4. Poissonovo rozložení a jeho vlastnosti

4.1. Definice: Definice náhodné veličiny s Poissonovým rozložením.

4.2. Poznámka: Funkcionální a číselné charakteristiky Poissonova rozložení.

4.3. Poznámka: Praktické příklady náhodných veličin s Poissonovým rozložením.

4.4. Věta: Věta o **v**ztahu mezi binomickým a Poissonovým rozložením.

4.5. Příklad: Pravděpodobnost závady na 1 km telefonního kabelu je 0,01. Kabel je složen ze 100 vodičů a bude plnit svou funkci, když aspoň 99 vodičů bude v pořádku. Jaká je pravděpodobnost, že kabel bude plnit svou funkci?
Řešení: Označme Y náhodnou veličinu, která udává počet porouchaných kabelů. Z podmínek úlohy plyne, že Y ~ $\mathrm{Bi}(100;0{,}01)$.
Přesný výpočet:

$$P(Y \le 1) = \sum_{y=0}^{1} \binom{100}{y} 0{,}01^y 0{,}99^{100-y} = \mathrm{binocdf}\,(1{,}100{,}0.01) = 0{,}7358$$

Aproximace Poissonovým rozložením: podmínky $n \ge 30$ a $\vartheta \le 0{,}1$ jsou splněny. Přitom $\lambda = n \cdot \vartheta = 100 \cdot 0{,}01 = 1$.

$$P(Y \le 1) \approx \sum_{y=0}^{1} \frac{1^y}{y!} e^{-1} = \mathrm{poisscdf}\,(1{,}1) = 0{,}7358$$

Pravděpodobnost, že kabel bude plnit svou funkci, je 0,7358.

4.6. Věta: Věta o modu Poissonova rozložení.

4.7. Příklad: K holiči chodí průměrně 6 zákazníků za 1 h. Určete nejpravděpodobnější počet zákazníků u holiče během půl hodiny a určete pravděpodobnost tohoto počtu.
Řešení: Náhodná veličina X udává počet zákazníků u holiče během 1/2 h, X ~ $\mathrm{Po}(3)$. Protože λ je přirozené číslo, existují dvě modální hodnoty, a to 2 a 3. Jejich pravděpodobnosti:

$$P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 4{,}5e^{-3} = 0{,}224, \quad P(X = 3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 4{,}5e^{-3} = 0{,}224$$

4.8. Věta: Věta o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin s Poissonovým rozložením.

4.9. Poznámka: Zobecnění věty 4.8.

4.10. Věta: Věta o aproximaci Poissonova rozložení normálním rozložením.

4.11. Věta: Věta o aproximativním výpočtu pomocí normálního rozložení.

4.12. Poznámka: Poznámka o korekci na nespojitost.

4.13. Příklad: Nechť X ~ $\mathrm{Po}(12)$. Pomocí aproximace normálním rozložením stanovte $P(8 \le X \le 20)$.
Řešení:

$$P(8 \le X \le 20) \approx \Phi\left(\frac{20-12+\frac{1}{2}}{\sqrt{12}}\right) - \Phi\left(\frac{8-12-\frac{1}{2}}{\sqrt{12}}\right) = \Phi(2{,}45) - \Phi(-1{,}3) =$$

$$= \Phi(2{,}45) - 1 + \Phi(1{,}3) = 0{,}99286 - 1 + 0{,}9034 = 0{,}89606$$

Pro porovnání provedeme přesný výpočet:

$$P(8 \le X \le 20) = \sum_{x=8}^{20} \frac{12^x}{x!} e^{-12} = \text{poisscdf}\,(20{,}12) - \text{poisscdf}\,(7{,}12) = 0{,}8989$$

4.14. Věta: Věta o 100(1-α)% asymptotickém intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu Poissonova rozložení.

4.15. Poznámka: Poznámka o korekci na nespojitost.

4.16. Příklad: Předpokládáme, že při výrobě určité tkaniny je počet kazů připadajících na 100 m této tkaniny náhodná veličina s rozložením Po(λ). Při kontrole 25 balíků, z nichž každý obsahoval 100 m této tkaniny, bylo zjištěno, že celkový počet kazů je 30. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu kazů připadajících na jeden balík.

Řešení: n = 25, m = 30/25 = 1,2, α = 0,05.

$$d = m - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 1{,}2 - \frac{1}{50} - \sqrt{\frac{1{,}2}{25}}1{,}96 = 0{,}75$$

$$h = m + \frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 1{,}2 + \frac{1}{50} + \sqrt{\frac{1{,}2}{25}}1{,}96 = 1{,}65$$

S pravděpodobností aspoň 95 % lze očekávat, že střední hodnota počtu kazů připadajících na jeden balík se nachází v mezích od 0,75 do 1,65.

4.17. Věta: Věta o 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu Poissonova rozložení.

4.18. Příklad: Pro údaje z příkladu 4.16. najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu kazů připadajících na jeden balík.

Řešení: n = 25, m = 30/25 = 1,2, α = 0,05.

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm) = \frac{1}{50}\chi^2_{0{,}025}(60) = \frac{1}{50}40{,}48 = 0{,}81$$

$$h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2nm+2) = \frac{1}{50}\chi^2_{0{,}975}(62) = \frac{1}{50}85{,}65 = 1{,}71$$

S pravděpodobností aspoň 95 % lze očekávat, že střední hodnota počtu kazů připadajících na jeden balík se nachází v mezích od 0,81 do 1,71.