

## Cvičení 3 s návodem

### Příklady na využití exponenciálního rozložení

**Příklad 1.:** Doba do ukončení opravy v opravně obuvi je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 3 dny. Jaká je pravděpodobnost, že oprava bude ukončena do dvou dnů?

**Řešení:**  $X \sim \text{Ex}(1/3)$ ,

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = \left[ -e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^2 = 1 - e^{-\frac{2}{3}} = 0,4866$$

V MATLABu:  $p = \text{expcdf}(2,3)$

**Příklad 2.:** Životnost žárovky má exponenciální rozložení se střední hodnotou 600 h. Jaká je pravděpodobnost, že žárovka bude svítit dalších aspoň 200 h, jestliže již svítila aspoň 800 h?

**Řešení:**  $X \sim \text{Ex}(1/600)$ , podle věty 3.4 dostáváme

$$P(X \geq 800 + 200 / X \geq 800) = P(X \geq 200) = 1 - P(X \leq 200) + P(X = 200)$$

$$= 1 - \int_0^{200} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}} dx = 1 - \left[ -e^{-\frac{x}{600}} \right]_0^{200} = e^{-\frac{200}{600}} = e^{-\frac{1}{3}} = 0,7165$$

V MATLABu:  $p = 1 - \text{expcdf}(200,600)$

**Příklad 3.:** Náhodné doby života dvou součástí jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž  $X_i \sim \text{Ex}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Střední hodnota doby života první součástky je 2 roky, druhé součástky 3 roky. Jaká je pravděpodobnost, že druhá součástka přežije první?

**Řešení:**

Podle věty 3.13 dostáváme:

$$P(X_2 > X_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = 0,6$$

**Příklad 4.:** Doba (v hodinách), která uplyne mezi dvěma naléhavými příjmy v jisté nemocnici, se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 h. Jaká je pravděpodobnost, že uplyne více než 5 h bez naléhavého příjmu?

**Řešení:**  $X \sim \text{Ex}(1/2)$ ,

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 - \left[ -e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^5 = e^{-2,5} = 0,082$$

V MATLABu:  $p = 1 - \text{expcdf}(5,2)$

**Příklad 5.:** Zkoumá se funkce dvou nezávisle na sobě pracujících přístrojů. Doba bezporuchové funkce i-tého přístroje je náhodná veličina  $X_i \sim \text{Ex}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Jaká je pravděpodobnost, že za dobu  $t_0 > 0$  a) ani jeden přístroj neselže, b) selže aspoň jeden přístroj?

**Řešení:**

ad a)

$$P(X_1 > t_0 \wedge X_2 > t_0) = P(X_1 > t_0)P(X_2 > t_0) = [1 - P(X_1 \leq t_0)][1 - P(X_2 \leq t_0)] = \\ = [1 - \Phi_1(t_0)][1 - \Phi_2(t_0)] = e^{-\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_2 t_0} = e^{-t_0(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

ad b)

$$P(X_1 \leq t_0 \vee X_2 \leq t_0) = 1 - e^{-t_0(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

**Příklad 6.:** Najděte 5. percentil náhodné veličiny  $X \sim \text{Ex}(0,1)$ .

**Řešení:**

$$0,05 = \Phi(K_{0,05}(X)) = 1 - \exp(-0,1K_{0,05}(X)) \Rightarrow K_{0,05}(X) = \\ = -10 \ln 0,95 = 0,5129$$

V MATLABu:  $K = \text{expinv}(0.05,10)$

**Příklad 7.:** Jistý přístroj má poruchu v průměru jednou za 2000 hodin. Doba čekání na poruchu se řídí exponenciálním rozložením. Stanovte dobu  $t$  tak, aby pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat po dobu delší než  $t$ , byla 0,99.

**Řešení:**  $X$  ... doba čekání na poruchu,  $X \sim \text{Ex}(1/2000)$

$$0,99 = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \Phi(t) = e^{-\frac{t}{2000}} \Rightarrow \\ t = -2000 \cdot \ln 0,99 = 20,1\text{h}$$

V MATLABu:  $t = \text{expinv}(0.01,2000)$

**Příklad 8.:** Na základě znalosti  $100(1-\alpha)\%$  intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu  $\frac{1}{\lambda}$  exponenciálního rozložení (viz věta 3.18.) odvoďte  $100(1-\alpha)\%$  interval spolehlivosti pro hodnotu funkce přežití.

**Řešení:** Funkce přežití exponenciálního rozložení má tvar  $\Psi(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 1 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$ . Stačí tedy

získat meze  $100(1-\alpha)\%$  interval spolehlivosti pro intenzitu poruchy  $\lambda$ , vynásobit  $x$  a použít funkci  $\exp$ .

Ve větě 3.18. bylo odvozeno, že

$$\forall \lambda > 0 : 1 - \alpha \leq P\left(\frac{2nM}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2nM}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right). \text{ Odtud plyne, že } 100(1-\alpha)\% \text{ interval}$$

spolehlivosti pro intenzitu poruchy  $\lambda$  má meze:

$$\forall \lambda > 0 : 1 - \alpha \leq P\left(\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2nM} < \lambda < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2nM}\right).$$

$100(1-\alpha)\%$  interval spolehlivosti pro  $e^{-\lambda x}$  má tedy meze:

$$D = \exp\left(\frac{-x\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2nM}\right), H = \exp\left(\frac{-x\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2nM}\right).$$

**Příklad 9.:** Při zkouškách životnosti určitého elektronického prvku byly zjištěny následující doby života (ve dnech): 4, 13, 26, 36, 51, 75, 100, 111, 162, 174. (Průměrná doba života je tedy  $m = \frac{752}{10} = 75,2$ .) Uvedené hodnoty považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu

10 z rozložení  $\text{Ex}(\lambda)$ . Najděte 95% pravostranný interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraný elektronický prvek přežije 50 dnů.

**Řešení:**  $n = 10$ ,  $m = 75,2$ ,  $x = 50$ ,  $\alpha = 0,05$ .

$$h = \exp\left(\frac{-x\chi^2_{\alpha}(2n)}{2nm}\right) = \exp\left(\frac{-50\chi^2_{0,05}(20)}{2 \cdot 10 \cdot 75,2}\right) = \exp\left(\frac{-50 \cdot 10,85}{2 \cdot 10 \cdot 75,2}\right) = 0,7$$

Se spolehlivostí 95 % lze očekávat, že pravděpodobnost přežití 50 dnů je nejvýše 0,7.