Cvičení 10 s návodem

Optimalizace systémů hromadné obsluhy (s neomezenou kapacitou)

1. Systém M/M/1/∞/FIFO
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Známe náklady c_1 na obsluhu jednoho požadavku a náklady c_2 na údržbu prázdného systému za jednotku času. Hledáme intenzitu obsluhy μ tak, aby funkce nákladů a ztrát

$$F(\mu) = c_1\mu + c_2 E(N) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

nabývala svého minima. Vzhledem k tomu, že systém musí být schopen se stabilizovat (tj. $\lambda < \mu$), je minima dosaženo pro $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda}$.

Optimální intenzitu obsluhy a hodnotu funkce nákladů a ztrát pro tuto optimální intenzitu počítá funkce opt_neomezeny_1.m.

Příklad 1.: Na konci montážní linky se nachází pracoviště kontroly kvality, které se skládá z prostoru na čekání palet a zkušebního pracoviště. Průměrně přichází 80 palet v průběhu osmihodinové směny. Doba mezi příchody palet má exponenciální rozložení a doba kontroly rovněž. Náklady na kontrolu jedné palety činí 100 Kč, prostojové náklady jsou 40 Kč/h. Stanovte optimální dobu kontroly jedné palety a najděte hodnotu funkce nákladů a ztrát pro optimální intenzitu obsluhy.

Řešení: $\lambda = \frac{80}{8} = 10$ palet za 1 h, c_1 = 100 Kč, c_2 = 40 Kč

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda} = 10 + \sqrt{\frac{40}{100}10} = 10 + 2 = 12$$

Optimální intenzita je 12 palet za 1 h, tj. jedna paleta je zkontrolována za 5 minut.

$$F(\mu) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 100 \cdot 12 + 40\frac{10}{12 - 10} = 1400$$

Výsledek: 5 minut, tedy za 1 h by se mělo zkontrolovat 12 palet. Funkce nákladů a ztrát nabývá hodnoty 1400.

Příklad 2.: V dílně dochází v průměru ke třem poruchám strojů za hodinu, přičemž se jedná o poissonovský proud. Prostojové náklady stroje jsou 1000 Kč/h. Můžeme volit mezi průměrným opravářem, který opravuje 4 stroje za 1 h a stojí i režií 500 Kč/h a zkušeným opravářem, který opravuje 5 strojů ze 1 h a stojí i s režií 650 Kč/h. V obou případech předpokládáme, že doba opravy se řídí exponenciálním rozložením. Kterého opraváře je výhodnější přijmout?
Řešení: $\lambda = 3$, c_2 = 1000
a) c_1 = 500, $\mu = 4$

$$F(\mu) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 500 \cdot 4 + 1000\frac{3}{4 - 3} = 5000$$

b) c_1 = 650, $\mu = 5$

$$F(\mu) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 650 \cdot 5 + 1000 \frac{3}{5-3} = 4750$$

Výsledek: Funkce nákladů a ztrát pro průměrného opraváře nabývá hodnoty 5000, pro zkušeného opraváře 4750, je tedy výhodnější přijmout zkušeného opraváře.

2. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením s parametrem μ. Známe náklady c_1 na čekajícího zákazníka za jednotku času a náklady c_2 na nevyužitou linku obsluhy za jednotku času. Hledáme počet linek n tak, aby kriteriální funkce

$$C(n) = c_1 E(N_Q) + c_2 [n - E(N_S)]$$

nabývala svého minima.

Přitom $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$, $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{a_n}{1-\rho}$, $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\beta}{n}$,

$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1}$, $E(N_S) = n\rho$. Podmínka stabilizace: $n > \frac{\lambda}{\mu}$.

Optimální počet linek a hodnotu kriteriální funkce pro tento optimální počet linek počítá funkce opt_neomezeny_n.m.

Příklad 3.: V nově otevřené pobočce České spořitelny bylo rozhodnuto rezervovat pro operace se sporožirovým účtem 3 přepážky. Klienti, kteří do pobočky přicházejí kvůli těmto operacím, se řadí do jedné fronty a po uvolnění libovolné z přepážek mohou být obsluhováni. Po otevření pobočky bylo zjištěno, že v průměru přichází 68 klientů za hodinu, přičemž intervaly mezi jejich příchody mají exponenciální rozložení. Doba nutná pro odbavení klienta je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 min 24 s.

a) Za předpokladu, že náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h jsou 120 Kč a náklady na provoz jedné přepážky činí 300 Kč/h, najděte optimální počet přepážek.

b) Zjistěte, jak by se musely snížit náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h, aby byl optimální původně uvažovaný systém se třemi přepážkami.

Řešení: $\lambda = \frac{68}{60} = \frac{17}{15}$ klientů za 1 min, $\frac{1}{\mu} = 2\,\text{min}\,24\text{s} = 2{,}4\,\text{min}, \mu = \frac{1}{2{,}4} = \frac{5}{12}$ klientů za 1 min, $c_1 = 120$, $c_2 = 300$

$$\beta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{17}{15}}{\frac{5}{12}} = \frac{204}{75}, \rho = \frac{\beta}{n} < 1 \Rightarrow n > \beta = 2{,}72, \text{ tj. } n \geq 3$$

Ad a)

n=3: $$a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{2} \frac{2{,}72^j}{j!} + \frac{3 \cdot 2{,}72^3}{3!(3-2{,}72)}} = 0{,}0231$$

$$a_n = \frac{\beta^n}{n!} a_0 \Rightarrow a_3 = \frac{2{,}72^3}{3!} 0{,}0231 = 0{,}0774$$

$$E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} = a_n \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = 0{,}0774 \frac{\frac{2{,}72}{3}}{\left(1 - \frac{2{,}72}{3}\right)^2} = 8{,}0638, \; E(N_S) = n\rho = \beta = 2{,}72$$

$$C(3) = c_1 E(N_Q) + c_2 [3 - E(N_S)] = 120 \cdot 8{,}0638 + 300(3 - 2{,}72) = 1050{,}2$$

n=4: a_0 = 0,0559, a_4 = 0,1274, $E(N_Q)$ = 0,8461, $E(N_S)$ = 2,72, C(4) = 485,53
n=5: a_0 = 0,0634, a_5 = 0,0787, $E(N_Q)$ = 0,2058, $E(N_S)$ = 2,72, C(5) = 708,69

Ad b)
Požadujeme, aby C(3) < C(4).

$$C(3) = c_1 E(N_Q) + c_2[3 - E(N_S)] = c_1 \cdot 8{,}0638 + 300(3 - 2{,}72)$$

$$C(4) = c_1 E(N_Q) + c_2[4 - E(N_S)] = c_1 \cdot 0{,}8461 + 300(4 - 2{,}72)$$

$$c_1 < \frac{300(4 - 2{,}72) - 300(3 - 2{,}72)}{8{,}0638 - 0{,}8461} = \frac{300}{7{,}2177} = 41{,}56$$

Pokud má být optimální systém se třemi přepážkami, náklady na čekajícího zákazníka nesmí přesáhnout 41,56 Kč za hodinu.

Výsledek:
Ad a)

n	C(n)
3	1050,2
4	485,53
5	708,69

Optimální jsou 4 přepážky.

Ad b) Náklady na čekajícího zákazníka nesmí přesáhnout 41,56 Kč za hodinu.

Příklad 4.: Manažer fastfoodu se rozhodl optimalizovat večerní provoz pokladen. Zákazníci, kteří do restaurace přicházejí, se řadí do jedné fronty a po uvolnění jakékoli pokladny jsou obslouženi. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že zákazníci přicházejí s průměrnou intenzitou 40 osob za 1 h s tím, že intervaly mezi jejich příchody mají exponenciální rozložení. Doba nutná pro obsloužení zákazníka je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou 4 minuty. Za předpokladu, že náklady na pobyt zákazníka v restauraci po dobu 1 h jsou 100 Kč a náklady na provoz jedné pokladny za 1 h jsou 110 Kč, najděte optimální počet pokladen.
Řešení:

$\lambda = 40$, $\mu = \frac{60}{4} = 15$, $c_1 = 100$, $c_2 = 110$, $\beta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$. Tedy hledáme $n > \beta = \frac{8}{3}$.
Počítejme postupně:
$n = 3$:
$\rho = \frac{\beta}{n} = \frac{8}{9}$
$a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{2} \frac{\beta^j}{j!} + 3\frac{\beta^3}{3!(3-\beta)}} = \frac{1}{\frac{8}{3} + \frac{(\frac{8}{3})^2}{2} + 3\frac{(\frac{8}{3})^3}{3!(3-\frac{8}{3})}} = \frac{3}{104}$
$a_3 = \frac{\beta^3}{3!} a_0 = \frac{(\frac{8}{3})^3}{3!} \frac{3}{104} = \frac{32}{351}$
$c(n) = c_1 \frac{a_n \rho}{(1-\rho)^2} + c_2 n(1-\rho) = c(3) = 100 \frac{\frac{32}{351}\frac{8}{9}}{(1-\frac{8}{9})^2} + 110.3(1 - \frac{8}{9}) \doteq 693,08.$
$n = 4$:
$\rho = \frac{\beta}{n} = \frac{2}{3}$
$a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{3} \frac{\beta^j}{j!} + 4\frac{\beta^4}{4!(4-\beta)}} = \frac{1}{\frac{8}{3} + \frac{(\frac{8}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{8}{3})^3}{6} + 4\frac{(\frac{8}{3})^4}{4!(4-\frac{8}{3})}} = \frac{27}{424}$
$a_4 = \frac{\beta^4}{4!} a_0 = \frac{(\frac{8}{3})^4}{4!} \frac{27}{424} = \frac{64}{477}$
$c(n) = c_1 \frac{a_n \rho}{(1-\rho)^2} + c_2 n(1-\rho) = c(4) = 100 \frac{\frac{64}{477}\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})^2} + 110.4(1 - \frac{2}{3}) \doteq 227,17.$
$n = 5$:
$\rho = \frac{\beta}{n} = \frac{8}{15}$
$a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{4} \frac{\beta^j}{j!} + 5\frac{\beta^5}{5!(5-\beta)}} = \frac{1}{\frac{8}{3} + \frac{(\frac{8}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{8}{3})^3}{6} + \frac{(\frac{8}{3})^4}{24} + 5\frac{(\frac{8}{3})^5}{5!(5-\frac{8}{3})}} = \frac{567}{7820}$
$a_5 = \frac{\beta^5}{5!} a_0 = \frac{(\frac{8}{3})^5}{5!} \frac{567}{7820} = \frac{7168}{87975}$
$c(n) = c_1 \frac{a_n \rho}{(1-\rho)^2} + c_2 n(1-\rho) = c(5) = 100 \frac{\frac{7168}{87975}\frac{8}{15}}{(1-\frac{8}{15})^2} + 110.5(1 - \frac{8}{15}) \doteq 276,62.$
Porovnáním hodnot kriteriální funkce pro $n \in \{3, 4, 5\}$ zjišťujeme, že optimální počet pokladen jsou čtyři pokladny.

Výsledek:

n	C(n)
3	693,08
4	227,17
5	276,62

Optimální jsou 4 pokladny.