j > 0, j=1,2,\dots \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **proces vzniku a zániku** (resp. množení a úmrtí).

Přechodový diagram:



Upozornění: Je zřejmé, že Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku a zániku, v němž $\mu_j = 0, j = 1, 2, \dots$ a $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots$

Vysvětlení:

Proces vzniku a zániku modeluje kolísání rozsahu souboru objektů v čase za předpokladu, že

- a)** v náhodných okamžicích vstupují do tohoto souboru nové objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t + h)$ vstoupí do souboru rozsahu j nový objekt, je $\lambda_j h + o(h)$, kde $\lambda_j > 0$ je intenzita vstupu do stavu j ;
- b)** v náhodných okamžicích vystupují z tohoto souboru jiné objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t + h)$ vystoupí ze souboru rozsahu j jeden objekt, je $\mu_j h + o(h)$, kde $\mu_j > 0$ je intenzita výstupu ze stavu j ;
- c)** vstupy a výstupy objektů jsou stochasticky nezávislé jevy;
- d)** během krátkého časového intervalu zůstává rozsah souboru týž nebo se jedničku zvětší či zmenší.