11. Galtonův – Watsonův proces větvení

11.1. Definice: Nechť jedinec tvořící nultou generaci může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům (potomkům) první generace. Analogicky každý jedinec z první generace může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům druhé generace atd. Přitom předpokládáme, že

a) počet potomků X náhodně zvoleného jedince má pravděpodobnostní funkci

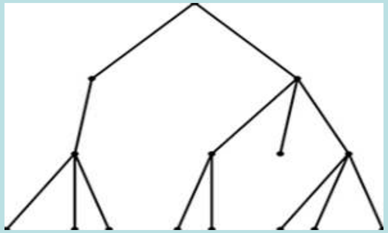
$$P(X = k) = \begin{cases} p_k \text{ pro } k = 0,1,2,\ldots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

, která nezávisí na zvoleném jedinci ani na generaci, do níž přísluší;

b) jedinci z dané generace dávají vzniknout svým potomkům vzájemně nezávisle.

Označme X_n počet jedinců n-té generace (speciálně je $X_0 = 1$). Za uvedených předpokladů posloupnost náhodných veličin $\{X_n ; n \in N_0\}$ tvoří homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0, 1, 2, ...}. Tento řetězec se nazývá Galtonův – Watsonův proces větvení.

11.2. Označení: Zavedeme náhodné veličiny U_{nk}, k = 1, 2, ... které mají stejné rozložení jako náhodná veličina X_1 a jsou stochasticky nezávislé jak mezi sebou, tak na veličinách X_0, X_1, ... Veličina U_{nk} udává počet potomků k-tého jedince v n-té generaci. Je zřejmé, že
$X_{n+1} = U_{n1} + U_{n2} + ... + U_{nX_n}$.
Ilustrace:



....

11.3. Věta: Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij} = P(X_n = j / X_{n-1} = i)$ splňují vztah: $\forall i, j \in J : p_{ij} = \{p_j\}^{i*}$
s počáteční podmínkou $p_{0j} = \begin{cases} 1 \text{ pro } j = 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, tedy matice přechodu má tvar

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ p_0^{\ 2} & 2p_0p_1 & p_1^{\ 2} + 2p_0p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Důkaz: $p_{ij} = P(X_n = j / X_{n-1} = i) = P\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} U_{n-1,k} = j / X_{n-1} = i\right) = P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{n-1,k} = j\right) = \{p_j\}^{i*}$ podle věty 10.10.

11.4. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je Galtonův – Watsonův proces větvení s množinou stavů J = {0, 1, 2, ...} a vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = (¼, ¼ , ½ , 0, ...). Najděte matici přechodu **P**.

Řešení:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ p_0^{\ 2} & 2p_0p_1 & 2p_0p_2 + p_1^{\ 2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & \dots \\ 1/16 & 2/16 & 5/16 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

11.5. Věta: Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X_{n+1} platí:

$$g_{X_{n+1}}(z) = \begin{cases} g_{X_n}(g_X(z)) \text{pro} n = 1,2,\dots \\ 0 \text{pro} n = 0 \end{cases}$$

, kde $g_X(z)$ je pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X_1.

Důkaz: Protože $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} U_{nk}$ je součet náhodného počtu náhodných veličin, tvrzení plyne z věty 10.15.

11.6. Příklad: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je Galtonův – Watsonův proces větvení, přičemž pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X_1 má tvar $g_X(z) = 1 - \alpha(1-z)^\beta$, kde $0 < \alpha, \beta < 1$ jsou konstanty. Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X_n.

Řešení: $g_{X_2}(z) = g_X(g_X(z)) = 1 - \alpha\left\{1 - \left[1 - \alpha(1-z)^\beta\right]\right\}^\beta = 1 - \alpha\left[\alpha(1-z)^\beta\right]^\beta = 1 - \alpha^{\beta+1}(1-z)^{\beta^2}$

$g_{X_3}(z) = g_{X_2}(g_X(z)) = 1 - \alpha^{\beta+1}\left\{1 - \left[1 - \alpha(1-z)^\beta\right]\right\}^{\beta^2} = 1 - \alpha^{\beta+1}\left[\alpha^{\beta^2}(1-z)^{\beta^3}\right] = 1 - \alpha^{1+\beta+\beta^2}(1-z)^{\beta^3}$

Obecně: $g_{X_n}(z) = 1 - \alpha^{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n}(1-z)^{\beta^n}$ pro n = 1, 2, ...

11.7. Věta: Nechť μ je střední hodnota a σ^2 je rozptyl náhodné veličiny X_1. Pak pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X_n platí:

$$E(X_n) = \mu^n, \quad D(X_n) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2\mu^{n-1}\left(\mu^n - 1\right)}{\mu - 1} & \text{pro} \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{pro} \mu = 1 \end{cases}.$$

Důkaz: Provedeme matematickou indukcí. Z věty 10.15. plyne:

$$E(X_{n+1}) = E(U_{n+1,1} + \ldots + U_{n+1,X_n}) = E(X_n)\mu = \mu^n\mu = \mu^{n+1}.$$

Nechť $\mu \neq 1$. Pak

$$D(X_{n+1}) = D(U_{n+1,1} + \ldots + U_{n+1,X_n}) = D(X_n)\mu^2 + E(X_n)\sigma^2 = \frac{\sigma^2\mu^{n-1}\left(\mu^n - 1\right)}{\mu - 1}\mu^2 + \mu^n\sigma^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2\mu^{2n+1} - \sigma^2\mu^{n+1} + \sigma^2\mu^{n+1} - \sigma^2\mu^n}{\mu - 1} = \frac{\sigma^2\mu^n\left(\mu^{n+1} - 1\right)}{\mu - 1}$$

Nechť $\mu = 1$.

Pak $D(X_{n+1}) = D(X_n) + \sigma^2 = n\,\sigma^2 + \sigma^2 = (n + 1)\,\sigma^2$.

11.8. Příklad: Pro zadání příkladu 11.4. vypočtěte střední hodnotu a rozptyl počtu potomků v n-té generaci.
(Připomeňme, že vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (¼, ¼ , ½ , 0, ...).)
Řešení:

$$E(X_1) = \mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4},$$

$$D(X_1) = \sigma^2 = E(X_1{}^2) - [E(X_1)]^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

$$E(X_n) = \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$D(X_n) = \frac{\sigma^2 \mu^{n-1}(\mu^n - 1)}{\mu - 1} = 4 \cdot \left(\frac{11}{16}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} \cdot \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - 1\right]$$

11.9. Věta: Označme $q_n = P(X_n = 0)$ pravděpodobnost vyhynutí v n-té generaci. Pak platí:
$q_n = g_{X_n}(0)$.

Důkaz: $g_{X_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) z^k \Rightarrow g_{X_n}(0) = P(X_n = 0) = q_n$.

11.10. Věta: Nechť $0 < p_0 < 1$. (Krajní případy $p_0 = 0$ a $p_0 = 1$ vylučujeme, protože pro $p_0 = 0$ je $q_n = 0$ pro všechna n = 1, 2, ... a pro $p_0 = 1$ je $q_n = 1$ pro všechna n = 1, 2, ...)

a) Je-li $\mu \leq 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$.

b) Je-li $\mu > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \xi$, kde $\xi \in (0,1)$ je nejmenší kladný kořen rovnice $z = g_X(z)$.

Interpretace: Je-li $\mu \leq 1$, pak s pravděpodobností 1 proces dosáhne jen konečně mnoha generací.
Je-li $\mu > 1$, pak s pravděpodobností ξ proces dosáhne konečně mnoha generací a s pravděpodobností $1 - \xi$ dosáhne nekonečně mnoha generací.

Důkaz: nebudeme provádět.

11.11. Příklad: Pro Galtonův – Watsonův proces z příkladu 11.4. najděte limitní hodnotu pravděpodobnosti vyhynutí.

Řešení:

V příkladu 11.8. bylo vypočteno, že $E(X_1) = \frac{5}{4}$. Protože $\frac{5}{4} > 1$, podle tvrzení b) věty 11.10.

$\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \xi$, kde $\xi \in (0,1)$ je nejmenší kladný kořen rovnice $z = g_X(z) = \sum_{k=0}^{2} p_k z^k =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}z^2 \Rightarrow 4z = 1 + z + 2z^2, 2z^2 - 3z + 1 = 0 \Rightarrow z_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$. Podmínku splňuje kořen ½,

tedy limitní hodnota pravděpodobnost i vyhynutí je 0,5.

11.12. Poznámka: Předchozí výsledky lze snadno zobecnit na případ, kdy nultá generace je tvořena $k_0 \geq 1$ jedinci. Pak pro n = 1, 2, ... platí.

a) $E(X_n) = k_0 \mu^n$

b) $$D(X_n) = \begin{cases} k_0 \dfrac{\sigma^2 \mu^{n-1}(\mu^n - 1)}{\mu - 1} \text{pro} \mu \neq 1 \\ k_0 n \sigma^2 \text{pro} \mu = 1 \end{cases}$$

c) $$\lim_{n \to \infty} q_n = \begin{cases} 1 \text{ pro } \mu \leq 1 \\ \xi^{k_0} \text{ pro } \mu > 1 \end{cases}$$

Lze si totiž představit, že vedle sebe se navzájem nezávisle větví k_0 populací, z nichž každá vznikla z právě jednoho jedince.