3. Exponenciální rozložení a jeho vlastnosti

3.1. Definice: Definice náhodné veličiny s exponenciálním rozložením.

3.2. Poznámka: Funkcionální a číselné charakteristiky exponenciálního rozložení

3.3. Poznámka: Dvouparametrické exponenciální rozložení

3.4. Věta: Vysvětlení, proč se exponenciální rozložení nazývá rozložením bez paměti.

3.5. Poznámka: Exponenciální rozložení je speciálním případem Erlangova rozložení.

3.6. Příklad: Výrobce žárovek jisté značky ví, že průměrná životnost jeho žárovek je 10 000 h. Přitom ke spálení žárovky může dojít k každém okamžiku se stejnou šancí bez ohledu na dobu, po kterou žárovka dosud svítila. V rámci své propagační kampaně chce garantovat dobu t, do níž se spálí maximálně 3 % žárovek. Stanovte tuto dobu t.
Řešení: Životnost žárovky je náhodná veličina X ~ Ex(λ), přičemž 1/ λ = 10 000, tj. λ = 0,0001. Nyní musíme najít dobu t tak, aby $P(X \le t) = 0{,}03$. Tedy
$$0{,}03 = P(X \le t) = \Phi(t) = 1 - e^{-0{,}0001t} \Rightarrow t = -10000 \ln 0{,}97 = 304{,}6$$

3.7. Věta: Věta o standardizovaném exponenciálním rozložení.

3.8. Věta: Věta o transformaci rovnoměrného spojitého rozložení na intervalu (0,1) na exponenciální rozložení.

3.9. Poznámka: Využití vět 3.7. a 3.8. při generování realizací náhodné veličiny s exponenciálním rozložením na počítači.

3.10. Věta: Věta o rozložení minima dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozložením.

3.11. Poznámka: Zobecnění věty 3.10.

3.12. Věta: Věta o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozložením.

3.13. Poznámka: Zobecnění věty 3.10.

3.14. Příklad: Zákazník prochází třemi nezávislými stanicemi obsluhy, přičemž v každé z nich má doba obsluhy exponenciální rozložení se střední hodnotou 1 min. Jaká je pravděpodobnost, že celková doba obsluhy nepřesáhne 2 min?
Řešení: Podle poznámky 3.13. se celková doba obsluhy Y řídí rozložením Er(3,1), tedy
$$P(Y \le 2) = \int_0^2 \frac{y^2}{2} e^{-y} dy = \ldots = 0{,}323$$

3.15. Věta: Věta o pravděpodobnosti přežití jedné součástky druhou součástkou.

3.16. Věta: Věta o transformaci exponenciálního rozložení na rozložení $\chi^2(2)$.

3.17. Poznámka: Zobecnění věty 3.16.

3.18. Věta: Věta o 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu exponenciálního rozložení.

3.19. Příklad: V jisté prodejně potravin bylo na základě náhodného výběru 50 zákazníků zjištěno, že průměrná doba obsluhy u pokladny je 30 s. Předpokládejme, že doba obsluhy u pokladny je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozložením. Najděte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu doby obsluhy.

Řešení: n = 50, m = 30, α = 0,05

$$d = \frac{2n \cdot m}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} = \frac{3000}{\chi^2_{0,975}(100)} = \frac{3000}{129,561} = 23$$

$$h = \frac{2n \cdot m}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)} = \frac{3000}{\chi^2_{0,025}(100)} = \frac{3000}{74,222} = 40$$

23 s < 1/λ < 40 s s pravděpodobností aspoň 0,95.

3.20. Poznámka: Vzorce pro meze 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu exponenciálního rozložení.

3.21. Příklad: Pro údaje z příkladu 3.19. spočtěte meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu doby obsluhy podle vzorců uvedených v poznámce 3.20.

Řešení: n = 50, m = 30, α = 0,05

$$d = m - \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 30 - \frac{30}{\sqrt{50}} 1,96 = 21,68$$

$$h = m + \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 30 + \frac{30}{\sqrt{50}} 1,96 = 38,32$$

Střední hodnota doby obsluhy se s pravděpodobností aspoň 0,95 nachází v intervalu 22 s až 38 s.