Obsah

Část I

Parciální diferenciální rovnice

Kapitola 1

Rovnice prvního řádu

Vývoj věkově strukturované populace

Uvažujme nějakou populaci tvořenou jedinci různého věku. Předpokládejme, že známe složení této populace v nějakém čase a zajímá nás, jak se bude vyvíjet její velikost a věkové složení. K vyjádření velikosti populace můžeme používat dvě veličiny. Můžeme ji vyjadřovat jednak jako množství[1] jedinců, kteří mají v čase t věk v rozmezí od a do $a+\tau$, přesněji jedince, kteří mají v čase t věk z intervalu $[a, a+\tau)$; tuto veličinu označíme $N(t,a,\tau)$. Velikost populace však můžeme vyjádřit také jako tzv. *hustotu populace věku a v čase t*, kterou označíme symbolem $u(t,a)$. Hustota populace u a velikost populace N jsou vázány vztahem

$$N(t,a,\tau) = \int\limits_a^{a+\tau} u(t,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

O hustotě u budeme předpokládat, že je to spojitě diferencovatelná funkce. Obě funkce u a N jsou nezáporné.

Procesy probíhající v populaci jsou rození a umírání.

Model procesu umírání

Označme symbolem $D(t,a,\tau)$ množství jedinců, kteří zemřou během časového intervalu $(t, t+\tau]$ a v čase t mají věk v rozmezí $[a, a+\tau)$. Jedinci, kteří během časového intervalu délky τ nezemřeli, zestárli o τ. Tuto triviální skutečnost (zákon zachování) vyjádříme rovností

$$N(t+\tau, a+\tau, \tau) = N(t,a,\tau) - D(t,a,\tau). \tag{1.1}$$

Vyjádříme levou stranu této rovnosti a upravíme pomocí substituce $\eta = \xi - \tau$,

$$N(t+\tau, a+\tau, \tau) = \int\limits_{a+\tau}^{a+2\tau} u(t+\tau,\xi)\mathrm{d}\xi = \int\limits_a^{a+\tau} u(t+\tau, \eta+\tau)\mathrm{d}\eta.$$

[1] Slovo „množství“ může označovat počet všech jedinců. Může to však také být počet jedinců vztažený k nějaké ploše, počet nějak „reprezentativně“ vybraných jedinců a podobně.

S využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkce dvou proměnných můžeme psát

$$
\begin{aligned}
N(t+\tau, a+\tau, \tau) - N(t,a,\tau) &= \\
= \int_a^{a+\tau} \big(u(t+\tau,\xi+\tau) - u(t,\xi)\big)\mathrm{d}\xi &= \int_a^{a+\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t+\vartheta_1\tau, \xi+\tau)\tau + \frac{\partial u}{\partial a}(t,\xi+\vartheta_2\tau)\tau\right)\mathrm{d}\xi = \\
&= \tau \int_a^{a+\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t+\vartheta_1\tau, \xi+\tau) + \frac{\partial u}{\partial a}(t,\xi+\vartheta_2\tau)\right)\mathrm{d}\xi, \quad (1.2)
\end{aligned}
$$

kde ϑ_1, ϑ_2 jsou nějaká čísla z intervalu $[0,1]$. K vyjádření množství umírajících jedinců budeme předpokládat, že podíl zemřelých jedinců jistého věku za krátký časový interval délky Δt mezi všemi jedinci téhož věku je přímo úměrný trvání Δt procesu umírání,

$$\frac{D(t,a,\Delta t)}{N(t,a,\Delta t)} = \mu(a)\Delta t.$$

Koeficient úměrnosti $\mu(a)$, který závisí na věku a, nazýváme *specifická úmrtnost (mortalita) ve věku* a. Výraz na levé straně poslední rovnosti můžeme také interpretovat jako klasickou pravděpodobnost, že jedinec, který má v čase t věk v rozmezí od a do $a+\Delta t$, zemře v průběhu časového intervalu $(t, t+\Delta t]$. Hodnotu $\mu(a)$ proto můžeme chápat jako pravděpodobnost, že jedinec věku a zemře během jednotkového časového intervalu[2]. Specifickou úmrtnost budeme považovat za spojitou nezápornou funkci μ definovanou na intervalu $[0,\infty)$. Typický průběh funkce μ je znázorněn na Obrázku 1a): Úmrtnost novorozenců je relativně velká. Pak až do jistého věku (většinou do dospělosti, ukončení individuálního vývoje) klesá. Dále zůstane na nějaké nízké úrovni a po dosažení hranice stáří opět roste; zpočátku lineárně a nakonec jako konvexní funkce.

Z uvedeného předpokladu dostaneme vyjádření množství umírajících jedinců ve tvaru

$$D(t,a,\Delta t) = \mu(a)N(t,a,\Delta t)\Delta t = \Delta t\left(\mu(a)\int_a^{a+\Delta t} u(t,\xi)\mathrm{d}\xi\right). \tag{1.3}$$

Položíme $\tau = \Delta t$ a dosadíme rovnosti (1.2) a (1.3) do relace (1.1). Dostaneme

$$\int_a^{a+\Delta t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t+\vartheta_1\Delta t, \xi+\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial a}(t,\xi+\vartheta_2\Delta t) + \mu(a)u(t,\xi)\right)\mathrm{d}\xi = 0.$$

Tato rovnost má platit pro libovolná $a \geq 0$, $t \geq 0$ a $\Delta t > 0$. To je možné jen tak, že integrovaná funkce je nulová, tj. pro všechna přípustná $a, t, \Delta t$ platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t+\vartheta_1\Delta t, a+\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, a+\vartheta_2\Delta t) + \mu(a)u(t,a) = 0$$

a odtud limitním přechodem $\Delta t \to 0$ dostaneme *McKendrickovu-von Foersterovu rovnici*

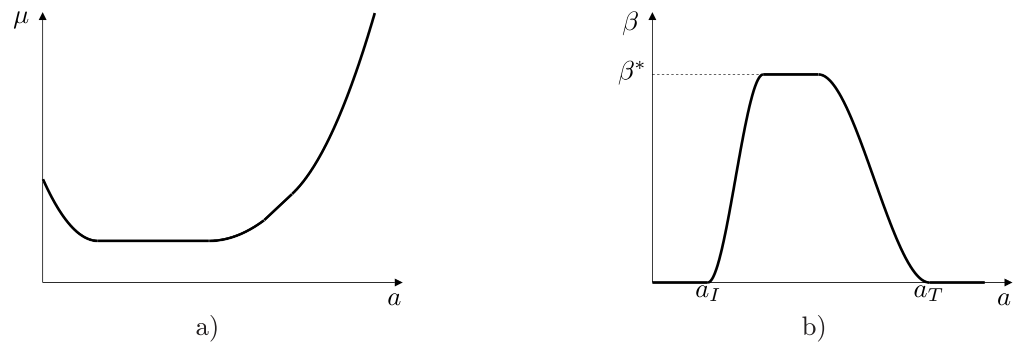
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,a) + \frac{\partial u}{\partial a}(t,a) = -\mu(a)u(t,a). \tag{1.4}$$

Známé složení populace na počátku vyjádříme *počáteční podmínkou*

$$u(0,a) = \varphi(a) \tag{1.5}$$

příslušnou k rovnici (1.4).

[2]Přesnější vyjádření je „intenzita pravděpodobnosti“, hodnota μ totiž může být větší než 1.



Obrázek 1.1: Typický průběh a) specifické úmrtnosti μ a b) specifické porodnosti β v závislosti na věku. Hodnota a_I označuje věk počátku plodnosti (dospělosti), hodnota a_T věk ukončení plodnosti.

Popíšeme, jak se vyvíjí část populace tvořená jedinci, kteří se narodili před časem $t = 0$. V takto vymezené části populace má v čase t každý jedinec věk větší než t. Zajímá nás tedy hustota u, jejíž definiční obor je zúžen na množinu

$$A_1 = \left\{(t, a) \in \mathbb{R}^2 : a > t \geq 0\right\}. \tag{1.6}$$

Zvolíme libovolné $a_0 > 0$ a pro $a \geq a_0$ položíme

$$x(a) = u(a - a_0, a).$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet derivací složené funkce a podle rovnice (1.4) platí

$$\begin{aligned} x'(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} u(a - a_0, a) = \frac{\partial u}{\partial t}(a - a_0, a)\frac{\partial(a - a_0)}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}(a - a_0, a)\frac{\partial a}{\partial a} = \\ = \frac{\partial u}{\partial t}(a - a_0, a) + \frac{\partial u}{\partial a}(a - a_0, a) = -\mu(a)u(a - a_0, a) = -\mu(a)x(a). \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (1.5) dostaneme

$$x(a_0) = u(a_0 - a_0, a_0) = u(0, a_0) = \varphi(a_0). \tag{1.7}$$

Funkce x je tedy řešením obyčejné lineární homogenní rovnice

$$x'(a) = -\mu(a)x(a)$$

s počáteční podmínkou (1.7). To znamená, že

$$x(a) = \varphi(a_0)\mathrm{e}^{-\int\limits_{a_0}^{a} \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

a poněvadž $u(t, a) = u(a - (a - t), a)$, můžeme psát řešení rovnice (1.4) s počáteční podmínkou (1.5) na množině A dané formulí (1.6) ve tvaru

$$u(t, a) = \varphi(a - t)\mathrm{e}^{-\int\limits_{a-t}^{a} \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}. \tag{1.8}$$

Ze spojitosti funkce u dále plyne, že takto definovaná funkce je řešením počáteční úlohy (1.4), (1.5) na množině $\bar{A}_1 \left\{(t, a) \in \mathbb{R}^2 : a \geq t \geq 0\right\}$.

Model procesu rození

Nejprve si uvědomíme, že v populaci nemohou být jedinci neomezeného věku. V časovém okamžiku t je v populaci nějaký maximální věk $a_{\max}$; hodnota $a_{\max}$ závisí na čase t. Pro hustotu u tedy platí $u(t,a) = 0$ pro každé $a > a_{\max}$. Vezmeme libovolné celé kladné číslo n a položíme

$$\Delta a = \frac{a_{\max}}{n}, \qquad a_i = i\Delta a, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

O jedincích, kteří v čase t mají věk a takový, že $a_{i-1} < a \le a_i$, řekneme, že jsou v čase t v i-té věkové třídě. Množství jedinců v i-té věkové třídě je rovno $N(t, a_{i-1}, \Delta a)$; to plyne z předpokládané spojitosti hustoty u.

Označme $B_i(t,\tau)$ množství novorozenců, kteří se narodili v časovém intervalu $(t, t+\tau]$ a jsou potomky jedinců[3], kteří v čase t byli v i-té věkové třídě. K vyjádření množství novorozoených jedinců budeme předpokládat, že v krátkém časovém intervalu délky Δt je množství novorozených potomků jedinců z nějaké věkové třídy úměrný velikosti této věkové třídy a délce časového intervalu Δt, tj.

$$B_i(t, \Delta t) = \beta_i N(t, a_{i-1}, \Delta a)\Delta t,$$

neboli

$$\frac{B_i(t,\Delta t)}{\Delta t} = \beta_i \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} u(t,\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{1.9}$$

koeficienty úměrnosti β_i jsou nezáporné.

Zavedeme spojitou nezápornou funkci β nezávisle proměnné a, pro niž platí $\beta(a_{i-1}) = \beta_i$. Funkci β budeme nazývat *věkově specifická porodnost*. Typický průběh specifické porodnosti β je znázorněn na Obrázku 1b). Novorození jedinci žádné potomky nemají, mohou je mít až po dosažení jistého věku a_I (dospělosti). Pak porodnost naroste do jisté maximální hodnoty β^*, po nějaké době začne klesat a ve věku a_T (po menopauza) vymizí. Většina organismů je plodná až do smrti, přežívání po menopauze se objevuje jen u některých primátů nebo u kosatek; hodnota a_T tedy může být větší než maximální možný věk dosahovaný v populaci.

Pro pravou stranu rovností (1.9) nyní platí

$$\min_{a_{i-1}\le\xi\le a_i} \big(\beta(\xi)u(t,\xi)\big)\Delta a \le \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} \beta(\xi)u(t,\xi)\mathrm{d}\xi \le \max_{a_{i-1}\le\xi\le a_i} \big(\beta(\xi)u(t,\xi)\big)\Delta a,$$

takže součet levých stran rovností (1.9) splňuje nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} \min_{a_{i-1}\le\xi\le a_i} \big(\beta(\xi)u(t,\xi)\big)\Delta a \le \frac{1}{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} B_i(t,\Delta t) \le \sum_{i=1}^{n} \max_{a_{i-1}\le\xi\le a_i} \big(\beta(\xi)u(t,\xi)\big)\Delta a. \tag{1.10}$$

Suma $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(t,\Delta t)$ vyjadřuje množství všech novorozenců, kteří se narodili v krátkém časovém intervalu $(t, t+\Delta t]$. Jinak řečeno, vyjadřuje množství všech jedinců, kteří v čase $t+\Delta t$ měli věk z intervalu $[0, \Delta t)$. To znamená, že

$$\sum_{i=1}^{n} B_i(t,\Delta t) = N(t+\Delta t, 0, \Delta t) = \int\limits_{0}^{\Delta t} u(t+\Delta t, \xi)\mathrm{d}\xi = u(t+\Delta t, \theta\Delta t)\Delta t,$$

kde $\theta \in (0,1)$ je nějaké číslo; poslední rovnost plyne z věty o střední hodnotě integrálního počtu. Uvedené vyjádření dosadíme do nerovností (1.10) a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \min_{a_{i-1}\le\xi\le a_i} \big(\beta(\xi)u(t,\xi)\big)\Delta a \le u(t+\Delta t, \theta\Delta t) \le \sum_{i=1}^{n} \max_{a_{i-1}\le\xi\le a_i} \big(\beta(\xi)u(t,\xi)\big)\Delta a.$$

[3] U pohlavně se rozmnožující populace zní vyjádření „potomek jedince“ podivně; každý je potomkem dvou jedinců, kteří mohou být různého věku. V takovém případě je vhodné za populaci považovat pouze populaci samic.

Výraz na levé straně konverguje pro $\Delta a \to 0$ (tj. pro $n \to \infty$) k dolnímu (Riemannovu) integrálu z funkce $\beta(\,\cdot\,)u(t,\,\cdot\,)$ na intervalu $[0, a_{\max}]$, výraz na pravé straně k integrálu hornímu. V limitě tak dostáváme rovnost

$$u(t+\Delta t, \theta\Delta t) = \int\limits_0^{a_{\max}} \beta(\xi)u(t,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Nyní provedeme další limitní přechod $\Delta t \to 0$. Nakonec si ještě uvědomíme, že pro $\xi > a_{\max}$ je $\beta(\xi)u(t,\xi) = 0$ při libovolném t. V horní mezi integrálu tedy můžeme psát ∞. Dostaneme tak

$$u(t,0) = \int\limits_0^{\infty} \beta(\xi)u(t,\xi)\mathrm{d}\xi; \tag{1.11}$$

to je *okrajová podmínka* pro rovnici (1.4).

Popíšeme, jak se vyvíjí část populace tvořená jedinci, kteří se narodili po čase $t = 0$. V takto vymezené části populace má v čase t každý jedinec věk menší než t. Zajímá nás tedy hustota u, jejíž definiční obor je zúžen na množinu

$$A_2 = \left\{(t,a) \in \mathbb{R}^2 : t > a \geq 0\right\}.$$

Zřejmě je $A_2 \cup \bar{A}_1 = [0,\infty) \times [0,\infty)$, takže hledáme řešení rovnice (1.4) na zbytku definičního oboru hustoty u.

Výraz na pravé straně rovnosti (1.11) závisí pouze na proměnné t. Proto ho označíme symbolem $\psi(t)$. Zvolíme libovolné $t_0 > 0$ a pro $a \geq 0$ položíme

$$y(a) = u(a+t_0, a).$$

Pak platí

$$y(0) = \psi(t_0), \qquad y'(a) = -\mu(a)y(a),$$

takže funkce y je řešením této Cauchyovy úlohy pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici, tj.

$$u(a+t_0,a) = y(a) = \psi(t_0)\mathrm{e}^{-\int\limits_0^a \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}.$$

Poněvadž hodnota t_0 byla libovolná a platí $u(t,a) = u\big(a + (t-a), a\big)$, řešení rovnice (1.4) na množině A_2, které splňuje okrajovou podmínku (1.11), dostaneme ve tvaru

$$u(t,a) = \psi(t-a)\mathrm{e}^{-\int\limits_0^a \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}, \tag{1.12}$$

kde funkce ψ je definována integrálem

$$\psi(t) = \int\limits_0^{\infty} \beta(\xi)u(t,\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{1.13}$$

1.1 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Jedná se o rovnice tvaru

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{1.14}$$

kde F je spojitá funkce pěti proměnných definovaná na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^5$ s neprázdným vnitřkem.

Klasické (silné) řešení rovnice (1.14) je funkce u definovaná na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, na vnitřku množiny Ω diferencovatelná, na uzávěru množiny Ω spojitá, která splňuje vztahy

$$\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) \in G \quad \text{a} \quad F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0$$

pro všechny body (x,y) z vnitřku množiny Ω.

1.1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnice je tvaru

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y), \tag{1.15}$$

kde a, b, c, g jsou spojité funkce dvou proměnných definované na nějaké podmnožině prostoru $\mathbb{R}^2$, která má neprázdný vnitřek. O funkcích a, b budeme navíc předpokládat, že jsou na vnitřku svého definičního oboru nenulové.

Kdyby totiž na nějaké otevřené podmnožině A společného definičního oboru funkcí a, b, c, g byla například funkce a nulová, rovnice by na A nabyla tvaru

$$b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y)$$

a mohli bychom ji považovat za rovnici obyčejnou – proměnnou y bychom chápali jako nezávisle proměnnou, proměnnou x bychom považovali za parametr.

Pokud je funkce g na pravé straně rovnice (1.15) nulová, tj. pokud rovnice je tvaru

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \tag{1.16}$$

řekneme, že tato rovnice je *homogenní.* Množina řešení rovnice (1.16) splňuje *princip superpozice:* Lineární kombinace řešení rovnice (1.16) je opět řešením této rovnice. Podrobněji:

• Je-li funkce u řešením rovnice (1.16) a α je libovolné reálné číslo, pak také funkce αu je řešením této rovnice.

Důkaz: Poněvadž

$$\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\alpha u)}{\partial y} = \alpha\frac{\partial u}{\partial y},$$

platí

$$a\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + b\frac{\partial(\alpha u)}{\partial y} + c(\alpha u) = \alpha\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) = 0.$$

□

• Jsou-li funkce u_1, u_2 řešením rovnice (1.16) se stejným definičním oborem, pak také funkce $u_1 + u_2$ je řešením této rovnice.

Důkaz: Poněvadž

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y},$$

platí

$$a\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x} + b\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial y} + c(u_1+u_2) = \\ = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 + a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2 = 0 + 0 = 0.$$

□

Protože funkce $u \equiv 0$ je zřejmě řešením rovnice (1.16), plyne z principu superpozice, že množina všech řešení rovnice (1.16) definovaných na jedné množině Ω tvoří reálný vektorový prostor.

Nyní se podívejme na strukturu množiny řešení nehomogenní rovnice (1.15). Pro ni platí:

• Jsou-li funkce u_1 a u_2 řešením nehomogenní rovnice (1.15), pak jejich rozdíl je řešením homogenní rovnice (1.16).

Důkaz:

$$a\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x} + b\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y} + c(u_1-u_2) = \\ = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 - \left(a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2\right) = g - g = 0.$$

□

• Je-li funkce u_N řešením nehomogenní rovnice (1.15), pak pro každé řešení u_H homogenní rovnice (1.16) je součet funkcí $u_N + u_H$ také řešením nehomogenní rovnice (1.15).

Důkaz:

$$a\frac{\partial(u_N+u_H)}{\partial x}+b\frac{\partial(u_N+u_H)}{\partial y}+c(u_N+u_H)=$$
$$=a\frac{\partial u_N}{\partial x}+b\frac{\partial u_N}{\partial y}+cu_N+a\frac{\partial u_H}{\partial x}+b\frac{\partial u_H}{\partial y}+cu_H=g+0=g.$$

□

Množinu řešení nehomogenní lineární rovnice (1.15) tedy můžeme chápat jako afinní prostor. Přesněji, řešení nehomogenní rovnice (1.15) jsou body afinního prostoru, jehož zaměřením je vektorový prostor všech řešení lineární homogenní rovnice (1.16).

1.1.2 Řešení rovnice $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$

Představme si, že řešení známe. Nechť tedy funkce $u = u(x,y)$ je řešením rovnice

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0. \tag{1.17}$$

Tuto funkci dvou proměnných můžeme znázornit pomocí vrstevnic. Nechť tyto vrstevnice mají parametrické vyjádření tvaru

$$\begin{aligned} x &= x(s),\\ y &= y(s), \end{aligned} \tag{1.18}$$

kde parametr s probíhá nějaký reálný interval I. Poněvadž funkce u je diferencovatelná, jsou její vrstevnice hladké křivky (případně body v bodech lokálních extrémů funkce u), tj. funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$ jsou diferencovatelné. Na vrstevnicích platí

$$u\big(x(s),y(s)\big) = const$$

(pro libovolnou hodnotu parametru $s \in I$). Derivováním této rovnosti podle parametru dostaneme rovnost

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u\big(x(s),y(s)\big)=\frac{\partial u\big(x(s),y(s)\big)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial u\big(x(s),y(s)\big)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s};$$

použili jsme řetězové pravidlo pro derivování složené funkce. Porovnáním s rovnicí (1.17) vidíme, že poslední rovnost bude splněna, pokud

$$x'(s)=\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}=a\big(x(s),y(s)\big),\quad y'(s)=\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}=b\big(x(s),y(s)\big).$$

Toto pozorování vede k rozhodnutí, že k parciální diferenciální rovnici (1.17) přiřadíme dvourozměrný autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(x,y),\\ y' &= b(x,y). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Tento systém se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (1.17), jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (1.17), nebo *první integrál rovnice* (1.17). Charakteristiky jsou vrstevnicemi řešení u rovnice (1.17). Dělením rovnic charakteristického systému (1.19) dostaneme *charakteristickou rovnici příslušnou k rovnici* (1.17); charakteristická rovnice má tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{1.20}$$

a je to obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu. Budeme předpokládat, že má řešení. Poněvadž se jedná o rovnici prvního řádu, závisí její obecné řešení na jedné konstantě. Tuto konstantu osamostatníme na pravé straně rovnosti vyjadřující řešení charakteristické rovnice (1.20) a dostaneme

$$\varphi(x, y) = const; \tag{1.21}$$

přitom φ je diferencovatelná funkce definovaná na množině Ω. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit také jinak: charakteristickou rovnici (1.20) přepíšeme ve tvaru

$$b(x, y)\mathrm{d}x - a(x, y)\mathrm{d}y = 0; \tag{1.22}$$

funkce φ je tedy kmenovou funkcí diferenciálu na levé straně.

Vrstevnice řešení u parciální diferenciální rovnice (1.17) mají implicitní vyjádření (1.21), konstanta na pravé straně představuje hodnotu funkce u na příslušné vrstevnici. Označme tuto hodnotu symbolem $\Phi\big(\varphi(x, y)\big)$.

Provedenými úvahami jsme vlastně našli algoritmus hledání řešení parciální diferenciální rovnice (1.17). K rovnici přiřadíme charakteristický systém (1.19) nebo charakteristickou rovnici (1.20), který (nebo kterou) vyřešíme a najdeme první integrál rovnice (1.17) ve tvaru (1.20). Pak vezmeme libovolnou diferencovatelnou funkci Φ jedné proměnné a položíme

$$u(x, y) = \Phi\big(\varphi(x, y)\big). \tag{1.23}$$

Ještě je potřeba udělat zkoušku, že takto nalezená funkce u je skutečně řešením parciální rovnice (1.17). Jinak řečeno, dokázat následující:

Tvrzení 1. Nechť $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce taková, že rovnost (1.21) je implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.19) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení charakteristické rovnice (1.20)). Je-li Φ libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné taková, že její definiční obor obsahuje obor hodnot funkce φ, pak funkce u definovaná vztahem (1.23) je řešením rovnice (1.17).

Důkaz: Pro řešení $x = x(s)$, $y = y(s)$ charakteristického systému platí

$$\varphi\big(x(s), y(s)\big) = const.$$

Derivováním této rovnosti podle parametru s dostaneme

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi\big(x(s), y(s)\big) = \frac{\partial\varphi\big(x(s), y(s)\big)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\varphi\big(x(s), y(s)\big)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} =$$
$$= \frac{\partial\varphi\big(x(s), y(s)\big)}{\partial x}a\big(x(s), y(s)\big) + \frac{\partial\varphi\big(x(s), y(s)\big)}{\partial y}b\big(x(s), y(s)\big),$$

stručně

$$a(x, y)\varphi_x(x, y) + b(x, y)\varphi_y(x, y) = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial\Phi\big(\varphi(x, y)\big)}{\partial x} = \Phi'\big(\varphi(x, y)\big)\varphi_x(x, y), \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \Phi'\big(\varphi(x, y)\big)\varphi_y(x, y),$$

takže

$$a(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \big(a(x, y)\varphi_x(x, y) + b(x, y)\varphi_y(x, y)\big)\Phi'\big(\varphi(x, y)\big) = 0.$$

□

Dostali jsme množinu řešení rovnice (1.17) ve tvaru (1.23). Prvky této množiny závisí na diferencovatelných funkcích, nikoliv na konstantách, jak tomu je v případě obyčejných diferenciálních rovnic. Odtud plyne, že (vektorový) prostor řešení lineární homogenní parciální diferenciální rovnice nemůže mít konečnou dimensi. Navíc zatím nevíme, zda rovnice (1.17) nemá nějaké další řešení, které není uvedeného tvaru.

Příklad.

$$u_x - 6x^2 u_y = 0.$$

Charakteristická rovnice je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -6x^2$ a její řešení je bezprostředně dáno integrací pravé strany, $y = -2x^3 + const$. První integrál dané rovnice tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$2x^3 + y = const$$

a její řešení je dáno rovností

$$u(x, y) = \Phi(2x^3 + y),$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce.

Zkouška:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(2x^3 + y) = \Phi'(2x^3 + y) \cdot 6x^2, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Phi(2x^3 + y) = \Phi'(2x^3 + y)$$

takže

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 6x^2 \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 6x^2\Phi'(2x^3 + y) - 6x^2\Phi'(2x^3 + y) = 0.$$

■

1.1.3 Kanonický tvar a řešení rovnice $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u)$

Uvažujme parciální diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u). \tag{1.24}$$

Budeme hledat nějakou transformaci nezávisle proměnných, která tuto rovnici nějak zjednoduší. Současně budeme chtít, aby tato transformace nebyla příliš komplikovaná. Ponecháme tedy první souřadnici (nezávisle proměnnou x) beze změny a transformujeme pouze souřadnici druhou (nezávisle proměnnou y). Jinými slovy, původní souřadnice x, y transformujeme na nové souřadnice ξ, η tak, že

$$\xi = x, \quad \eta = \varphi(x, y), \tag{1.25}$$

Přitom φ je diferencovatelná funkce dvou proměnných. Aby se jednalo skutečně o transformaci prostoru $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, musí být zobrazení $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definované vztahem

$$\boldsymbol{\phi}(x, y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix},$$

regulární (invertovatelné). Existuje tedy inversní zobrazení $\boldsymbol{\phi}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; jeho druhou složku označíme χ, je to diferencovatelná funkce dvou proměnných. Přitom funkce φ a χ splňují rovnosti $\chi(\xi, \eta) = y$, $\varphi(x, y) = \eta$, podrobněji

$$\chi\big(x, \varphi(x, y)\big) = y, \qquad \varphi\big(\xi, \chi(\xi, \eta)\big) = \eta. \tag{1.26}$$

Poznamenejme, že k tomu, aby zobrazení $\boldsymbol{\phi}$ bylo regulární, stačí, aby funkce φ měla nenulovou parciální derivaci podle druhé proměnné, tj. $\varphi_y \neq 0$.

Nyní budeme rovnici (1.24) transformovat do nových nezávisle proměnných pomocí transformace (1.25). Parciální derivace hledané funkce u podle původních proměnných vyjádříme v nových proměnných pomocí „řetězového pravidla“ pro derivování složených funkcí:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta \varphi_x, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\eta \varphi_y.$$

Po dosazení do levé strany řešené rovnice (1.24) tedy dostaneme

$$au_x + bu_y = au_\xi + (a\varphi_x + b\varphi_y)u_\eta.$$

Pokud funkce φ bude taková, že výraz v závorce vymizí, daná rovnice se transformuje na rovnici, v níž vystupuje pouze jedna parciální derivace. Požadujeme tedy $a\varphi_x + b\varphi_y = 0$, tj.

$$\frac{b}{a} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

Výraz $-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$ ovšem vyjadřuje obyčejnou derivaci funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí

$$\varphi(x, y) = const.$$

Funkce $y = y(x)$ zadaná touto rovnicí tedy má derivaci tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}.$$

Porovnáním s (1.20) vidíme, že transformační funkce φ současně implicitně vyjadřuje charakteristiky rovnice (1.17).

Transformovaná rovnice má tvar $au_\xi = f$. Funkce a je podle předpokladu nenulová, proto můžeme rovnici dále upravit, vyjádřit parciální derivaci u_ξ:

$$u_\xi = \frac{f}{a}u.$$

Dostáváme tak první závěr: Transformace nezávisle proměnných (1.25), kde funkce φ představuje implicitní zápis (1.21) charakteristik rovnice (1.17), převádí rovnici (1.24) na rovnici

$$u_\xi = F(\xi, \eta, u); \tag{1.27}$$

přitom

$$F(\xi, \eta, u) = \frac{f\big(\xi, \chi(\xi, \eta), u\big)}{a\big(\xi, \chi(\xi, \eta)\big)},$$

kde funkce χ je definována rovnostmi (1.26). Rovnice (1.27) se nazývá *kanonický tvar rovnice* (1.24).

V rovnici (1.27) není derivace hledané funkce u podle proměnné η. Hledanou funkci tedy můžeme chápat jako funkci jedné nezávisle proměnné ξ a její parciální derivaci u_ξ chápat jako derivaci obyčejnou. V tomto pojetí bude nezávisle proměnná η mít roli parametru. Hledáme tedy řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s parametrem η

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = F(\xi, \eta, u).$$

Pokud se nám podaří tuto rovnici vyřešit, tj. najít funkci $u = u(\xi, \eta)$, která ji splňuje, dostaneme zpětnou substitucí nezávisle proměnných řešení původní rovnice (1.24). Přitom je potřeba mít na paměti, že integrační konstanta objevující se při řešení obyčejné rovnice, bude záviset na parametru η. Ve vyjádření řešení rovnice (1.24) se tedy bude vyskytovat nějaká neurčená funkce proměnné η, tj. v původních nezávisle proměnných nějaká funkce argumentu $\varphi(x, y)$. To je v souladu s výsledky uvedenými v 1.1.2.

Příklad

Hledejme řešení rovnice $yu_x + xu_y = u^2 + 1$ v kladném kvadrantu.

Příslušná charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$$

a její řešení je implicitně dáno rovností $x^2 - y^2 = const$. Transformace

$$\xi = x, \qquad \eta = x^2 - y^2$$

převede danou rovnici na kanonický tvar

$$\sqrt{\xi^2-\eta}\,u_\xi = u^2+1.$$

Tuto rovnici budeme považovat za obyčejnou. Upravíme ji na tvar explicitní obyčejné diferenciální rovnice s parametrem η

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{u^2+1}{\sqrt{\xi^2-\eta}}$$

a vidíme, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Její řešení je implicitně dáno rovností

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta}}.$$

Integrací dostaneme implicitní tvar řešení rovnice

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left|\xi+\sqrt{\xi^2-\eta}\right| + C(\eta),$$

kde C je integrační konstanta, která závisí na parametru η. V tomto případě můžeme funkci u vyjádřit explicitně,

$$u(\xi,\eta) = \operatorname{tg}\left(C(\eta)+\ln\left|\xi+\sqrt{\xi^2-\eta}\right|\right).$$

Návratem k původním proměnným x, y dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x,y) = \operatorname{tg}\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right),$$

kde C je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že se skutečně jedná o řešení dané rovnice. Parciální derivace nalezené funkce u jsou[4]

$$u_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)}\left(2xC'(x^2-y^2)+\frac{1}{x+y}\right),$$

$$u_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)}\left(-2yC'(x^2-y^2)+\frac{1}{x+y}\right),$$

takže platí

$$\begin{aligned} yu_x(x,y)+xu_y(x,y) &= \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)} = \\ &= \frac{\sin^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)+\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)} = \\ &= \operatorname{tg}^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)+1 = u^2+1 \end{aligned}$$

a rovnice je splněna. ■

Řešení $u = u(\xi,\eta)$ rovnice (1.27) v kanonickém tvaru obecně nelze explicitně vyjádřit. V některých případech, např. jedná-li se o rovnici se separovatelnými proměnnými nebo o rovnici exaktní, můžeme její řešení vyjádřit alespoň implicitně. Takové řešení závisí na integrační konstantě Φ, která ovšem sama závisí na parametru η. Řešení rovnice (1.27) tak zapíšeme ve tvaru

$$\psi(\xi,\eta,u) = \Phi(\eta);$$

přitom ψ je diferencovatelná funkce tří proměnných, Φ je diferencovatelná funkce jedné proměnné. Návratem k původním nezávisle proměnným x, y dostaneme implicitní tvar řešení rovnice (1.24)

$$\psi\big(x,\varphi(x,y),u\big) = \Phi\big(\varphi(x,y)\big).$$

[4] Poznamenejme, že zápis $\sin^2\alpha$ označuje druhou mocninu funkční hodnoty goniometrické funkce sinus v bodě α, nikoliv dvakrát iterovanou funkci sinus; podobně pro funkce cosinus a tangens.

Nejjednodušší je situace v případě lineární rovnice. Kanonický tvar rovnice (1.15) je

$$u_\xi = P(\xi,\eta)u + Q(\xi,\eta); \tag{1.28}$$

přitom

$$P(\xi,\eta) = -\frac{c\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}{a\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}, \quad Q(\xi,\eta) = \frac{g\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}{a\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)},$$

kde funkce χ je definována rovnostmi (1.26). Hledáme tedy řešení obyčejné lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = P(\xi,\eta)u + Q(\xi,\eta).$$

Její řešení je tvaru

$$u(\xi,\eta) = \mathit{const}\cdot\exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} P(s,\eta)\mathrm{d}s\right) + \int_{\xi_0}^{\xi} Q(s,\eta)\exp\left(\int_{s}^{\xi} P(\sigma,\eta)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s.$$

Integrační konstanta samozřejmě může záviset na parametru η, proto ji zapíšeme jako $\Phi(\eta)$. Řešení lineární parciální diferenciální rovnice v kanonickém tvaru (1.28) je tedy dáno formulí

$$u(\xi,\eta) = \Phi(\eta)\exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} P(s,\eta)\mathrm{d}s\right) + \int_{\xi_0}^{\xi} Q(s,\eta)\exp\left(\int_{s}^{\xi} P(\sigma,\eta)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s, \tag{1.29}$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné, ξ_0 je nějaké reálné číslo; ve většině případů lze položit $\xi_0 = 0$.

Řešení lineární rovnice (1.15) dostaneme z formule (1.29) návratem k původním nezávisle proměnným x, y. Pro funkci P najdeme s využitím druhé rovnosti (1.25) vyjádření

$$P(s,\eta) = -\frac{c\big(s,\chi(s,\eta)\big)}{a\big(s,\chi(s,\eta)\big)} = -\frac{c\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}{a\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)},$$

analogicky vyjádříme funkci Q. Výsledek nyní můžeme zformulovat ve tvaru věty:

Věta 1. *Nechť $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce taková, že rovnost (1.21) je implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.19) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení charakteristické rovnice (1.20)) a $\chi : \Omega \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že jsou splněny podmínky (1.26)[5]. Označme*

$$p(x,y,s) = -\frac{c\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}{a\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}, \qquad q(x,y,s) = \frac{g\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}{a\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}.$$

Je-li Φ diferencovatelná funkce jedné proměnné, jejíž definiční obor obsahuje obor hodnot funkce φ, pak funkce u definovaná rovností

$$u(x,y) = \Phi\big(\varphi(x,y)\big)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(x,y,s)\mathrm{d}s\right) + \int_{x_0}^{x} q(x,y,s)\exp\left(\int_{s}^{x} p(x,y,\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s$$

je řešením rovnice (1.15); číslo x_0 je libovolné takové, že integrály na pravé straně jsou konečné pro všechny dvojice $(x,y) \in \Omega$.

[5] Všimněte si, že na levých stranách rovností (1.26) nejsou funkce dvou proměnných, ale funkce tří proměnných, přičemž hodnoty první a druhé proměnné jsou shodné.

Důkaz provedeme přímým výpočtem. Je to pěkné cvičení na derivování vícenásobně složených funkcí více proměnných. □

Výpočty provedené před Větou 1 ukazují, če pokud má charakteristická rovnice (1.20) řešení, pak má řešení i lineární parciální rovnice (1.15) a toto řešení má tvar uvedený ve Větě 1. Existence řešení lineární parciální rovnice v tomto tvaru je tedy důsledkem existence řešení příslušné charakteristické rovnice, tj. obyčejné diferenciální rovnice.

Při řešení konkrétní lineární homogenní parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných bývá přehlednější rovnici transformovat na kanonický tvar, rovnici v kanonickém tvaru vyřešit a zpětně transformovat nezávisle proměnné, než používat vzorec z Věty 1.

Příklad.

$$yu_x - xu_y = x^2 + y^2$$

Rovnici budeme uvažovat na množině $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, na jejímž vnitřku jsou oba koeficienty $a(x, y) = y$, $b(x, y) = -x$ nenulové. Příslušná charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

Je to obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými a její řešení je implicitně dáno rovností $x^2 + y^2 = const$. Zavedeme tedy transformaci

$$\xi = x, \qquad \eta = x^2 + y^2.$$

Pak na množině G je

$$y = \sqrt{\eta - \xi^2}, \qquad \xi_x = 1, \quad \xi_y = 0, \quad \eta_x = 2x = 2\xi, \quad \eta_y = 2y = 2\sqrt{\eta - \xi^2},$$

takže

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 2\xi u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 2\sqrt{\eta - \xi^2}\, u_\eta.$$

Po dosazení do řešené rovnice dostaneme

$$\sqrt{\eta - \xi^2}\big(u_\xi + 2\xi u_\eta\big) - 2\xi\sqrt{\eta - \xi^2}\, u_\eta = \xi^2 + \eta - \xi^2$$

a odtud snadnou úpravou získáme kanonický tvar

$$u_\xi = \frac{\eta}{\sqrt{\eta - \xi^2}}.$$

Tuto jednoduchou obyčejnou rovnici řešíme integrací podle proměnné ξ,

$$u = \int \frac{\eta}{\sqrt{\eta - \xi^2}} \mathrm{d}\xi = \eta \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} + const.$$

Integrační konstanta závisí na parametru η, řešení rovnice v kanonickém tvaru je

$$u(\xi, \eta) = \eta \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} + \Phi(\eta),$$

kde η je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Návratem k původním proměnným dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ještě můžeme využít skutečnosti, že pro $x > 0$, $y > 0$ je

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$$

a výsledek zapsat v trochu kratším tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ukážeme ještě řešení dané rovnice přímým dosazováním do formulí ve Větě 1. Máme

$$a(x, y) = y, \quad b(x, y) = -x, \quad c(x, y) = 0, \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Implicitní zápis řešení charakteristické rovnice je $x^2 + y^2 = const$ a tedy

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2.$$

Tvar funkce χ dostaneme ze druhé rovnosti (1.26). Má platit

$$\eta = \varphi\big(\xi, \chi(\xi, \eta)\big) = \xi^2 + \chi(\xi, \eta)^2,$$

takže $\chi(\xi, \eta) = \sqrt{\eta - \xi^2}$. Dále $p(x, y, s) = 0$ a

$$q(x, y, s) = \frac{g\big(s, \chi(s, \varphi(x, y))\big)}{a\big(s, \chi(s, \varphi(x, y))\big)} = \frac{s^2 + \chi\big(s, \varphi(x, y)\big)^2}{\chi\big(s, \varphi(x, y)\big)} = \frac{s^2 + \big(\varphi(x, y) - s^2\big)}{\sqrt{\varphi(x, y) - s^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - s^2}}.$$

Zvolíme $x_0 = 0$ a řešení dané rovnice rovnice dostaneme podle Věty 1 ve tvaru

$$u(x, y) = \Phi(x^2 + y^2) + \int_0^x \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - s^2}} \mathrm{d}s = \Phi(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

tedy až na pořadí sčítanců ve stejném, jako při předchozím způsobu řešení rovnice. ■

Rovnici (1.24) jsme transformovali do nových nezávisle proměnných tak, že jsme ponechali první souřadnici nezměněnu a za druhou jsme vzali funkci vyjadřující charakteristiku rovnice. To není jediná možnost, jak parciální rovnici (1.24) transformovat na kanonický tvar, tj. na obyčejnou rovnici s parametrem. Stejně dobře můžeme ponechat druhou souřadnici a první nahradit charakteristikou.

Příklad.

$$2u_x + 3u_y - xu = 0$$

Charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tfrac{3}{2},$$

její řešení $y = \frac{3}{2}x + const$ můžeme přepsat ve tvaru

$$3x - 2y = const;$$

to je zápis charakteristiky. Zavedeme transformaci

$$\xi = 3x - 2y, \quad \eta = y.$$

Pak $u_x = 3u_\xi$, $u_y = -2u_\xi + u_\eta$, $x = \frac{1}{3}(\xi + 2\eta)$. Levá strana dané rovnice se tedy transformuje na tvar

$$2u_x + 3u_y - xu = 6u_\xi - 6u_\xi + 3u_\eta - \tfrac{1}{3}(\xi + 2\eta)u = 3\left(u_\eta - \tfrac{1}{9}(\xi + 2\eta)u\right).$$

Kanonický tvar dané rovnice je

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \tfrac{1}{9}(\xi + 2\eta)u.$$

Tato rovnice má řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \tfrac{1}{9}\int (\xi+2\eta)\mathrm{d}\eta, \qquad \text{tj. } \ln u = \tfrac{1}{9}(\xi\eta+\eta^2) + const, \quad \text{neboli } u = const \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{9}(\xi\eta+\eta^2)}.$$

Řešení rovnice v kanonickém tvaru je tedy $u = \Phi(\xi)\mathrm{e}^{\frac{1}{9}\eta(\xi+\eta)}$ a návratem k původním proměnným dostaneme řešení dané rovnice

$$u(x,y) = \Phi(3x-2y)\mathrm{e}^{\frac{1}{9}y(3x-2y+y)} = \Phi(3x-2y)\sqrt[9]{\mathrm{e}^{y(3x-y)}}.$$

■

1.1.4 Okrajová úloha pro rovnici $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u)$

Uvažujme parciální diferenciální rovnici (1.24) lineární v prvních derivacích a jednu konkrétní charakteristiku rovnice (1.17) s nulovou pravou stranou; tato charakteristika má parametrické vyjádření (1.18) a je řešením autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.19) s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0.$$

Nechť funkce u je řešením rovnice (1.24). Pak na uvažované charakteristice platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u\big(x(s),y(s)\big) = u_x\big(x(s),y(s)\big)\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} + u_y\big(x(s),y(s)\big)\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} =$$
$$= a\big(x(s),y(s)\big)u_x\big(x(s),y(s)\big) + b\big(x(s),y(s)\big)u_y\big(x(s),y(s)\big) = f\Big(x(s),y(s),u\big(x(s),y(s)\big)\Big).$$

Odtud vidíme, že prostorová křivka, jejíž parametrické vyjádření je řešením autonomního systému

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= a(x,y),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= b(x,y),\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= f(x,y,u)\end{aligned} \tag{1.30}$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad u(0) = u_0 = u(x_0,y_0), \tag{1.31}$$

je incidentní s grafem řešení rovnice (1.24), tj. leží na grafu funkce u.

Zadáme-li tedy hodnotu u_0 řešení u rovnice (1.24) v nějakém bodě (x_0,y_0) charakteristiky, máme hodnoty řešení u rovnice (1.24) ve všech bodech této charakteristiky jako řešení autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.30) s počátečními podmínkami (1.31). Systém (1.30) charakterizuje řešení rovnice (1.15), proto se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (1.15), jeho trajektorie můžeme nazvat *charakteristické křivky rovnice* (1.24).

Jedno konkrétní řešení (partikulární řešení) rovnice (1.24) získáme tak, že na každé charakteristice zadáme právě jednu funkční hodnotu. Jinak řečeno, zadáme hodnoty řešení na nějaké rovinné křivce, která protíná každou charakteristiku právě jednou. Takové křivce říkáme *okraj pro rovnici* (1.24).

Okraj může být zadán parametricky rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= X(\sigma),\\ y &= Y(\sigma),\end{aligned}$$

kde parametr σ probíhá nějaký interval J. Pro každou hodnotu parametru $\sigma \in J$ zadáme hodnotu řešení $u = g(\sigma)$. Rovnosti

$$x = X(\sigma), \quad y = Y(\sigma), \quad u = g(\sigma), \qquad \sigma \in J \tag{1.32}$$

lze interpretovat jako parametrické vyjádření prostorové křivky, která má ležet na grafu řešení u rovnice (1.24). Tyto rovnosti nazýváme *okrajová podmínka pro rovnici* (1.24).

Okrajová úloha pro rovnici (1.24) je úloha najít řešení $u = u(x, y)$ rovnice (1.24), které splňuje okrajovou podmínku (1.32), tj. řešení, pro které platí

$$u\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big) = g(\sigma)$$

pro každou hodnotu parametru $\sigma \in J$.

Okrajovou úlohu můžeme řešit tak, že metodami popsanými v 1.1.3 najdeme řešení rovnice závisející na obecné funkci Φ a dosadíme do něho okrajovou podmínku. Dostaneme tak funkcionální rovnici pro neznámou funkci Φ, z které určíme její tvar; ten lze v některých případech z příslušné rovnice uhodnout.

Příklad

Hledejme řešení rovnice

$$2u_x - 3u_y = xu,$$

které splňuje podmínku

$$u(x, 0) = x^2$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Zadáváme tedy hodnoty řešení na ose x. Okrajovou podmínku můžeme parametricky zapsat jako

$$x = \sigma, \quad y = 0, \quad u = \sigma^2, \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Řešení dané rovnice jsme našli v příkladu na str. 16 ve tvaru

$$u(x, y) = \Phi(3x - 2y)\sqrt[9]{\mathrm{e}^{3xy - y^2}}.$$

Aby toto řešení splnilo okrajovou podmínku, musí platit

$$x^2 = u(x, 0) = \Phi(3x)\sqrt[9]{\mathrm{e}^0} = \Phi(3x).$$

Funkce Φ je tedy řešením jednoduché funkcionální rovnice $\Phi(3x) = x^2$ a snadno uhodneme, že funkci Φ můžeme zadat předpisem $\Phi(\xi) = \left(\frac{1}{3}\xi\right)^2$. Pro řešení dané okrajové úlohy tak dostáváme formulku

$$u(x, y) = (x - \tfrac{2}{3}y)^2\sqrt[9]{\mathrm{e}^{3xy - y^2}}.$$

■

Řešení funkcionální rovnice však obecně není snadná úloha. Proto může být výhodné při řešení okrajové úlohy (1.24), (1.32) postupovat jinak.

Najdeme konkrétní charakteristiku, která protíná okraj v bodě daném konkrétní hodnotou parametru σ. To znamená, že rovnosti v (1.32) chápeme jako počáteční podmínky pro autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.30), tj. najdeme řešení systému rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x, y, u)$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = X(\sigma), \quad y(0) = Y(\sigma), \quad u(0) = g(\sigma).$$

Takové řešení počáteční úlohy pro autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic tedy závisí na nezávisle proměnné s a na parametru σ, je obecně tvaru

$$x = x(s,\sigma), \quad y = y(s,\sigma), \quad u = u(s,\sigma).$$

Pro řešení okrajové úlohy představuje parametr σ i nezávisle proměnná s pouze pomocné parametry, které je potřeba eliminovat. Proto budeme první dvě rovnosti chápat jako dvě rovnice pro dvě neznámé s a σ; tyto neznámé vyjádříme pomocí proměnných x, y, tj. najdeme $s = s(x,y)$, $\sigma = \sigma(x,y)$, a dosadíme je do třetí rovnosti. Dostaneme tak řešení okrajové úlohy ve tvaru

$$u(x,y) = u\big(s(x,y), \sigma(x,y)\big).$$

Příklad

Hledejme řešení rovnice

$$yu_x - xu_y = x^2 + y^2,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(x,0) = x^2, \qquad x \geq 0.$$

Zadáváme tedy hodnoty řešení na kladné poloose x. Všechny funkce, které se objevují v dané rovnici, jsou definovány na celém prostoru $\mathbb{R}^2$. Budeme hledat řešení, které je definované na co největší podmnožině $\mathbb{R}^2$, nikoliv pouze v prvním kvadrantu jako v příkladu na str. 15.

Parametrické vyjádření okrajové podmínky je

$$x = \sigma, \quad y = 0, \quad u = \sigma^2, \qquad \sigma \geq 0.$$

Řešíme charakteristický systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = y,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -x,$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = x^2 + y^2$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = \sigma, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = \sigma^2.$$

Jeho řešení je

$$x = \sigma \sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right), \quad y = \sigma \cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right), \quad u = (s+1)\sigma^2. \tag{1.33}$$

První dvě rovnosti nejprve umocníme na druhou a sečteme, dostaneme

$$\sigma^2 = x^2 + y^2,$$

poté je vydělíme a dostaneme

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(s + \frac{\pi}{2}\right).$$

Tato jednoduchá goniometrická rovnice pro neznámou $s + \frac{\pi}{2}$ má řešení

$$s + \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + k\pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z},$$

tedy $s = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + (2k-1)\frac{\pi}{2}$. Dosazením do pravé strany třetí rovnosti v (1.33) dostaneme

$$(x^2+y^2)\left(1 + (2k-1)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right).$$

V tomto vyjádření však zůstává neurčený parametr k a navíc tato formule je pro $y = 0$ nedefinovaná, dokonce ani nemá limitu pro $y \to 0$. Pro $x > 0$ totiž platí

$$\lim_{y\to 0+} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{y\to 0-} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = -\frac{\pi}{2}.$$

Aby byla splněna okrajová podmínka, mělo by pro $x > 0$ platit

$$x^2 = \lim_{y\to 0+} \left(x^2 + y^2\right) \left(1 + (2k-1)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) = x^2 \left(1 + (2k-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = x^2(1 + k\pi),$$

tedy $k = 0$, a současně

$$x^2 = \lim_{y\to 0-} \left(x^2 + y^2\right) \left(1 + (2k-1)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) = x^2\big(1 + (k-1)\pi\big),$$

tedy $k = 1$. Jinak řečeno, na množině $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}$ je řešení dané okrajové úlohy tvaru

$$u(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \left(1 - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)$$

a na množině $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\right\}$ tvaru

$$u(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \left(1 + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right).$$

Tato vyjádření lze jednotně zapsat formulí

$$u(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \left(1 + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y\right).$$

Takto definovaná funkce je řešením dané okrajové úlohy na množině $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, 0) : x < 0\}$.

Podívejme se ještě jednou na parametrické vyjádření řešení dané úlohy. Rovnostmi (1.33) jsou parametrickým vyjádřením plochy v prostoru, která může připomínat šroubovou plochu s osou šroubování u (při fixované hodnotě σ se jedná o šroubovici, tj. prostorovou křivku, která „obíhá“ osu u, celou ji oběhne při nárůstu parametru s o hodnotu 2π a po jedné „otočce“ vystoupá o hodnotu σ^2).

Řešení charakteristického systému s počátečními podmínkami tedy vyjadřuje diferencovatelnou varietu, která je lokálně grafem řešení rovnice, křivka vyjadřující okrajovou podmínku přitom na této varietě leží. ■

1.1.5 Okrajová úloha pro obecnou rovnici

Budeme hledat řešení rovnice (1.14) s okrajovou podmínkou (1.32). Abychom zjednodušili zápis, zavedeme označení

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.34}$$

a rovnici zapíšeme jako

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \tag{1.35}$$

Pro řešení rovnic lineárních v prvních derivacích se ukázal jako užitečný pojem charakteristiky. Je to rovinná křivka s parametrickým vyjádřením

$$x = x(s), \quad y = y(s), \qquad s \in I,$$

která je řešením charakteristického systému, tj. autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x, y).$$

V případě rovnice (1.17) je na charakteristice řešení konstantní. V případě rovnice (1.24) s nenulovou pravou stranou jsme zavedli charakteristickou křivku v prostoru. Je to křivka, která leží na grafu řešení rovnice (1.24) a její průmět do roviny souřadnic x, y je charakteristikou. Jinak řečeno, charakteristická křivka určuje v každém bodě $\bigl(x(s), y(s)\bigr)$ charakteristiky funkční hodnotu $u\bigl(x(s), y(s)\bigr)$ řešení rovnice (1.24). Charakteristická křivka je trajektorií autonomního systému

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x, y, u).$$

Rovnici (1.24) lineární v derivacích přepíšeme s použitím označení (1.34) ve tvaru

$$a(x, y)p + b(x, y)q - f(x, y, u) = 0.$$

V případě této rovnice je tedy $F(x, y, u, p, q) = a(x, y)p + b(x, y)q - f(x, y, u)$ a platí

$$a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, u, p, q), \quad b(x, y) = \frac{\partial F}{\partial q}(x, y, u, p, q),$$

z čehož dále plyne

$$f(x, y, u) = p\frac{\partial F}{\partial p}(x, y, u, p, q) + q\frac{\partial F}{\partial q}(x, y, u, p, q),$$

neboť je splněna rovnice (1.24). Charakteristický systém příslušný k rovnici (1.24) tedy můžeme stručně zapsat

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = F_p, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = F_q, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = pF_p + qF_q. \tag{1.36}$$

Tyto výsledky zobecníme pro rovnici (1.14).

Řešení obecné rovnice vyjádříme tak, že každému bodu charakteristiky přiřadíme hodnotu řešení u a hodnoty obou parciálních derivací p a q. Dostaneme tak křivku v pětirozměrném prostoru, která má parametrické vyjádření

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s), \quad p = p(s), \quad q = q(s), \qquad s \in I; \tag{1.37}$$

nazýváme ji *charakteristický pruh rovnice* (1.14). Ten samozřejmě splňuje rovnici (1.35), tj.

$$F\bigl(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\bigr) = 0, \tag{1.38}$$

a budeme požadovat, aby funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$ také splňovaly systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.36). Derivováním rovnosti (1.38) podle parametru s dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F\bigl(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\bigr) &= F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + F_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + F_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \\ &= F_xF_p + F_yF_q + F_u(pF_p + qF_q) + F_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \\ &= \left(F_x + pF_u + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right)F_p + \left(F_y + qF_u + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)F_q. \end{aligned}$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = -\left(F_x + pF_u\right), \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = -\left(F_y + qF_u\right). \tag{1.39}$$

Provedené úvahy naznačují, že za *charakteristický systém příslušný k rovnici* (1.35) můžeme považovat systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.36), (1.39).

Ještě určíme počáteční podmínky tak, aby řešení charakteristického systému vyjadřovalo řešení počáteční úlohy (1.14), (1.32). Stejně, jako v případě rovnice lineární v derivacích položíme

$$x(0) = x_0 = X(\sigma), \quad y(0) = y_0 = Y(\sigma), \quad u(0) = u_0 = g(\sigma).$$

Počáteční hodnota charakteristického pruhu musí splňovat rovnici (1.35), tj.

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0. \tag{1.40}$$

Dále pro počáteční hodnoty souřadnic p a q charakteristického pruhu platí

$$p_0 = u_x(x_0, y_0) = u_x\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big), \quad q_0 = u_y(x_0, y_0) = u_y\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big).$$

Nyní přepíšeme třetí rovnost z okrajové podmínky (1.32) ve tvaru $g(\sigma) = u\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big)$ a zderivujeme podle parametru σ. Dostaneme

$$g'(\sigma) = p_0 X'(\sigma) + q_0 Y'(\sigma). \tag{1.41}$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout jako **algoritmus** pro hledání řešení okrajové úlohy (1.14), (1.32): Rovnici přepíšeme do tvaru (1.35) a přiřadíme jí charakteristický systém obyčejných autonomních rovnic (1.36), (1.39) s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0 = X(\sigma), \quad y(0) = y_0 = Y(\sigma), \quad u(0) = u_0 = g(\sigma), \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0,$$

kde hodnoty p_0 a q_0 jsou řešením soustavy rovnic (1.40), (1.41). První tři složky

$$x = x(s, \sigma), \quad y = y(s, \sigma), \quad u = u(s, \sigma) \tag{1.42}$$

řešení počáteční úlohy pro charakteristický systém vyjadřují parametrické vyjádření (grafu) řešení u dané okrajové úlohy. Pokud lze z prvních dvou rovností (1.42) vyjádřit parametry s, σ pomocí souřadnic x, y, tj. vyjádřit $s = s(x, y)$, $\sigma = \sigma(x, y)$, dosadíme tyto výrazy do třetí rovnosti (1.42) a dostaneme tak explicitní vyjádření řešení dané okrajové úlohy.

Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$u_x^2 - u_y^2 = 4u,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(\cos\sigma, \sin\sigma) = \cos 2\sigma$$

V tomto případě je

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 - q^2 - 4u,$$

takže

$$F_x = F_y = 0, \quad F_u = -4, \quad F_p = 2p, \quad F_q = -2q,$$

$$pF_p + qF_q = 2p^2 - 2q^2, \quad F_x + pF_u = -4p, \quad F_y + qF_u = -4q.$$

To znamená, že charakteristický systém je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2p, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -2q, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 2(p^2 - q^2), \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = 4p, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = 4q.$$

Dvě poslední rovnice jsou obyčejné lineární homogenní rovnice s konstantním koeficientem. Jejich řešení s obecnými počátečními podmínkami tedy je

$$p = p(s) = p_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad q = q(s) = q_0 \mathrm{e}^{4s}.$$

Tyto výrazy dosadíme do prvních tří rovnic charakteristického systému. Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2p_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -2q_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 2(p_0^2 - q_0^2)\mathrm{e}^{8s}$$

a po integraci

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2}p_0\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right), \quad y = y_0 - \tfrac{1}{2}q_0\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right), \quad u = u_0 + \tfrac{1}{4}(p_0^2 - q_0^2)\left(\mathrm{e}^{8s} - 1\right). \tag{1.43}$$

Parametrické vyjádření počátečních podmínek je $X(\sigma) = \cos\sigma$, $Y(\sigma) = \sin\sigma$, $g(\sigma) = \cos 2\sigma$, takže počáteční hodnoty x_0, y_0 a u_0 jsou dány rovnostmi

$$x_0 = \cos\sigma, \quad y_0 = \sin\sigma, \quad u_0 = \cos 2\sigma \tag{1.44}$$

a počáteční hodnoty p_0 a q_0 splňují rovnice (1.40), (1.41), konkrétně

$$4\cos 2\sigma = p_0^2 - q_0^2, \qquad 2\sin 2\sigma = p_0 \sin\sigma - q_0\cos\sigma. \tag{1.45}$$

Bezprostředním dosazením ze třetí rovnosti (1.44) a první rovnosti (1.45) do třetí rovnosti (1.43) dostaneme

$$u = \mathrm{e}^{8s}\cos 2\sigma. \tag{1.46}$$

Soustava rovnic (1.45) je tvořena jednou lineární a jednou kvadratickou rovnicí pro dvě neznámé p_0 a q_0. Má tedy dvě řešení.

První řešení soustavy (1.45) je $p_0 = 2\cos\sigma$, $q_0 = -2\sin\sigma$. Dosazením do prvních dvou rovností (1.43) dostaneme

$$x = \mathrm{e}^{4s}\cos\sigma, \qquad y = \mathrm{e}^{4s}\sin\sigma.$$

Umocněním těchto rovností na druhou a jejich odečtením dostaneme

$$x^2 - y^2 = \mathrm{e}^{8s}\cos 2\sigma.$$

Porovnáním se vztahem (1.46) vidíme, že jedno řešení dané okrajové úlohy je dáno výrazem

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Druhé řešení soustavy algebraicko-goniometrických rovnic (1.45) je

$$p_0 = -\frac{2\cos\sigma(1 + 2\sin^2\sigma)}{\cos 2\sigma}, \qquad q_0 = -\frac{2\sin\sigma(1 + 2\cos^2\sigma)}{\cos 2\sigma}.$$

Po dosazení těchto výrazů a výrazů (1.44) do rovností (1.43) dostaneme

$$x = \cos\sigma\left(1 - \frac{1 + 2\sin^2\sigma}{\cos 2\sigma}\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right)\right) = \frac{\cos\sigma}{\cos 2\sigma}\left(2 - (1 + 2\sin^2\sigma)\mathrm{e}^{4s}\right),$$

$$y = \sin\sigma\left(1 + \frac{1 + 2\cos^2\sigma}{\cos 2\sigma}\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right)\right) = \frac{\sin\sigma}{\cos 2\sigma}\left(-2 + (1 + 2\cos^2\sigma)\mathrm{e}^{4s}\right).$$

Spolu s rovností (1.46) tak máme vyjádřeno druhé řešení dané úlohy v parametrickém tvaru. Vzhledem k tomu, že ve jmenovateli zlomků je výraz $\cos 2\sigma$, omezíme se na hodnoty parametru σ z intervalu $\left(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right)$. ■

Významným speciálním případem obecné rovnice (1.14) je rovnice tvaru

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u), \tag{1.47}$$

kde a, b jsou spojité funkce tří proměnných. Koeficienty a, b u prvních parciálních derivací hledané funkce na této funkci závisí. Proto výraz na pravé straně rovnice (1.47) nevyjadřuje lineární operátor na množině diferencovatelných funkcí dvou proměnných, ale je pouze „lineárnímu podobný“ nebo „jakoby lineární“. Proto se rovnice (1.47) nazývá *quasilineární.*

V případě quasilineární rovnice (1.47) je

$$F(x, y, u, p, q) = a(x, y, u)p + b(x, y, u)q - f(x, y, u),$$

takže $F_p = a(x,y,u)$, $F_q = b(x,y,u)$, $pF_p + qF_q = f(x,y,u)$. První tři rovnice charakteristického systému (1.36) příslušného k rovnici (1.47) jsou proto tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y,u), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y,u), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x,y,u). \tag{1.48}$$

Tyto rovnice nezávisí na (pomocných) souřadnicích p, q charakteristického pruhu. Pro řešení quasilineární rovnice (1.47) tedy nepotřebujeme rovnice (1.39). Řešení rovnice (1.47) s okrajovou podmínkou (1.32) v parametrickém tvaru tedy dostaneme jako řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.48) s počátečními podmínkami

$$x(0) = X(\sigma), \qquad y(0) = Y(\sigma), \qquad u(0) = g(\sigma).$$

Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$(y+u)\frac{\partial u}{\partial x} + (u+x)\frac{\partial u}{\partial y} = x + y,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(x, -x) = 2x.$$

Charakteristický systém řešené rovnice je tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= \phantom{x+{}} y + u,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= x \phantom{{}+y} + u,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= x + y.
\end{aligned}$$

Jedná se tedy o systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Její vlastní čísla a příslušné vlastní vektory jsou

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 2, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ -1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že obecné řešení charakteristického systému je

$$\begin{aligned}
x(s) &= A\mathrm{e}^{2s} + B\mathrm{e}^{-s},\\
y(s) &= A\mathrm{e}^{2s} + C\mathrm{e}^{-s},\\
u(s) &= A\mathrm{e}^{2s} - (B+C)\mathrm{e}^{-s}.
\end{aligned}$$

Okrajovou podmínku přepíšeme do tvaru $x = \sigma$, $y = -\sigma$, $u = 2\sigma$, ze kterého dostaneme počáteční podmínky pro charakteristický systém

$$x(0) = \sigma, \qquad y(0) = -\sigma, \qquad u(0) = 2\sigma.$$

Řešení charakteristického systému s těmito počátečními podmínkami je

$$\begin{aligned}
x(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} + \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} + 1\right),\\
y(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} - \tfrac{5}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} - 5\right),\\
u(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} + \tfrac{4}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} + 4\right).
\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovností postupně vyjádříme

$$2\mathrm{e}^{3s} = \frac{5x+y}{x-y}, \qquad \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \frac{x-y}{6}$$

a dosadíme do rovnosti třetí. Po úpravě pak dostaneme řešení dané úlohy

$$u(x,y) = \frac{3x-y}{2}.$$

■

1.2 Rovnice v n nezávisle proměnných

Budeme se zabývat rovnicí

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1.49}$$

kde F je spojitá funkce $2n+1$ proměnných definovaná na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$, která má neprázdný vnitřek. Při označení vektoru nezávisle proměnných $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ a gradientu

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^\mathsf{T}$$

můžeme rovnici (1.49) zapsat úsporněji

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\right) = 0.$$

Klasické (silné) řešení rovnice (1.49) je spojitě diferencovatelná funkce u definovaná na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ platí

$$\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x})\big) \in G \quad \text{a} \quad F\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x})\big) = 0.$$

1.2.1 Rovnice lineární v derivacích s nulovou pravou stranou

Rovnice

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

stručněji

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{1.50}$$

nebo ve vektorovém zápisu

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}\nabla u = 0$$

je nejjednodušším speciálním případem obecné rovnice (1.49). Jedná se o bezprostřední zobecnění rovnice (1.17) do vícerozměrného prostoru. Proto budeme její řešení hledat způsobem, který je analogií metody charakteristik popsané v 1.1.2. Rovnici (1.50) přiřadíme autonomní systém n obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.51}$$

Tento systém se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (1.50) a jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (1.50). Charakteristika je hladká křivka v n-rozměrném prostoru, lze ji zapsat parametrickými rovnicemi

$$x_i = x_i(s), \quad s \in I, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.52}$$

kde I je nějaký reálný interval. Nechť funkce $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je řešením rovnice (1.51). Pro derivaci funkce u na charakteristice (1.52) podle parametru s platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big)}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\big(\boldsymbol{x}(s)\big)}{\partial x_i} a_i\big(\boldsymbol{x}(s)\big) = 0.$$

To znamená, že na charakteristikách je řešení rovnice (1.50) konstantní. Odtud plyne, že řešení rovnice (1.50) můžeme získat tak, že na každé charakteristice zadáme hodnotu funkce u.

Charakteristika rovnice (1.50) je hladkou křivkou v n-rozměrném prostoru. Takovou křivku můžeme zapsat buď parametricky rovnostmi (1.52) nebo obecně jako průnik $n-1$ nadploch (tj. $(n-1)$-rozměrných diferencovatelných variet) v n-rozměrném prostoru, tedy rovnostmi

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{1.53}$$

kde φ_i jsou diferencovatelné funkce n proměnných. Rovnosti (1.53) někdy můžeme získat z parametrického vyjádření (1.52) charakteristik eliminací parametru s.

Jiná možnost, jak získat obecné vyjádření (1.53) charakteristik rovnice (1.50) spočívá ve vydělení rovnic charakteristického systému (1.51); dostaneme tak $n-1$ obyčejných diferenciálních rovnic, např.

$$\frac{\mathrm{d}x_{i+1}}{\mathrm{d}x_i} = \frac{a_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \qquad n = 1, 2, \dots, n-1,$$

nebo

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_1} = \frac{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \qquad n = 2, 3, \dots, n.$$

Obecné řešení těchto systémů rovnic, které závisí na $n-1$ konstantách, zapíšeme v implicitním tvaru (1.53). Předchozí obyčejné diferenciální rovnice můžeme také jednotně zapsat ve tvaru rovností diferenciálů

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \tag{1.54}$$

Hodnotu funkce u, která je řešením lineární rovnice (1.50), vyjádříme na charakteristikách pomocí diferencovatelné funkce Φ, která je funkcí $n-1$ proměnných. Řešení rovnice (1.50) tedy píšeme ve tvaru

$$u(\boldsymbol{x}) = \Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big). \tag{1.55}$$

Provedené úvahy ukazují, že pro rovnici (1.50) lze zformulovat výsledek, který je bezprostředním zobecněním Tvrzení 1 platného pro rovnice ve dvou nezávisle proměnných.

Tvrzení 2. Nechť funkce $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, jsou diferencovatelné funkce takové, že rovnosti (1.53) jsou implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.51) příslušného k rovnici (1.50) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení sytému obyčejných diferenciálních rovnic (1.54)). Je-li Φ libovolná diferencovatelná funkce $n-1$ proměnných taková, že její definiční obor obsahuje kartézský součin oborů hodnot funkcí φ_i, pak funkce u definovaná rovností (1.55) je řešením rovnice (1.50).

Důkaz: Na řešení (1.52) charakteristického systému (1.51) jsou splněny rovnosti (1.53). Tedy pro každý index j platí

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \varphi_j\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big)}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i(s)}{\mathrm{d}s} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big)}{\partial x_i} a_i\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big),$$

stručně

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} a_i(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i},$$

takže

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial \varphi_j} \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = 0.$$

$\square$

Povšimněme si, že na levé straně rovnice (1.50) je skalární součin vektoru $\boldsymbol{a}$ s gradientem hledané funkce u. Gradient je lineární zobrazení, skalární součin také. Složení lineárních zobrazení je lineární. Odtud plyne, že rovnice (1.50) také splňuje *princip superpozice:* Jsou-li $u_1, u_2, \ldots, u_k$ řešení rovnice (1.50), pak také jejich libovolná lineární kombinace je řešením této rovnice. Jinak řečeno, množina všech řešení rovnice (1.50) tvoří reálný vektorový prostor.

Příklad

$$(y - 2x - 2z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2y + 2z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y + y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Příslušný charakteristický systém

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= -2x + y - 2z, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= x - 2y + 2z, \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} &= x - y + z
\end{aligned}$$

je lineární homogenní systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí. Můžeme tedy explicitně napsat jeho řešení

$$\begin{aligned}
x &= (2As + 2B)\mathrm{e}^{-s}, \\
y &= (-2As + 2C)\mathrm{e}^{-s}, \\
z &= (-2As + C - B - A)\mathrm{e}^{-s};
\end{aligned}$$

přitom A, B, C jsou integrační konstanty. Druhou rovnost vydělíme rovností první a dostaneme

$$\frac{y}{x} = \frac{-As + C}{As + B}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x+y}{x} = \frac{B + C}{As + B},$$

třetí rovnost vydělíme první a dostaneme

$$\frac{z}{x} = \frac{-2As + C - B - A}{As + B}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x+z}{x} = \frac{C + B - A}{2(As + B)},$$

tyto rovnosti navzájem vydělíme a dostaneme

$$\frac{x+y}{x+z} = const.$$

Analogicky (první a třetí rovnost tentokrát dělíme druhou) dostaneme

$$\frac{x+y}{z-y} = const.$$

Řešení je tedy tvaru $u(x,y) = \Phi\left(\frac{x+y}{x+z}, \frac{x+y}{z-y}\right)$, kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. ■

Na charakteristikách je řešení rovnice (1.50) konstantní. Proto konkrétní řešení (partikulární řešení) této rovnice můžeme získat tak, že na „začátku" každé charakteristiky určíme funkční hodnotu řešení. „Začátky" charakteristik lze určit tak, že v prostoru zavedeme nějakou nadplochu ($(n-1)$-rozměrnou varietu), která protíná každou charakteristiku právě jednou; průsečík této nadplochy s charakteristikou budeme považovat za „začátek charakteristiky". Nadplocha s uvedenou vlastností se nazývá *okraj pro rovnici* (1.50).

Okraj může být zadán parametrickými rovnicemi; poněvadž se jedná o $(n-1)$-rozměrnou nadplochu, závisí na $n-1$ parametrech. Parametrické rovnice okraje tedy jsou

$$x_i = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde parametry $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ jsou z nějaké podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$, která má neprázdný vnitřek. Průsečík konkrétní charakteristiky s okrajem je určen konkrétní sadou parametrů. Hodnoty řešení u rovnice (1.50) tedy zadáváme pro tuto sadu parametrů. Jinak řečeno, zadáváme *okrajovou podmínku* ve tvaru

$$u\big(X_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}), X_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}), \ldots, X_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})\big) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}). \tag{1.56}$$

Okrajovou úlohu, tj. rovnici (1.50) s podmínkou (1.56), řešíme tak, že k charakteristickému systému přidáme počáteční podmínky

$$x_i(0) = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.57}$$

Jednotlivé složky řešení Cauchyovy úlohy (1.51) závisí na nezávisle proměnné s a na parametrech $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, tj.

$$x_i = x_i(s, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}). \tag{1.58}$$

Rovnosti (1.58) a rovnost (1.56) přepsaná do tvaru $u = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ představují parametrické vyjádření (grafu) řešení okrajové úlohy (1.50), (1.56).

Na rovnosti (1.58) se také můžeme dívat jako na systém n rovnic pro n neznámých, kterými jsou parametry $s, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$. Pokud se z něho podaří explicitně vyjádřit parametry okraje $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ v závislosti na souřadnicích $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj.

$$\sigma_j = \sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

pak je lze dosadit do okrajové podmínky (1.56). Takovým způsobem dostaneme řešení okrajové úlohy (1.50), (1.56) ve tvaru

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g\big(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$(z+y-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x-y)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

s okrajovou podmínkou

$$u(x, y, a) = 4a^4xy,$$

kde a je nějaká reálná konstanta.

Charakteristický systém (1.51) je v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= -x+y+z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= x-y+z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} &= z.\end{aligned}$$

Jedná se o lineární homogenní systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, jeho obecné řešení je tvaru

$$\begin{aligned}x &= A\mathrm{e}^s + B\mathrm{e}^{-2s} + C,\\ y &= A\mathrm{e}^s - B\mathrm{e}^{-2s} + C,\\ z &= A\mathrm{e}^s.\end{aligned}$$

Počáteční podmínky (1.57) odpovídající dané okrajové podmínce jsou

$$x(0) = \sigma_1, \quad y(0) = \sigma_2, \quad u(0) = a.$$

Pro integrační konstanty A, B, C tak dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}A+B+C &= \sigma_1,\\ A-B+C &= \sigma_2,\\ A &= a,\end{aligned}$$

která má řešení $A = a$, $B = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $C = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a$. Řešení (1.58) Cauchyovy úlohy pro charakteristický systém je

$$\begin{aligned}x &= a\mathrm{e}^s + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{e}^{-2s} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a,\\ y &= a\mathrm{e}^s - \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{e}^{-2s} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a,\\ z &= a\mathrm{e}^s.\end{aligned}$$

Bezprostředně vidíme $a\mathrm{e}^s = z$ a tedy $\mathrm{e}^{-2s} = a^2/z^2$. Po dosazení do prvních dvou rovností dostaneme systém rovnic pro parametry σ_1, σ_2 ve tvaru

$$\begin{aligned}x &= z + \frac{a^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2z^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - a,\\ y &= z - \frac{a^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2z^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - a,\end{aligned}$$

nebo po úpravě

$$\begin{aligned}(z^2 + a^2)\sigma_1 + (z^2 - a^2)\sigma_2 &= 2z^2(x - z + a),\\ (z^2 - a^2)\sigma_1 + (z^2 + a^2)\sigma_2 &= 2z^2(y - z + a).\end{aligned}$$

Determinant této soustavy lineárních rovnic je roven $4a^2z^2$, takže pro $a \neq 0$ dostaneme

$$\sigma_1 = \frac{1}{2a^2}\big((x + y - 2z + 2a)a^2 + (x - y)z^2\big), \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2a^2}\big((x + y - 2z + 2a)a^2 - (x - y)z^2\big).$$

Parametrické vyjádření okrajové podmínky (1.56) je

$$u(\sigma_1, \sigma_2, a) = 4a^4\sigma_1\sigma_2.$$

Do této rovnosti dosadíme vypočítané hodnoty parametrů σ_1, σ_2 a dostaneme řešení dané úlohy ve tvaru

$$u(x, y, z) = a^4(x + y - 2z + 2a)^2 - (x - y)^2z^4.$$

Tato funkce je řešením úlohy pro nenulovou hodnotu parametru a. V případě $a = 0$ je řešením nulová funkce, $u \equiv 0$. ■

1.2.2 Quasilineární rovnice

Řešení rovnice

$$a_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=f(x_1,\dots,x_n,u),$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(\boldsymbol{x},u) \tag{1.59}$$

případně ve vektorovém zápisu

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},u)^{\mathsf{T}}\nabla u=f(\boldsymbol{x},u),$$

budeme hledat v implicitním tvaru

$$V(\boldsymbol{x},u)=0, \tag{1.60}$$

kde V je nějaká diferencovatelná funkce $n+1$ proměnných.

Budeme si představovat, že řešení známe. Nechť tedy $u=u(\boldsymbol{x})$ je řešení rovnice (1.59), které je implicitně popsáno rovností (1.60). Pak platí

$$V\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)=0.$$

Tuto rovnost parciálně zderivujeme podle každé z proměnných x_i. Dostaneme

$$\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i}+\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Dále vynásobíme i-tou rovnost výrazem $a_i\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)$ a výsledné rovnosti sečteme. Výsledkem je rovnost

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u}=0$$

a poněvadž funkce u je řešením rovnice (1.59), můžeme tuto rovnost upravit na tvar

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i}+f\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u}=0.$$

Vidíme, že funkce V je řešením rovnice v $n+1$ nezávisle proměnných, která je lineární v derivacích a má nulovou pravou stranu. Stručně: funkce V, která rovností (1.60) implicitně popisuje řešení quasilineární rovnice (1.59), je řešením parciální diferenciální rovnice

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_i}+f(\boldsymbol{x},u)\frac{\partial V}{\partial u}=0.$$

To je rovnice, kterou jsme se zabývali v předchozí části. Máme tedy následující **algoritmus** pro hledání řešení quasilineární rovnice (1.59).

K rovnici (1.59) přiřadíme *charakteristický systém* obyčejných autonomních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}&=a_i(x_1,\dots,x_n,u),\quad i=1,2,\dots,n,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}&=f(x_1,\dots,x_n,u).\end{aligned} \tag{1.61}$$

Jeho trajektorie vyjádříme v obecném tvaru jako průnik n nadploch

$$\varphi_j(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=c_j,\quad j=1,2,\dots,n.$$

Řešení rovnice (1.59) je pak implicitně dáno rovností

$$\Phi\bigl(\varphi_1(x_1,\dots,x_n,u),\varphi_2(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n,u)\bigr)=0,$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce n proměnných.

Rovnici (1.59) s okrajovou podmínkou (1.56) řešíme tak, že najdeme řešení charakteristického systému (1.61) s počátečními podmínkami (1.57) doplněnými o podmínku

$$u(0)=g(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}).$$

Toto řešení závisí na nezávisle proměnné s a parametrech $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}$, tj.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(s,\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n), \quad i=1,2,\dots,n\\ u &= u(s,\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n). \end{aligned}$$

Těmito rovnostmi je parametricky zadáno řešení okrajové úlohy (1.59), (1.56). V některých jednoduchých případech lze parametry $s,\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}$ eliminovat a řešení úlohy vyjádřit explicitně.

Povšimněme si, že algoritmus řešení okrajové úlohy (1.59), (1.56) je bezprostředním zobecněním postupu při řešení úlohy (1.47), (1.32) pro funkci ve dvou nezávisle proměnných.

1.3 Evoluční rovnice

Za evoluční rovnice považujeme takové parciální diferenciální rovnice, u nichž jednu z nezávisle proměnných hledané funkce interpretujeme jako čas; tuto proměnnou budeme považovat za první a značit ji symbolem t. Evoluční rovnice prvního řádu jsou tedy obecně rovnice tvaru

$$F\left(t,x_1,x_2,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0.$$

Pro zjednodušení zápisu opět označíme vektor „prostorových“[6] proměnných $x_1,x_2,\dots,x_n$ symbolem $\boldsymbol{x}$ a vektor parciálních derivací hledané funkce podle prostorových proměnných zapíšeme jako gradient ∇u. Předchozí rovnici tedy stručněji zapíšeme ve tvaru

$$F\left(t,\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial t},\nabla u\right)=0.$$

Dále budeme předpokládat, že derivaci hledané funkce podle času můžeme z této rovnice vyjádřit. Budeme se tedy zabývat rovnicemi tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(t,\boldsymbol{x},u,\nabla u). \tag{1.62}$$

(Klasické) řešení rovnice (1.62) je diferencovatelná funkce $u: J\times\Omega\to\mathbb{R}$, která pro všechna $(t,\boldsymbol{x})\in J\times\Omega$ splňuje rovnost

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})=f\bigl(t,\boldsymbol{x},u(t,\boldsymbol{x}),\nabla u(t,\boldsymbol{x})\bigr);$$

přitom $J\subseteq\mathbb{R}$ je interval a $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ je množina s neprázdným vnitřkem.

Počáteční podmínka pro rovnici (1.62) je tvaru

$$u(t_0,\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,$$

kde $t_0\in J$.

[6] Obor nezávisle proměnných $x_1,x_2,\dots,x_n$ obecně nemusí být nějaký geometrický prostor, jak tomu obvykle bývá ve fyzikálních aplikacích. Dále již budeme uvozovky vynechávat.

Přirozeným okrajem oboru Ω prostorové proměnné $\boldsymbol{x}$ je jeho hranice $\partial\Omega$. Obecněji budeme však okrajem Γ rozumět $(n-1)$-rozměrnou nadplochu v Ω. Zapíšeme ho parametrickými rovnicemi

$$\Gamma: \; x_i = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Parametry $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ jsou z nějaké podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$ s neprázdným vnitřkem. *Okrajová podmínka* pro rovnici (1.62) obvykle určuje hodnoty hledané funkce na uvažovaném okraji. V takovém případě je tvaru

$$u\big(t, X_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}), \ldots, X_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})\big) = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}), \quad t \in J. \tag{1.63}$$

Jiný typ okrajové podmínky váže hodnoty hledané funkce na okraji s ostatními funkčními hodnotami. Formálně zapsáno

$$u\big(t, X_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}), \ldots, X_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})\big) = \Psi\big(u(t, \cdot)\big), \quad t \in J,$$

nebo stručně

$$u(t, \boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}\in\Gamma} = \Psi\big(u(t, \cdot)\big), \quad t \in J, \tag{1.64}$$

kde Ψ je zobrazení z množiny diferencovatelných funkcí definovaných na množině Ω do množiny reálných čísel (Φ je funkcionál). Příkladem okrajové podmínky tohoto tvaru je podmínka (1.11) v úvodním modelu vývoje věkově strukturované populace.

Množina diferencovatelných funkcí definovaných na oboru Ω tvoří vektorový prostor nad polem reálných čísel. Pokud také množina B všech funkcí $u : J \times \Omega \to \mathbb{R}$, které splňují okrajovou podmínku tvoří vektorový prostor, řekneme, že okrajová podmínka je *homogenní*. Podrobněji: okrajová podmínka (1.63), resp. (1.64), je homogenní, pokud ji splňuje nulová funkce $u \equiv 0$ a dále

1. jestliže funkce u splňuje podmínku (1.63), resp. (1.64), pak také funkce αu splňuje tutéž podmínku pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. jestliže funkce u, v splňují podmínku (1.63), resp. (1.64), pak také funkce $u+v$ splňuje tutéž podmínku.

Pokud je funkcionál Ψ v podmínce (1.64) lineárním zobrazením, pak je okrajová podmínka (1.64) homogenní. Je-li funkce ψ v podmínce (1.63) nulová, $\psi \equiv 0$, pak je také okrajová podmínka (1.63) homogenní. (Promyslete si, že v takovém případě je podmínka (1.63) s pravou stranou ve tvaru funkce speciálním případem podmínky (1.64) s pravou stranou ve tvaru funkcionálu.) To jsou obvyklé případy homogenní okrajové podmínky.

1.3.1 Počáteční úloha pro evoluční lineární rovnici v jedné prostorové proměnné

Lineární rovnice byly již obecně zavedeny v 1.1.1. Tam byly také uvedeny jejich základní vlastnosti. Uvažujme nyní specielně lineární evoluční rovnici s konstantním koeficientem u prostorové derivace, tj. rovnici tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b(t,x)u + f(t,x), \tag{1.65}$$

kde $a \neq 0$, $b, f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Tuto obecně nehomogenní rovnici lze řešit transformací na kanonický tvar, sr. 1.1.3. Tento postup použijeme pouze pro rovnici homogenní. Pro řešení rovnice nehomogenní ukážeme alternativní postup, který umožňuje interpretovat některé rysy procesu, který je rovnicí modelován. Nakonec využijeme skutečnosti, že množina řešení nehomogenní rovnice tvoří afinní prostor, tj. že řešení nehomogenní rovnice lze zapsat jako řešení homogenní rovnice s obecnou počáteční podmínkou a řešení nehomogenní rovnice s nějakou speciální počáteční podmínkou.

Nejprve budeme řešit homogenní rovnici s obecnou počáteční podmínkou, tj. úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial t} + b(t,x)u, \quad \text{pro } t > 0,\; x \in \mathbb{R}, \tag{1.66}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \tag{1.67}$$

Charakteristická rovnice příslušná k uvažované parciální diferenciální rovnici je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a.$$

Řešení této obyčejné diferenciální rovnice v implicitním tvaru je

$$x + at = const.$$

Transformace $\tau = t$, $\xi = x + at$ převede rovnici (1.66) na její kanonický tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = b(\tau, \xi - a\tau)u.$$

Řešení této rovnice (což je v podstatě obyčejná lineární homogenní rovnice závislá na jednom parametru ξ) je dáno rovností

$$u(\tau, \xi) = u(0, \xi)\mathrm{e}^{\int_0^{\tau} b(s, \xi - as)\mathrm{d}s}.$$

Podle podmínky (1.67) je $u(0, \xi) = \varphi(\xi)$. Řešení počáteční úlohy (1.66), (1.67) v původních nezávisle proměnných tedy je

$$u(t, x) = \varphi(x + at)\mathrm{e}^{\int_0^t b\left(s, x + a(t-s)\right)\mathrm{d}s} = \varphi(x + at)\mathrm{e}^{\int_0^t b(t-s, x+as)\mathrm{d}s}.$$

Integrál v exponentu je vlastně křivkovým integrálem z funkce b přes úsečku (část charakteristiky) spojující body (t, x) a $(0, x + at)$.

Povšimněme si ještě speciálního případu rovnice (1.66), kdy funkce b je konstantní. Rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + bu$$

s počáteční podmínkou (1.67) má řešení

$$u(t, x) = \varphi(x + at)\mathrm{e}^{bt}.$$

Hodnotu $x + at$ můžeme interpretovat jako polohu bodu na prostorové ose, který má v čase $t = 0$ souřadnici x a pohybuje se rovnoměrně rychlostí a. Výraz $\varphi(x + at)$ si tedy můžeme představit jako graf funkce φ pohybující se rovnoměrně nad vodorovnou osou. Výraz e^{bt} tento graf deformuje ve svislém směru. Pro $b < 0$ je

$$\lim_{t\to\infty} u(t, x) = 0$$

pro každé x a každou ohraničenou počáteční funkci φ. Řešení počáteční úlohy pro lineární homogenní rovnici s konstantními koeficienty tedy v tomto případě modeluje postupující a postupně mizející vlnu; tato vlna postupuje při $a > 0$ v záporném směru osy x (tj. doleva), při $a < 0$ doprava. Pro $b > 0$ rovnice naopak představuje rostoucí postupující vlnu,

Snadno ověříme, že řešení počáteční úlohy pro homogenní rovnici s počáteční podmínkou v obecném okamžiku $t = \sigma$, tj. řešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b(t, x)u, \quad \text{pro } t > \sigma,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.68}$$

$$u(\sigma, x) = \varphi(x), \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}, \tag{1.69}$$

je tvaru

$$u(t, x) = \varphi\big(x + a(t - \sigma)\big)\mathrm{e}^{\int_0^{t-\sigma} b(t-s, x+as)\mathrm{d}s}.$$

Nyní vyřešíme nehomogenní rovnici s nulovou počáteční podmínkou, tj. úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b(t,x)u + f(t,x), \quad \text{pro } t>0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{1.70}$$

$$u(0,x) = 0, \qquad \text{pro } x\in\mathbb{R}. \tag{1.71}$$

Můžeme si představovat, že počáteční nulový stav veličiny u je v průběhu času narušován nějakým vlivem, který je popsán nehomogenitou f. Tyto vlivy se postupně nasčítají (integrují) do veličiny u. Přesněji řečeno, očekáváme, že řešení počáteční úlohy (1.70), (1.71) je tvaru

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma, \tag{1.72}$$

kde w je zatím neznámá funkce; budeme předpokládat, že w je diferencovatelná. Tato myšlenka se nazývá *Duhamelův princip.*

Funkce u definovaná rovností (1.72) splňuje počáteční podmínku (1.71) pro libovolnou funkci w. Budeme konkrétně funkci w hledat tak, aby funkce u splnila také rovnici (1.70).

Podle věty o derivaci integrálu platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w(t,x,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial x}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

takže po dosazení do rovnice (1.70) dostaneme

$$\int_0^t \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma) - a\frac{\partial w}{\partial x}(t,x,\sigma) - b(t,x)w(t,x,\sigma)\right)\mathrm{d}\sigma = f(t,x) - w(t,x,t). \tag{1.73}$$

Na výraz $w(t,x,\sigma)$ se můžeme dívat jako na funkci dvou proměnných t a x s parametrem σ. Pokud tato funkce splní pro každou kladnou hodnotu σ podmínky

$$\frac{\partial w(t,x,\sigma)}{\partial t} = a\frac{\partial w(t,x,\sigma)}{\partial x} + b(t,x)w(t,x,\sigma), \quad \text{pro } t>\sigma,\ x\in\mathbb{R},$$

$$w(\sigma,x,\sigma) = f(\sigma,x), \qquad \text{pro } x\in\mathbb{R},$$

pak splní také rovnost (1.73). Funkce w tedy může být zvolena jako řešení počáteční úlohy pro homogenní lineární rovnici s počáteční podmínkou v okamžiku $t=\sigma$. To je úloha typu (1.68), (1.69). Těmito úvahami dostáváme

$$w(t,x,\sigma) = f\big(\sigma, x + a(t-\sigma)\big)\mathrm{e}^{\int_0^{t-\sigma} b(t-s,x+as)\mathrm{d}s}.$$

Celkem máme řešení úlohy (1.70), (1.71) ve tvaru

$$u(t,x) = \int_0^t f\big(\sigma, x+a(t-\sigma)\big)\mathrm{e}^{\int_0^{t-\sigma} b(t-s,x+as)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\sigma = \int_0^t f(t-\sigma, x+a\sigma)\mathrm{e}^{\int_0^{\sigma} b(t-s,x+as)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\sigma.$$

Řešení nehomogenní rovnice s obecnou počáteční podmínkou je součtem řešení úlohy pro homogenní rovnici s obecnou počáteční podmínkou a řešení úlohy pro nehomogenní rovnici s nulovou počáteční podmínkou. Tedy řešení počáteční úlohy (1.65), (1.67) je tvaru

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \varphi(x+at)\mathrm{e}^{\int_0^t b(t-s,x+as)\mathrm{d}s} + \int_0^t f(t-\sigma,x+a\sigma)\mathrm{e}^{\int_0^\sigma b(t-s,x+as)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\sigma \\ &= \left(\varphi(x+at) + \int_0^t f(t-\sigma,x+a\sigma)\mathrm{e}^{-\int_\sigma^t b(t-s,x+as)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{e}^{\int_0^t b(t-s,x+as)\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

1.3.2 Autonomní rovnice

Pokud pravá strana rovnice (1.62) nezávisí explicitně na čase t, tj. pokud $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$, pak řekneme, že tato rovnice je *autonomní*. Autonomní evoluční parciální diferenciální rovnice prvního řádu je tedy rovnice tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\right). \tag{1.74}$$

Autonomní rovnice popisují procesy, které jsou invariantní vzhledem k posunutí v čase. Tuto vlastnost přesněji vyjadřuje následující:

Tvrzení 3. Nechť funkce $u = u(t, \boldsymbol{x})$ je řešením autonomní rovnice (1.74) a $t_0 \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak funkce v definovaná rovností $v(t, \boldsymbol{x}) = u(t + t_0, \boldsymbol{x})$ je také řešením rovnice (1.74), pro které platí $v(0, \boldsymbol{x}) = u(t_0, \boldsymbol{x})$.

Důkaz: Nejprve si povšimněme, že pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(t + t_0, \boldsymbol{x})$$

a tedy $\nabla v = \nabla u$. Dále, poněvadž funkce u je řešením rovnice (1.74), platí

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial u}{\partial t}(t + t_0, \boldsymbol{x}) = g\big(\boldsymbol{x}, u(t + t_0, \boldsymbol{x}), \nabla u(t - t_0, \boldsymbol{x})\big) = g\big(\boldsymbol{x}, v(t, \boldsymbol{x}), \nabla v(t, \boldsymbol{x})\big),$$

takže funkce v je také řešením rovnice (1.74). $\square$

Z uvedeného tvrzení plyne, že počáteční podmínku pro autonomní rovnici (1.74) lze bez újmy na obecnosti vždy uvažovat ve tvaru

$$u(0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1.75}$$

Okrajová podmínka pro autonomní rovnici (1.74) je opět tvaru (1.63).

Stacionární (nebo *rovnovážné*) řešení autonomní evoluční rovnice je takové, které nezávisí na čase. Pro stacionární řešení tedy platí $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, což vzhledem k (1.74) znamená, že stacionární řešení rovnice (1.74) je funkce $u = u(\boldsymbol{x})$ definovaná na množině Ω, která je současně řešením implicitní diferenciální rovnice

$$g(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) = 0.$$

Prostorově (nebo *strukturně*) *stabilizované* řešení autonomní evoluční rovnice je takové, které v průběhu času nemění tvar. Přesněji řečeno, je to takové řešení $u = u(t, \boldsymbol{x})$, pro které jsou grafy funkcí $u(t_1, \cdot\,)$, $u(t_2, \cdot\,)$ podobné geometrické útvary pro každá dvě $t_1, t_2 \in J$. Ještě jinak řečeno, prostorově stabilizované řešení rovnice (1.74) je řešení tvaru

$$u(t, \boldsymbol{x}) = T(t)X(\boldsymbol{x}),$$

kde $T : J \to \mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné funkce. Stacionární řešení autonomní evoluční rovnice je prostorově stabilizovaným řešením s konstantní časovou složkou T.

Uvažujme speciální rovnici (1.74) takovou, že její strana nezávisí explicitně na prostorových proměnných $\boldsymbol{x}$, tedy rovnici tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(u, \nabla u). \tag{1.76}$$

Předpokládejme dále, že funkce h je homogenní[7]. Prostorov stabilizované řešení $u = TX$ dosadíme do rovnice (1.76) a upravíme její pravou stranu,

$$T'X = h(TX, \nabla TX) = Th(X, \nabla X);$$

[7] Tj. pro každé $\kappa \in \mathbb{R}$ a všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ platí $h(\kappa\alpha, \kappa\boldsymbol{\beta}) = \kappa h(\alpha, \boldsymbol{\beta})$, kdykoliv jsou obě strany této rovnosti definovány.

přitom $'$ označuje obyčejnou derivaci podle proměnné t. Předchozí rovnost vydělíme součinem TX a dostaneme

$$\frac{T'}{T} = \frac{h(X, \nabla X)}{X}.$$

Výraz na levé straně této rovnosti závisí pouze na nezávisle proměnné t, nikoliv na $\boldsymbol{x}$, výraz na pravé straně rovnosti závisí pouze na proměnných $\boldsymbol{x}$, nikoliv na t. Na obou stranách rovnosti je tedy nějaká konstanta; označme ji λ. Pro prostorovou složku X řešení u v uvažovaném případě platí

$$h(X, \nabla X) = \lambda X. \tag{1.77}$$

Pokud tedy existuje konstanta λ, že rovnice (1.77) má řešení X_λ, pak existuje prostorově stabilizované řešení rovnice (1.76). Přitom časová složka T splňuje rovnici

$$\frac{T'}{T} = \lambda.$$

Řešením této obyčejné lineární homogenní rovnice je funkce daná předpisem $T(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Prostorově stabilizované řešení proto je tvaru

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\lambda t} X_\lambda(\boldsymbol{x}). \tag{1.78}$$

Příklad.

Uvažujme lineární homogenní autonomní rovnici ve dvou nezávisle proměnných s konstantním koeficientem u prostorové derivace

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b(x)u$$

definovanou pro $x \in \mathbb{R}$ $t > 0$. Tato rovnice má vždy nulové řešení, které je řešením stacionárním. Navíc pro každé reálné číslo λ má tato rovnice prostorově stabilizované řešení

$$u(t, x) = \mathrm{e}^{\lambda t} \exp\left\{-\frac{1}{a}\left(\lambda x - \int_0^x b(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\right\}.$$

Pro $\lambda = 0$ je toto řešení stacionární. ■

Uvažujme nyní rovnici (1.74) s okrajovou podmínkou (1.63) nebo (1.64). Prostorově stabilizované řešení této počáteční úlohy definujeme jako prostorově stabilizované řešení rovnice (1.74), které navíc pro každé t splňuje příslušnou okrajovou podmínku. V případě homogenní okrajové podmínky (1.64) platí

$$u(t, \boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}\in\Gamma} = T(t)X(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}\in\Gamma} = \Psi\big(T(t)X(\,\cdot\,)\big) = T(t)\Psi\big(X(\,\cdot\,)\big).$$

Prostorová složka X prostorově stabilizovaného řešení tedy splňuje okrajovou podmínku

$$X(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}\in\Gamma} = \Psi\big(X(\,\cdot\,)\big). \tag{1.79}$$

Pokud existuje číslo λ a k němu existuje nenulová funkce X_λ takové, že splňují homogenní podmínku (1.79) a rovnici (1.77) s homogenní funkcí h, pak má okrajová úloha (1.76), (1.64) prostorově stabilizované řešení tvaru (1.78).

Podívejme se na tento výsledek z obecnějšího hlediska. Množina diferencovatelných funkcí definovaných na množině Ω, které splňují homogenní okrajovou podmínku (1.64) tvoří vektorový prostor. Dále máme zobrazení (operátor) A z tohoto prostoru do prostoru spojitých funkcí definované vztahem

$$A(w)(\boldsymbol{x}) = h\big(w(\boldsymbol{x}), \nabla w(\boldsymbol{x})\big).$$

S tímto označením můžeme rovnici (1.77) přepsat do tvaru

$$A(w) = \lambda w.$$

Okrajová úloha (1.77), (1.79) je tak vlastně úlohou najít vlastní číslo a příslušný vlastní vektor operátoru A.

1.3.3 McKendrickova-von Foersterova rovnice

V úvodu této kapitoly jsme odvodili, že vývoj věkově strukturované populace lze modelovat parciální evoluční lineární rovnicí (1.4) spolu s počáteční podmínkou (1.5) a okrajovou podmínkou (1.11); okrajová podmínka má pravou stranu ve tvaru integrálu, tj. lineárního funkcionálu. Této úloze se nyní budeme věnovat podrobněji.

Uvažujme tedy úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u, \qquad t > 0,\ a > 0 \tag{1.80}$$

$$u(0,a) = \varphi(a), \qquad a > 0, \tag{1.81}$$

$$u(t,0) = \int_0^\infty \beta(s)u(t,s)\mathrm{d}s, \qquad t > 0. \tag{1.82}$$

Hodnoty okrajové funkce $u(\,\cdot\,,0)$ pro zjednodušení zápisu označíme symbolem x, tj.

$$u(t,0) = x(t). \tag{1.83}$$

Charakteristická rovnice příslušná k parciální rovnici (1.80) je

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 1$$

a má obecné řešení v implicitním vyjádření

$$a - t = const.$$

Charakteristiky rovnice (1.80) jsou tedy polopřímky rovnoběžné s osou prvního kvadrantu. Z toho je také vidět, že charakteristiky určené kladnou konstantou na pravé straně této rovnosti protínají osu a; na charakteristikách s kladnou konstantou jsou tedy hodnoty funkce u určeny počáteční podmínkou (1.81). Podobně, charakteristiky určené zápornou konstantou na pravé straně uvedené rovnosti protínají osu t a hodnoty funkce u jsou na nich určeny okrajovou podmínkou (1.82). Situace je znázorněna na Obrázku 1.2a).

Pro $t \le a$ zavedeme nové souřadnice τ a ξ vztahy

$$\tau = t, \qquad \xi = a - t.$$

Po této transformaci rovnice (1.80) s počáteční podmínkou (1.81) nabude tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\mu(\xi + \tau)u, \qquad u(0,\xi) = \varphi(\xi).$$

Řešení této počáteční úlohy pro obyčejnou lineární homogenní rovnici je

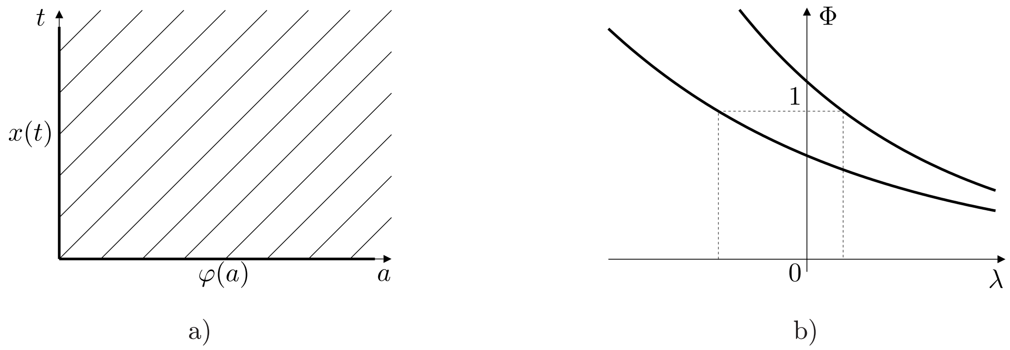
$$u(\tau,\xi) = \varphi(\xi)\,\mathrm{e}^{-\int_{\xi}^{\xi+\tau} \mu(\sigma)\mathrm{d}\sigma}.$$

Návratem k původním proměnným dostaneme

$$u(t,a) = \varphi(a-t)\,\mathrm{e}^{-\int_{a-t}^{a} \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}. \tag{1.84}$$

Pro $t > a$ zavedeme nové souřadnice τ a ξ vztahy

$$\tau = t - a, \qquad \xi = a;$$



Obrázek 1.2: K řešení McKendrickovy-von Foersterovy rovnice. a) charakteristiky rovnice (1.80), b) možný průběh funkce Φ, tj. pravé strany rovnice (1.91).

transformaci tohoto tvaru volíme proto, aby transformovaný čas τ byl kladný, plynul od minulosti do budoucnosti. Nyní dostaneme rovnici (1.80) v kanonickém tvaru a k ní příslušnou transformovanou okrajovou podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\mu(\xi)u, \qquad u(\tau, 0) = x(\tau).$$

Řešením této Cauchyovy úlohy je funkce u definovaná vztahem

$$u(\tau, \xi) = x(\tau)\,\mathrm{e}^{-\int_0^{\xi} \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}.$$

V původních proměnných tedy

$$u(t, x) = x(t-a)\,\mathrm{e}^{-\int_0^{a} \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}. \tag{1.85}$$

Pro zjednodušení zápisu dosud dosažených výsledků zavedeme označení

$$\ell(a) = \mathrm{e}^{-\int_0^{a} \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}. \tag{1.86}$$

Zřejmě je $\ell(a) > 0$ pro každé $a \geq 0$. Řešení úlohy (1.80), (1.81), (1.82) rozepsané rovnostmi (1.84), (1.85) můžeme jednotně zapsat jako

$$u(t, a) = \begin{cases} \varphi(a-t)\dfrac{\ell(a)}{\ell(a-t)}, & t \leq a, \\ x(t-a)\ell(a), & t > a. \end{cases} \tag{1.87}$$

V tomto zápisu zůstává neurčená „okrajová funkce“ x, jejíž hodnota vyjadřuje hustotu novorozenců v čase t.

Funkce x zavedená vztahem (1.83) je definována integrálem na pravé straně rovnosti (1.82), v němž vystupuje funkce u, která je definována vztahem (1.87). Z toho je vidět, že je potřebné integrál z rovnosti (1.82) rozdělit na součet dvou integrálů. Každý z těchto integrálů upravíme samostatně:

$$x(t) = \int_0^{\infty} \beta(s)u(t,s)\mathrm{d}s = \int_0^{t} \beta(s)u(t,s)\mathrm{d}s + \int_t^{\infty} \beta(s)u(t,s)\mathrm{d}s,$$

$$\int_0^{t} \beta(s)u(t,s)\mathrm{d}s = \int_0^{t} \beta(s)x(s-a)\ell(s)\mathrm{d}s = \int_0^{t} \beta(t-\xi)\ell(t-\xi)x(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$\int\limits_t^\infty \beta(s)u(t,s)\mathrm{d}s = \int\limits_t^\infty \beta(s)\varphi(s-t)\frac{\ell(s)}{\ell(s-t)}\mathrm{d}s = \int\limits_0^\infty \beta(\xi+t)\frac{\ell(\xi+t)}{\ell(\xi)}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Celkem tedy dostáváme, že funkce x je řešením integrální rovnice

$$x(t) = \int\limits_0^t \beta(t-\xi)\ell(t-\xi)x(\xi)\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^\infty \beta(\xi+t)\frac{\ell(\xi+t)}{\ell(\xi)}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{1.88}$$

Tato rovnice bývá v demografických aplikacích nazývána *spojitá Lotkova rovnice obnovy v homogenním tvaru.*

Integrální rovnici (1.88) můžeme přepsat. Označme:

$$K(t,s) = \beta(t-s)\ell(t-s), \qquad F(t) = \int\limits_0^\infty \beta(\xi+t)\frac{\ell(\xi+t)}{\ell(\xi)}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Při tomto označení rovnice (1.88) nabude tvar

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s + F(t).$$

Integrální rovnice tohoto tvaru se nazývá *Volterrova integrální rovnice druhého druhu.*

Jiný z používaných tvarů rovnice (1.88) dostaneme tak, že označíme

$$k(t) = \begin{cases} \beta(t)\ell(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}.$$

V prvním integrálu na pravé straně rovnice (1.88) tak dostaneme konvoluci,

$$x(t) = \int\limits_0^\infty k(t-\xi)x(\xi)\mathrm{d}\xi + F(t),$$

takže integrální rovnici (1.88) můžeme přepsat jako rovnici konvolučního typu

$$x = k * x + F.$$

Závěr: Řešení úlohy (1.80), (1.81), (1.82) je dáno rovností (1.87), kde funkce ℓ je definována rovností (1.86) a funkce x je řešením integrální rovnice (1.88).

Strukturně stabilizované řešení rovnice (1.80)

Takové řešení je podle 1.3.2 tvaru $u(t,a) = \mathrm{e}^{\lambda t}A(t)$, kde funkce A je řešením obyčejné diferenciální rovnice (1.77). V našem konkrétním případě se tedy ptáme, zda existuje číslo λ takové, že úloha

$$-A' - \mu(a)A = \lambda A, \qquad a > 0, \tag{1.89}$$

$$A(0) = \int\limits_0^\infty \beta(s)A(s)\mathrm{d}s, \tag{1.90}$$

má řešení. Tato úloha samozřejmě má triviální nulové řešení $A \equiv 0$ pro libovolnou hodnotu λ. Takové řešení je ale nezajímavé; lze ho interpretovat jako model populace s nulovou hustotou, tedy nepřítomnost populace.

Obyčejná lineární homogenní rovnice (1.89) má obecné řešení

$$A(a) = C\exp^{-\lambda a - \int\limits_0^a \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} = C\ell(a)\mathrm{e}^{-\lambda a}.$$

Řešení je nenulové, pokud $C \neq 0$. Po dosazení do podmínky (1.90) a vydělení konstantou C dostaneme

$$1 = \int_0^\infty \beta(s)\ell(s)\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s. \tag{1.91}$$

Číslo λ má být řešením této rovnice. Označme její pravou stranu symbolem $\Phi(\lambda)$.

Předpokládejme, že funkce β a μ splňují přirozené podmínky kladené na věkově specifickou plodnost a úmrtnost, tedy že jsou to funkce integrabilní a nezáporné; funkce β je navíc ohraničená a kladná na nějakém uzavřeném intervalu $[a_1, a_2]$. Za těchto předpokladů je ℓ nerostoucí funkce splňující nerovnosti $0 < \ell(s) \leq 1$ pro každé $s \geq 0$ a integrál na pravé straně rovnosti (1.91) je kladný. Dále odvodíme:

$$\Phi'(\lambda) = -\int_0^\infty s\beta(s)\ell(s)\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s < 0, \quad \text{pro každé } \lambda;$$

označíme $\beta^* = \sup\{\beta(s) : s \geq 0\}$ a dostaneme

$$0 < \Phi(\lambda) \leq \beta^* \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s = \lim_{s\to\infty} \frac{\beta^*}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{\lambda s}\right) = \frac{\beta^*}{\lambda}, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\beta^*}{\lambda} = 0, \quad \text{tj.} \lim_{\lambda\to\infty} \Phi(\lambda) = 0;$$

nakonec označíme minimum funkce β na uzavřeném intervalu $[a_1, a_2]$ symbolem β_*, tj.

$$\beta_* = \min\{\beta(s) : a_1 \leq s \leq a_2\} > 0,$$

a pro $\lambda < 0$ dostaneme

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \beta(s)\ell(s)\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s \geq \int_{a_1}^{a_2} \beta(s)\ell(s)\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s \geq \int_{a_1}^{a_2} \beta(s)\ell(s)\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s \geq$$

$$\geq \beta_*\ell(a_2)\,\mathrm{e}^{-\lambda(a_1)} \int_{a_1}^{a_2} \mathrm{d}s = \beta_*\ell(a_2)\,\mathrm{e}^{-\lambda(a_1)}(a_2 - a_1),$$

z čehož plyne

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \Phi(\lambda) \geq (a_2 - a_1)\,\beta_*\,\ell(a_2) \lim_{\lambda\to-\infty} \mathrm{e}^{-\lambda a_1} = \infty.$$

Celkem vidíme, že Φ je klesající funkce, která na intervalu $(-\infty, \infty)$ klesne od nekonečna k nule. To znamená, že rovnice

$$1 = \Phi(\lambda)$$

má právě jedno reálné řešení. Existuje tedy jediné kladné reálné číslo λ takové, že okrajová úloha (1.89), (1.90) má nenulové řešení tvaru

$$A(a) = C\ell(a)\mathrm{e}^{-\lambda a}.$$

Vzhledem k faktu, že funkce Φ je klesající, znaménko vlastního čísla λ je určeno hodnotou výrazu

$$\Phi(0) = \int_0^\infty \beta(s)\ell(s)\mathrm{d}s,$$

viz Obrázek 1.2b). Je-li $\Phi(0) > 1$, pak $\lambda > 0$; je-li $\Phi(0) < 1$, pak $\lambda < 0$.

Dosažené výsledky nyní můžeme shrnout: Rovnice (1.80) s okrajovou podmínkou (1.82) má řešení tvaru

$$u(t, a) = C\ell(a)\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathrm{e}^{\lambda t};$$

přitom C je nějaké kladné číslo, které vyjadřuje hustotu novorozenců v čase $t = 0$, λ je řešením rovnice (1.91) a vyjadřuje růstový koeficient populace.

Cvičení

V úlohách 1–6 najděte obecné řešení rovnice.

1. $x^2u_x + y^2u_y = 0$
2. $(1+x^2)u_x + xyu_y = 0$
3. $(z-x+y)u_x + (z+x-y)u_y + zu_z = 0$
4. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$
5. $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$
6. $xuu_x + yuu_y + xy = 0$

V úlohách 7–12 najděte řešení okrajové úlohy.

7. $2u_x + 3u_y = 0,\ u(0,y) = 4y$
8. $(z-y)u_x + (x-z)u_y + (y-x)u_z = 0,\ u(0,y,z) = yz$
9. $u(x+u)u_x - y(y+u)u_y = 0,\ u(1,y) = \sqrt{y}$
10. $(x+u)u_x + yu_y = u + y^2,\ u(x,1) = x$
11. $u_x^2 - u_y^2 = u,\ u(1,y) = 1$
12. $u_t = -(u_x)^2,\ u(0,x) = ax$

Výsledky:

1. $u(x,y) = \Phi\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)$
2. $u(x,y) = \Phi\left(\dfrac{y^2}{1+x^2}\right)$
3. $u(x,y,z) = \Phi\big(x+y-2z, z^2(x-y)\big)$
4. $u(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \Phi\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_3}{x_2}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_{n-1}}\right)$
5. $u(x,y) = xy + \Phi(x^2+y^2)$
6. $\Phi\left(\dfrac{x}{y}, xy + u^2\right) = 0$ (implicitní popis)
7. $u(x,y) = 4y - 6x$
8. $u(x,y,z) = xy + yz + zx$
9. $u(x,y) = \sqrt{xy}$
10. $u(x,y) = \dfrac{x + y^2\ln y}{1+\ln y}$
11. $\big(4u - (x-3)^2\big)\big(4u - (x-1)^2\big) = 0$ (implicitní popis)
12. $u(t,x) = ax - a^2t$

Kapitola 2

Rovnice druhého řádu

2.1 Model šíření drogy v žíle

Představme si, že v jistém okamžiku vstříkneme do žíly nějaké množství drogy. Chceme modelovat, jak se množství vstříknuté látky v krvi mění v průběhu času.

Budeme uvažovat tři procesy. Molekuly drogy jednak pronikají mezi molekuly krve, dochází k *difúzi* látky v kapalině. Droga je také unášena proudící krví a navíc může docházet k nějaké chemické reakci – látka se může v kapalině rozkládat nebo tvořit. Abychom tuto situaci popsali matematicky, budeme si žílu představovat jako dlouhý tenký válec; jeho poloměr je vzhledem k jeho délce zanedbatelný. Proto budeme tento válec považovat za jednorozměrný objekt a prostorovou osu x ztotožníme s osou válce. V uvažovaném válci proudí kapalina.

Množství látky vyjádříme její hustotou (koncentrací); za hustotu budeme považovat hmotnost látky vztaženou k délce úseku válce, na kterém se nachází. Přesněji: označíme-li symbolem $u(t,x)$ hustotu látky v čase t a v bodě x a symbolem $m(t,\alpha,\beta)$ množství látky v úseku válce mezi souřadnicemi α a β, pak budou tyto veličiny vázány vztahy

$$m(t,\alpha,\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} u(t,x)\mathrm{d}x, \quad u(t,x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(t,x,x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Probíhající chemické reakce budeme charakterizovat nějakou veličinou f, kterou můžeme nazvat intenzita reakce a charakterizovat jako množství látky, které se příslušnou reakcí vytvoří (nebo rozloží) za jednotku času v části válce o jednotkové délce. Pokud látka vzniká, je intenzita kladná, $f>0$, pokud se rozkládá, je $f<0$. Intenzita reakce ovšem může záviset na množství (tj. koncentraci) látky a být v každém bodě a v každém čase jiná, tedy $f=f(t,x,u)$. Pak množství látky, které vznikne (nebo se rozloží) za časový interval $[t,t+\Delta t]$ v úseku válce mezi souřadnicemi α a β je dáno výrazem

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(s,x,u(s,x)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}s; \tag{2.1}$$

znaménko tohoto výrazu určuje, zda se jedná o tvorbu nebo rozklad látky.

Difúzi vyjádříme veličinou $g=g(t,x)$, kterou nazveme *difúzní tok*. Můžeme si ho představit jako rychlost difundující částice. Přesněji ho definujeme tak, že množství látky (tj. hmotnost), které se dostane difúzí přes bod o souřadnici x za časový interval $[t,t+\Delta t]$, je rovno

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,x)\mathrm{d}s;$$

je-li tato veličina kladná, jedná se o pohyb zleva doprava, je-li záporná, pak o pohyb zprava doleva. Do úseku válce, jehož levý krajní bod má souřadnici α a pravý krajní bod souřadnici β, se tedy za časový interval $[t, t+\Delta t]$ difúzí dostane přes levý okraj množství látky o hmotnosti

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,\alpha)\mathrm{d}s$$

a přes pravý okraj se z něho dostane množství látky o hmotnosti

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,\beta)\mathrm{d}s.$$

Tato interpretace předpokládá, že $g(t,\alpha) > 0$, $g(t,\beta) > 0$; kdyby tyto nerovnosti nebyly splněny, odpovídajícím způsobem bychom vyměnili slova „do úseku" za „z úseku" a naopak. Celková změna hmotnosti látky v úseku válce od α do β způsobená difúzí za časový interval $[t, t+\Delta t]$ tedy je

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,\alpha)\mathrm{d}s - \int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,\beta)\mathrm{d}s = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \big(g(s,\alpha) - g(s,\beta)\big)\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

Celkovou změnu hmotnosti drogy v úseku žíly od bodu α do bodu β způsobenou reakcí a difúzí během časového intervalu $[t, t+\Delta t]$ můžeme nyní vyjádřit jako součet výrazů (2.1) a (2.2). S využitím Newtonovy-Leibnizovy formule a první věty o střední hodnotě integrálního počtu ji upravíme na tvar

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(s,x,u(s,x)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \big(g(s,\alpha) - g(s,\beta)\big)\mathrm{d}s = \\
&\qquad = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(s,x,u(s,x)\big)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}g(s,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \\
&\qquad = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(f\big(s,x,u(s,x)\big) - \frac{\partial}{\partial x}g(s,x)\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \\
&\qquad = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\left(f\big(t+\vartheta_1\Delta t, x, u(t+\vartheta_1\Delta t, x)\big) - \frac{\partial}{\partial x}g(t+\vartheta_1\Delta t, x)\right)\Delta t\right]\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

kde $\vartheta_1 \in (0,1)$ je číslo, jehož existence je zaručena první větou o střední hodnotě integrálního počtu.

Nyní se budeme zabývat změnou hmotnosti látky v žíle vlivem proudění krve; tento proces nazýváme *advekce*. Předpokládejme na okamžik, že délková hustota u unášené látky a rychlost v proudění kapaliny jsou konstantní. V takovém případě je vzdálenost, kterou urazí částice látky od nějakého bodu za časový interval délky Δt, rovna $v\Delta t$ a celková hmotnost látky, která za tento čas proteče přes uvažovaný bod, je rovna $uv\Delta t$. V realističtějším případě, kdy hustota u i rychlost proudění v závisí na čase a na místě, je celkové množství látky, které proteče přes bod x, dáno stejným součinem, ovšem funkce u a v vyčíslíme v nějaké „mezihodnotě" dvojrozměrného intervalu $[t, t+\Delta t] \times [x, x+\Delta x]$, kde $\Delta x = v\Delta t$. Toto množství (hmotnost) je tedy dáno výrazem

$$u(t+h_1\Delta t, x+h_2\Delta x)v(t+h_1\Delta t, x+h_2\Delta x)\Delta t,$$

kde $h_1, h_2 \in [0,1]$. Avšak podle věty o střední hodnotě platí

$$u(t+h_1\Delta t, x+h_2\Delta x)v(t+h_1\Delta t, x+h_2\Delta x) = u(t,x)v(t,x) + h_3\Delta t,$$

kde h_3 je nějaká konstanta[1]. Celková hmotnost látky, která proteče přes levý krajní bod α uvažovaného úseku válce během časového intervalu $[t, t+\Delta t]$ je tedy dána výrazem

$$u(t,\alpha)v(t,\alpha)\Delta t + \vartheta_2(\Delta t)^2, \tag{2.4}$$

kde ϑ_2 je nějaká konstanta. Analogicky, hmotnost látky, která proteče během uvažovaného časového intervalu přes pravý krajní bod β, je dána výrazem

$$u(t,\beta)v(t,\beta)\Delta t + \vartheta_3(\Delta t)^2. \tag{2.5}$$

Pokud je rychlost v proudění kladná, tj. kapalina proudí zleva doprava, přiteče do úseku s krajními body α, β přes levý krajní bod celková hmotnost látky (2.4) a odteče z něho přes pravý krajní bod látka o hmotnosti (2.5); pokud by rychlost byla záporná, tj. kapalina by proudila zprava doleva, zaměníme slova „přiteče" za „odteče" a naopak. Změna hmotnosti látky za časový interval $[t, t+\Delta t]$ v úseku válce od bodu o souřadnici α po bod o souřadnici β způsobená advekcí je rovna rozdílu

$$\begin{aligned} u(t,\alpha)v(t,\alpha)\Delta t + \vartheta_2(\Delta t)^2 - \big(u(t,\beta)v(t,\beta)\Delta t + \vartheta_3(\Delta t)^2\big) &= \\ = \big(u(t,\alpha)v(t,\alpha) - u(t,\beta)v(t,\beta)\big)\Delta t + \vartheta_4(\Delta t)^2&, \end{aligned}$$

kde $\vartheta_4 = \vartheta_2 - \vartheta_3$. Tento rozdíl můžeme pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule vyjádřit ve tvaru

$$\left(-\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}u(t,x)v(t,x)\mathrm{d}x\right)\Delta t + \vartheta_4(\Delta t)^2. \tag{2.6}$$

Celková změna hmotnosti drogy v uvažovaném úseku žíly za čas od t do $t+\Delta t$ je součtem výrazů (2.3) a (2.6),

$$\begin{aligned} &\delta(t,\alpha,\beta,\Delta t) = \\ &= \int_\alpha^\beta \left[\left(f\big(t+\vartheta_1\Delta t, x, u(t+\vartheta_1\Delta t, x)\big) - \frac{\partial}{\partial x}\big(g(t+\vartheta_1\Delta t, x) - u(t,x)v(t,x)\big)\right)\Delta t\right]\mathrm{d}x + \\ &\qquad + \vartheta_4(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Ze zákona zachování hmoty nyní můžeme vyjádřit celkovou hmotnost látky v úseku válce od α po β za časový interval délky Δt

$$\int_\alpha^\beta u(t+\Delta t, x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta u(t,x)\mathrm{d}x + \delta(t,\alpha,\beta,\Delta t).$$

Po dosazení a zřejmé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^\beta \left(\frac{u(t+\Delta t, x) - u(t,x)}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(g(t+\vartheta_1\Delta t, x) + u(t,x)v(t,x)\big) - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - f\big(t+\vartheta_1\Delta t, x, u(t+\vartheta_1\Delta t, x)\big)\right)\mathrm{d}x = \vartheta_4\Delta t \end{aligned}$$

a limitním přechodem $\Delta t \to 0$

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}g(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}u(t,x)v(t,x) - f\big(t,x,u(t,x)\big)\right)\mathrm{d}x = 0.$$

[1] Tuto konstantu lze podrobněji vyjádřit výrazem $h_3 = \frac{\partial}{\partial t}uv + v\frac{\partial}{\partial x}uv$, kde hodnoty funkcí u, v jsou vyčísleny v nějakém bodu dvojrozměrného intervalu $[t, t+\Delta t] \times [x, x+\Delta x]$.

Úsek válce od souřadnice α do souřadnice β byl vybrán libovolně, stejně tak i časový okamžik t. To znamená, že pro všechna x a všechna t musí platit

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}g(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}v(t,x)u(t,x) + f\big(t,x,u(t,x)\big). \tag{2.7}$$

Tato relace váže neznámou funkci u (hustotu) a neznámou funkci g (difúzní tok), intenzita f probíhající chemické reakce je dána charakterem reakce. Potřebujeme tedy ještě nějak funkci g určit. Předpokládejme tedy, že difúzí se částice přesunuje z místa s větší koncentrací na místo s koncentrací menší (to je předpoklad celkem přirozený) a že rychlost difundující částice je přímo úměrná rozdílu koncentrací (přesněji gradientu, tj. derivaci koncentrace). Tento předpoklad bývá nazýván *Fickův zákon*. Tedy

$$g(t,x) = -D\frac{\partial}{\partial x}u(t,x).$$

Kladný koeficient úměrnosti D se nazývá *difuzivita*; může se měnit s časem i s místem, tedy $D = D(t,x)$. Dosazením do rovnosti (2.7) dostaneme *rovnici reakce-advekce-difúze*

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u\right) - \frac{\partial}{\partial x}v(t,x)u + f(t,x,u). \tag{2.8}$$

Tato rovnice má být splněna pro každý čas $t > 0$ a každý bod $x \in \mathbb{R}$. K rovnici přidáme *počáteční podmínku* vyjadřující koncentraci difundující látky v počátečním čase $t = 0$

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{2.9}$$

která má platit pro každé $x \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Speciální případy a okrajové podmínky

Budeme nyní předpokládat, že uvažovaná látka v kapalině nereaguje, tj. $f \equiv 0$, kapalina je homogenní, v čase se nemění, tj. $D(t,x) \equiv a^2 = const$, a proudí konstantní rychlostí $v(t,x) \equiv const$. Obecnou rovnici reakce-advekce-difúze (2.8) tak můžeme zjednodušit na *rovnici advekce-difúze* s konstantními koeficienty

$$\frac{\partial}{\partial t}u = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - v\frac{\partial}{\partial x}u. \tag{2.10}$$

V tomto případě můžeme prostorovou souřadnici transformovat – zavést novou souřadnou soustavu, která je „unášena rychlostí v“. Zavedeme tedy novou prostorovou souřadnici ξ vztahem

$$\xi = x - vt.$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet parciálních derivací složených funkcí platí

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t}u\big(t,\xi(t,x)\big) = \frac{\partial}{\partial t}u\big(t,\xi(t,x)\big)\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}u\big(t,\xi(t,x)\big)\frac{\partial \xi(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}u(t,\xi) - v\frac{\partial}{\partial \xi}u(t,\xi)$$

a analogicky a stručněji (bez psaní nezávisle proměnných)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}u.$$

Dosazením do rovnice (2.8) dostaneme *rovnici difúze*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \tag{2.11}$$

Tato rovnice vlastně modeluje difúzi látky v neproudící kapalině, případně difúzi plynu v nějakém dlouhém válci naplněném vzduchem nebo jiným plynem.

Také si můžeme uvědomit, že vedení tepla v tělese je proces analogický difúzi – teplo také přechází z místa teplejšího na chladnější a přechod tepla můžeme považovat za úměrný teplotnímu spádu (tj. gradientu nebo derivaci teploty) a orientovaný opačně. Jinak řečeno, Fickův zákon popisuje i vedení tepla. Proto se rovnice (2.11) nazývá také *rovnice vedení tepla.* V takovém případě interpretujeme hledanou funkci $u = u(t, x)$ jako teplotu malého okolí bodu x (malého kousku tyče, v níž je teplo vedeno) v čase t. Poněkud přesněji vyjádřeno: v časovém okamžiku t je celková tepelná energie úseku tyče od bodu se souřadnicí α po bod se souřadnicí β dána výrazem

$$\frac{k}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} u(t, x)\mathrm{d}x,$$

kde $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\mathrm{JK}^{-1}$ je Boltzmanova konstanta.

Zatím jsme neuvažovali o délce žíly (trubice, válce), v níž probíhá difúze. Jedna z možností je uvažovat tak dlouhou žílu, že „na její konec nedohlédneme“, matematicky řečeno, pravý konec oboru, na němž difúze probíhá je v nekonečnu. Ale i v tak dlouhé žíle je celkové množství difundující látky konečné, neboť do žíly jsme vstříkli omezené množství drogy. Tuto podmínku vyjádříme tak, že

$$\int_{x_0}^{\infty} u(t, x)\mathrm{d}x < \infty; \tag{2.12}$$

přitom x_0 je nějaké číslo. Tato podmínka říká, že uvedený nevlastní integrál konverguje, neboť hustota u je nezáporná. Odtud dále plyne, že

$$\lim_{x \to \infty} u(t, x) = 0$$

pro každý čas t, neboť funkci u považujeme za spojitou. Podmínka (2.12) se nazývá *podmínka integrability* nebo *integrovatelnosti.*

Pravý konec válce (trubice, žíly) však může být v nějaké konečné vzdálenosti, mít konečnou souřadnici x_0. Tento pravý konec může být pro difundující látku uzavřený, žádná přes něj neprostupuje, tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = 0 \tag{2.13}$$

pro každý čas t. Jiná možnost je, že na tomto konci je nějak dán tok (probíhá na něm nějaký proces, který tok určuje). Ten se může v čase měnit. Dostáváme tak podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = \nu(t). \tag{2.14}$$

Podmínky tvaru (2.13) nebo (2.14) se nazývají *Neumannovy okrajové podmínky.*

Jiná možnost je, že na pravém otevřeném konci válce se látka rozptyluje do volného prostoru. V takovém případě je napravo od krajního bodu x_0 koncentrace (prakticky) nulová a tok, tj. derivace hustoty podle prostorové proměnné, je podle Fickova zákona úměrný koncentraci nalevo od bodu x_0 (uvnitř válce). Tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = -hu(t, x_0) \tag{2.15}$$

pro každé t; přitom h je kladný koeficient úměrnosti (převrácená hodnota „difusivity přes hranici“). V okolním prostoru ale nemusí být jen nulová koncentrace látky. Napravo od krajního bodu x_0 může koncentrace mít v každém okamžiku t nějakou hodnotu $\mu(t)$ nezávislou na koncentraci v trubici, např. v důsledku nějakého vnějšího probíhajícího procesu. V takovém případě je difúzní tok přes hranici úměrný rozdílu koncentrací nalevo a napravo od hranice, tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = -h\big(u(t, x_0) - \mu(t)\big). \tag{2.16}$$

Podmínky tvaru (2.15) nebo (2.16) se nazývají *Robinovy okrajové podmínky.*

Pokud rovnici (2.11) interpretujeme jako model vedení tepla v dlouhé tenké tyči (drátu) po stranách tepelně izolované, můžeme na jejím konci udržovat nulovou teplotu (konec tyče přiložíme k ledu). V takovém případě dostaneme podmínku

$$u(t, x_0) = 0 \tag{2.17}$$

pro každý čas t. Nebo teplota na konci tyče může být určována nějakým vnějším nezávislým procesem; pak dostaneme podmínky tvaru

$$u(t, x_0) = \mu(t). \tag{2.18}$$

Podmínky (2.17) a (2.18) se nazývají *Dirichletovy okrajové podmínky.*

Podmínky (2.13), (2.15) a (2.17) můžeme zapsat jednotným způsobem

$$\alpha u(t, x_0) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = 0; \tag{2.19}$$

pro $\alpha = 0$, $\beta = 1$ se jedná o podmínky Neumannovy, pro $\alpha = h$, $\beta = 1$ o podmínky Robinovy a pro $\alpha = 1$, $\beta = 0$ o podmínky Dirichletovy. Podobně i podmínky (2.14), (2.16) a (2.18) můžeme souhrnně zapsat ve tvaru

$$\alpha u(t, x_0) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = \varrho(t). \tag{2.20}$$

Podmínky (2.19) a (2.20) nazýváme *Newtonovy okrajové podmínky.*

Analogicky můžeme zformulovat okrajové podmínky pro levý okraj oboru, na němž modelujeme difúzi nebo vedení tepla. Jediný rozdíl je v Robinových podmínkách, kde se změní znaménko u koeficientu h.

Obor prostorové proměnné x ale nemusí žádné okraje mít, může jít o nějaký uzavřený prstenec. V takovém případě po proběhnutí celého prstence (uzavřené křivky) se dostaneme do stejného bodu, koncentrace látky v něm musí být stejná. Trochu přesněji: označíme-li délku křivky ℓ, pak v každém časovém okamžiku t musí platit

$$u(t, x) = u(t, x + \ell) \tag{2.21}$$

pro libovolnou hodnotu x. Podmínku (2.21) nazýváme *podmínka periodičnosti* nebo *periodická okrajová podmínka.*

Ještě si všimněme jedné skutečnosti. Pokud nějaké funkce u_1, u_2 splňují některou z podmínek (2.12), (2.21) nebo (2.19), pak také libovolná lineární kombinace těchto funkcí splňuje stejnou podmínku. Podmínky (2.12), (2.21), (2.19) splňují princip superpozice a proto je souhrnně nazýváme *homogenní okrajové podmínky.*

2.1.2 Nejjednodušší řešení

Uvažujme jednoduchou situaci: v jednom bodě (který můžeme považovat za počátek souřadnic) do kapaliny v počátečním okamžiku „umístíme“ nějaké množství A látky, která se bude v neproudící kapalině šířit difúzí. Vývoj koncentrace difundující látky bude popsán rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

V průběhu procesu žádnou látku z kapaliny neodebíráme, ani ji do ní neřidáváme, její množství je stále stejné jako na začátku. Musí tedy platit

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t, x) \mathrm{d}x = A \quad \text{pro všechna } t > 0. \tag{2.23}$$

Tato rovnost však musí platit i na počátku, v čase $t = 0$, tj.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, x)\mathrm{d}x.$$

Přitom ale předpokládáme, že na počátku je hustota v šude s výjimkou bodu $x = 0$ nulová, neboť veškerá látka je koncentrována v jediném bodě. Hustotu na počátku tedy při této idealizaci nemůžeme považovat za „normální“ reálnou funkci a poslední integrál za „normální“ integrál (Riemannův nebo nějaký obecnější). Počáteční rozložení látky, její „distribuci“ (v hovorovém významu tohoto slova), budeme považovat za distribuci ve smyslu Dodatku A.1. Počáteční podmínku pro rovnici (2.22) tedy napíšeme ve tvaru

$$u(0, x) = A\delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.24}$$

kde δ je Diracova distribuce.

Pokusíme se „uhodnout“ řešení rovnice (2.22) s počáteční podmínkou (2.24). Můžeme si představovat, že difúze probíhá tak, že jednotlivé molekuly látky se náhodně pohybují a že pravděpodobnost pohybu nalevo je stejná jako pravděpodobnost pohybu napravo. Koncentrace látky po jistém čase by tedy mohla mít tvar normálního (Gaussova) rozložení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0. Rozptyl se však s časem mění – na počátku je nulový a s postupem času se zvětšuje. Pro rozptyl $\sigma^2 = \sigma(t)^2$ tedy platí

$$\sigma(0) = 0. \tag{2.25}$$

Řešení rovnice (2.22) s počáteční podmínkou (2.24) tedy budeme hledat ve tvaru

$$u(t, x) = A\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}.$$

Z vlastností rozložení pravděpodobností je vidět, že při této volbě v každém čase t platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x)\mathrm{d}x = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\mathrm{d}x = A,$$

takže podmínka (2.23) je splněna. Má být splněna také rovnice (2.22). Proto vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{\sigma(t)^2}\sigma'(t) + \frac{1}{\sigma(t)}\left(-\frac{x^2}{2}\left(-2\sigma(t)^{-3}\right)\sigma'(t)\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\sigma'(t)\left(\frac{x^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2}\right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\left(x^2 - \sigma(t)^2\right)\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\left(-\frac{2x}{2\sigma(t)^2}\right)\right) = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)^3}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\right) = \\ &= -\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)^3}\left(1 + x\left(-\frac{2x}{2\sigma(t)^2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\frac{1}{\sigma(t)^5}\left(x^2 - \sigma(t)^2\right).\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (2.22) a jednoduché úpravě dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci σ

$$\sigma'(t) = \frac{a^2}{\sigma(t)}.$$

Řešení této rovnice se separovanými proměnnými, které splňuje počáteční podmínku (2.25) je $\sigma(t) = \sqrt{2a^2 t}$. Dostáváme tedy řešení počáteční úlohy (2.22), (2.24) ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{A}{2\sqrt{a^2\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \tag{2.26}$$

2.2 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných lineární ve druhých derivacích

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.27}$$

kde A, B, C jsou reálné funkce definované na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$ s neprázdným vnitřkem a funkce F je definována na množině $G \times \mathbb{R}^3$. Přitom budeme předpokládat, že pro každý bod $(x,y) \in G$ platí

$$|A(x,y)| + |B(x,y)| + |C(x,y)| > 0,$$

tj. funkce A, B, C nejsou současně nulové. Pro každý bod $(x,y) \in G$ můžeme zavést matici

$$\mathsf{M}(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) \end{pmatrix}.$$

Tato matice je evidentně symetrická.

Nechť $(x_0, y_0) \in G$. Rovnice (2.27) se nazývá

hyperbolická v bodě (x_0, y_0), je-li matice $\mathsf{M}(x_0, y_0)$ indefinitní,

parabolická v bodě (x_0, y_0), je-li matice $\mathsf{M}(x_0, y_0)$ pozitivně nebo negativně semidefinitní,

eliptická v bodě (x_0, y_0), je-li matice $\mathsf{M}(x_0, y_0)$ pozitivně nebo negativně definitní.

Rovnice (2.27) se nazývá *hyperbolická,* resp. *parabolická,* resp. *eliptická, na otevřené množině* $H \subseteq G$, je-li hyperbolická, resp. parabolická, resp. eliptická, v každém bodě množiny H.

Ze známých vět z lineární algebry plyne, že rovnice (2.27) je

$$\left.\begin{array}{l} \text{hyperbolická} \\ \text{parabolická} \\ \text{eliptická} \end{array}\right\} \text{ v bodě } (x_0,y_0) \in G \text{ právě tehdy, když } \left\{\begin{array}{l} B(x_0,y_0)^2 > A(x_0,y_0)C(x_0,y_0), \\ B(x_0,y_0)^2 = A(x_0,y_0)C(x_0,y_0), \\ B(x_0,y_0)^2 < A(x_0,y_0)C(x_0,y_0). \end{array}\right.$$

2.2.1 Charakteristiky a kanonický tvar rovnice

Budeme hledat transformaci nezávisle proměnných, která rovnici (2.27) převede na nějaký jednodušší tvar; v ideálním případě na takový, aby bylo možné najít nějaké její řešení.

Nechť $H \subseteq G$ je otevřená množina. Buďte dále $\varphi, \psi : H \to \mathbb{R}$ takové funkce, že

$$\varphi_x(x,y)\psi_y(x,y) - \varphi_y(x,y)\psi_x(x,y) \neq 0$$

pro všechna $(x,y) \in H$. Pak transformace

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y) \tag{2.28}$$

bijektivně zobrazí množinu H na otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^2$ a rovnici (2.27) transformuje na tvar (využíváme formule pro druhé parciální derivace složené funkce)

$$a(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \tag{2.29}$$

kde

$$\begin{aligned} a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = \varphi_y^2\left(A\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + C\right), \\ b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y, \\ c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = \psi_y^2\left(A\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + C\right); \end{aligned} \tag{2.30}$$

naznačenou úpravu výrazu pro funkce a nebo c lze samozřejmě provést pouze v případě, že $\varphi_y \neq 0$ nebo $\psi_y \neq 0$.

Při hledání inversní transformace k transformaci (2.28) řešíme soustavu rovnic (2.28) pro neznámé x, y. Přitom první, resp. druhou, z rovnic je implicitně dána funkce $y_1 = y_1(x)$, resp. $y_2 = y_2(x)$, pro jejíž derivaci platí

$$y_1' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}, \quad \text{resp.} \quad y_2' = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

(podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce, viz např. Z Došlá, O Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU 1999, str. 96).

Obyčejná diferenciální rovnice v implicitním tvaru (nerozřešená vzhledem k derivaci)

$$A(x,y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2B(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + C(x,y) = 0 \tag{2.31}$$

se nazývá *charakteristická rovnice parciální diferenciální rovnice* (2.27). Její řešení se nazývají *charakteristiky* této rovnice.

Z předchozích úvah je vidět, že platí: Je-li rovnice (2.27) hyperbolická, má dvě jednoparametrické množiny charakteristik, které jsou řešeními obyčejných diferenciálních rovnic

$$y' = \frac{B(x,y) + \sqrt{(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)} \quad \text{a} \quad y' = \frac{B(x,y) - \sqrt{(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)}. \tag{2.32}$$

Je-li rovnice (2.27) parabolická, má jednu jednoparametrickou množinu charakteristik, která je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}. \tag{2.33}$$

Je-li rovnice (2.27) eliptická, nemá reálné charakteristiky.

Jsou-li $\varphi(x,y) = const$ a $\psi(x,y) = const$ implicitní popisy řešení obyčejných diferenciálních rovnic (2.32), tedy charakteristik hyperbolické rovnice (2.27), pak

$$-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \quad \text{a} \quad -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

jsou kořeny charakteristické rovnice (2.31), takže v (2.30) dostaneme $a = c = 0$. *Kanonický tvar hyperbolické rovnice* (2.27) je

$$u_{\xi\eta} = \tilde{F}_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Příklad

Uvažujme rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2.34}$$

V této rovnici je $A(x,y) = x^2$, $B(x,y) = 0$, $C(x,y) = -y^2$. To znamená, že pro každou dvojici $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takovou, že $xy \neq 0$, platí

$$B(x,y)^2 = 0 > -x^2y^2 = A(x,y)C(x,y)$$

a rovnice je tedy hyperbolická na vnitřku každého z kvadrantů.

Charakteristická rovnice příslušná k rovnici (2.34) je tvaru

$$x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - y^2 = 0.$$

Z ní vyjádříme derivaci a dostaneme dvě explicitní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{y}{x},$$

které mají separované proměnné a jejich řešení jsou implicitně dána rovnostmi

$$\ln|y| \mp \ln|x| = const.$$

Charakteristiky tedy splňují rovnosti

$$\varphi(x,y) = xy = const, \qquad \psi(x,y) = \frac{y}{x} = const.$$

Zavedeme proto nové nezávisle proměnné ξ, η vztahy

$$\xi = xy, \qquad \eta = \frac{y}{x}. \tag{2.35}$$

Uvnitř prvního kvadrantu je $x > 0$, $y > 0$ a pro tyto hodnoty je také $\xi > 0$, $\eta > 0$. Transformace (2.35) tedy převádí vnitřek prvního kvadrantu na sebe. Inversní transformace je dána rovnostmi

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \qquad y = \sqrt{\xi\eta}.$$

Dále platí

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = y = \sqrt{\xi\eta}, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y} = x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{\eta}{\xi}},$$

takže podle řetězového pravidla je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \sqrt{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \sqrt{\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\right)\sqrt{\xi\eta} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \sqrt{\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)\left(-\eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\right) = \\ &= \xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - 2\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\eta^3}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\frac{\eta^2}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi\eta}}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{1}{2\xi}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial\eta} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}\right)\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2\eta}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi\eta}}\frac{\partial u}{\partial\eta} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} = \\ &= \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.\end{aligned}$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (2.34)

$$\frac{\xi}{\eta}\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - 2\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\eta^3}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\frac{\eta^2}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) - \xi\eta\left(\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) = 0$$

a upravíme

$$\begin{aligned} -4\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + 2\eta\frac{\partial u}{\partial\eta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} &= \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}. \end{aligned}$$

Tato rovnice je kanonickým tvarem dané rovnice (2.34). Zavedeme v ní substituci $v = \dfrac{\partial u}{\partial\eta}$ a dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial\xi} = \frac{1}{2\xi}v.$$

Tuto parciální diferenciální rovnici můžeme považovat za obyčejnou, neboť se v ní objevuje jediná derivace podle proměnné ξ. Řešení této obyčejné lineární homogenní rovnice je $v = \sqrt{\xi}\,\phi(\eta)$; přitom ϕ je „integrační konstanta“, která nezávisí na proměnné ξ, ale může záviset na proměnné η. Dostáváme tak rovnost

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = \sqrt{\xi}\,\phi(\eta),$$

kterou zintegrujeme podle proměnné η a dostaneme

$$u = \sqrt{\xi}\,\Phi(\eta) + \Psi(\xi).$$

Funkce Φ je primitivní k funkci ϕ a funkce Ψ je „integrační konstanta“, která může záviset na nezávisle proměnné ξ.

Návratem k původním proměnným dostaneme obecné řešení rovnice (2.34) ve tvaru

$$u(x,y) = \sqrt{xy}\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy);$$

přitom Φ, Ψ jsou libovolné dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné. ■

Je-li rovnice (2.27) parabolická, pak je $B^2 = AC$. Pokud je v tomto případě řešení rovnice (2.33) implicitně zapsáno rovností $\psi(x,y) = const$, pak v rovnostech (2.30) dostaneme $c = 0$ a platí

$$-\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{B}{A}, \quad \text{tj. } \psi_x = -\frac{B}{A}\psi_y$$

Je-li tedy $\varphi(x,y)$ libovolná funkce nezávislá na funkci ψ, pak v rovnostech (2.30) dostaneme

$$b = -B\varphi_x\psi_y + B\left(\varphi_x\psi_y - \frac{B}{A}\varphi_y\psi_y\right) + C\varphi_y\psi_y = \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}\varphi_y\psi_y = 0.$$

Většinou stačí volit $\varphi(x,y) = x$ nebo $\varphi(x,y) = y$. *Kanonický tvar parabolické rovnice* (2.27) je

$$u_{\xi\xi} = \tilde{F}_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Příklad

Uvažujme rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

V této rovnici je $A(x,y) = x^2$, $B(x,y) = -xy$, $C(x,y) = y^2$, takže

$$B(x,y)^2 = x^2y^2 = A(x,y)C(x,y)$$

a rovnice je parabolická. Příslušná charakteristická rovnice je tvaru

$$x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 0$$

(pozor na znaménko koeficientu u první derivace). Z charakteristické rovnice vyjádříme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}.$$

Tato obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými má řešení dané implicitně rovností $xy = const$. Zavedeme tedy nové nezávisle proměnné ξ, η vztahy

$$\xi = y, \qquad \eta = xy.$$

Pak je

$$x = \frac{\eta}{\xi}, \qquad y = \xi, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \xi, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\eta}{\xi}$$

a dále

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \xi\frac{\partial u}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{\partial u}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\eta^2}{\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Po dosazení do rovnice a úpravě dostaneme kanonický tvar dané rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}.$$

Tuto rovnici můžeme považovat za obyčejnou diferenciální rovnici, neboť se v ní vyskytují derivace podle jediné proměnné ξ. Položíme

$$v = \frac{\partial u}{\partial\xi}$$

a dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial\xi} = -\frac{1}{\xi}v.$$

Tato rovnice má řešení

$$v = \frac{1}{\xi}\Phi(\eta),$$

takže

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \frac{1}{\xi}\Phi(\eta).$$

Integrací podle proměnné ξ dostaneme $u = \Phi(\eta)\ln\xi + \Psi(\eta)$. Návrat k původním proměnným dá řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x,y) = \Phi(xy)\ln y + \Psi(xy),$$

kde Φ a Ψ jsou dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné. ■

2.3 Lineární parabolická rovnice s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat *lineární parabolickou rovnicí ve dvou nezávisle proměnných s konstantními koeficienty,* která je tvaru

$$A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2AC\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x,y), \tag{2.36}$$

kde A, C, D, E, F jsou reálné konstanty takové, že $|A|+|C|>0$. Pokud je funkce f na pravé straně rovnice nulová, mluvíme o *homogenní* rovnici, v opačném případě o nehomogenní. Rovnice (2.36) je parabolická v celé rovině $\mathbb{R}^2$.

2.3.1 Kanonický tvar

Charakteristická rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C}{A}$$

příslušná k rovnici (2.36) má řešení implicitně dané rovností $Cx-Ay=const$. Transformace nezávisle proměnných

$$\xi=x,\qquad \eta=Cx-Ay$$

převede rovnici (2.36) na tvar

$$A^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+(CD-AE)\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu=f(\xi,\eta) \tag{2.37}$$

(symboly $f(x,y)$ a $f(\xi,\eta)$ chápeme jako obrazy bodu, který má v původní soustavě souřadnice (x,y) a v transformované (ξ,η), nikoliv jako předpisy pro výpočet funkční hodnoty).

Je-li $CD=AE$, můžeme rovnici (2.37) považovat za obyčejnou – na hledanou funkci u se dívat jako na funkci jedné nezávisle proměnné ξ s parametrem η. Je to lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, tedy rovnice řešitelná v kvadraturách.

Předpokládejme, že $CD\neq AE$ a označme

$$a=\frac{A^2}{CD-AE},\qquad b=\frac{D}{CD-AE},\qquad c=\frac{F}{CD-AE},\qquad \tilde f(\xi,\eta)=\frac{f(\xi,\eta)}{CD-AE}.$$

Rovnici (2.37) tedy přepíšeme ve tvaru

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+cu=\tilde f(\xi,\eta). \tag{2.38}$$

Tuto rovnici ještě dále upravíme. Zavedeme novou neznámou funkci $v=v(\xi,\eta)$ vztahem

$$v(\xi,\eta)=\exp\left(\frac{b}{2a}\xi+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\eta\right)\,u(\xi,\eta).$$

Pak platí

$$\begin{aligned}
u &= v\exp\left(-\frac{b}{2a}\xi-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\eta\right),\\
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{b}{2a}v\right)\exp\left(-\frac{b}{2a}\xi-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\eta\right),\\
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-2\frac{b}{2a}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{b^2}{4a^2}v\right)\exp\left(-\frac{b}{2a}\xi-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\eta\right),\\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)v\right)\exp\left(-\frac{b}{2a}\xi-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\eta\right).
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (2.38) a snadné úpravě dostaneme rovnici pro neznámou funkci v ve tvaru

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial v}{\partial \eta}=g(\xi,\eta), \tag{2.39}$$

kde $g(\xi,\eta)=\tilde{f}(\xi,\eta)\exp\left(\frac{b}{2a}\xi+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\eta\right)$.

Rovnici (2.39), v níž se vyskytuje jediný parametr a prohlásíme za *kanonický tvar lineární parabolické parciální diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.*

2.3.2 Evoluční rovnice

Evoluční parciální diferenciální rovnice je taková, v níž jednu z nezávisle proměnných interpretujeme jako čas.

Budeme se nyní zabývat rovnicemi, v nichž je derivace hledané funkce podle času prvního řádu. Uvažujme tedy lineární homogenní parabolickou evoluční parciální diferenciální rovnici s konstantním koeficientem v kanonickém tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.40}$$

Snadno ověříme, že tato rovnice splňuje princip superpozice, tj. funkce $u\equiv 0$ je jejím řešením a lineární kombinace jejich řešení je řešením. Vskutku, jsou-li funkce $u_1=u_1(t,x)$, $u_2=u_2(t,x)$ takové, že

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

a c_1,c_2 jsou libovolné konstanty, pak

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\frac{\partial u_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial u_2}{\partial t}=c_1\alpha\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+c_2\alpha\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1u_1+c_2u_2).$$

Znaménko koeficientu α souvisí se „směrem plynutí času“. Vyjádříme to poněkud přesněji: Uvažujme čas τ, který „plyne opačným směrem“, tj. $\tau=-t$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}=-1=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}.$$

Pro řešení $u=u(t,x)$ rovnice (2.40) platí

$$\frac{\partial}{\partial \tau}u=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\partial u}{\partial t}=-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

To znamená, že změna znaménka konstanty α představuje nahrazení času plynoucího z přítomnosti do budoucnosti časem plynoucím z přítomnosti do minulosti.

Dále se budeme věnovat pouze rovnicím s kladným koeficientem α. Můžeme ho proto psát ve tvaru druhé mocniny. Jinak řečeno, budeme se věnovat rovnici difúze neboli rovnici vedení tepla, sr. (2.11).

Řešení rovnice jsme dosud chápali v obvyklém intuitivním významu: řešením rovnice je funkce, která tuto rovnici splňuje ve všech bodech svého definičního oboru. Toto pojetí nejprve mírně rozšíříme. Za řešení homogenní evoluční parabolické rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x}, \tag{2.41}$$

pro $t>0$ a $x\in J$, kde J je nějaký otevřený interval reálných čísel, budeme považovat funkci $u=u(t,x)$ definovanou na množině $H=(0,\infty)\times J$, která splňuje rovnici pro skoro všechna $(t,x)\in H$. Podrobněji řečeno, první derivace funkce u podle času a druhá derivace funkce u podle proměnné x jsou integrovatelné na každé kompaktní podmnožině množiny H (zejména tedy množina bodů, v nichž některá z derivací neexistuje, má míru nula) a pro každou dvojici intervalů $(t_1, t_2) \subseteq (0, \infty)$, $(\alpha, \beta) \subseteq J$ platí

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}t = 0.$$

Řešení nehomogenní evoluční parabolické rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x} + f(t,x), \tag{2.42}$$

zavádíme analogicky.

Řešení evoluční parabolické rovnice s *počáteční podmínkou*

$$u(0,x) = \varphi(x) \tag{2.43}$$

pro $x \in J$ je takové řešení $u = u(t,x)$, že

$$\lim_{t \to 0+} u(t,x) = \varphi(x)$$

pro skoro všechna $x \in J$.

Nehomogenní rovnice

Nehomogenní rovnici (2.42) s nulovou počáteční podmínkou

$$u(0,x) = 0 \tag{2.44}$$

můžeme interpretovat jako popis změny teploty v dlouhé tenké tyči, která měla na počátku teplotu nulovou a je v každém čase $t > 0$ a každém bodě $x \in J$ zahřívána nějakým zdrojem s „intenzitou“ $f(t,x)$. Tato představa napovídá, že teplota tyče v čase t je určena množstvím tepla, které se v ní ze zdroje naskládalo, nasčítalo, naintegrovalo za časový interval od 0 do t. Trochu přesněji řečeno, budeme předpokládat, že řešení takové počáteční úlohy je dáno integrálem

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x,\sigma) \mathrm{d}\sigma, \tag{2.45}$$

kde w je nějaká, zatím neznámá funkce tří proměnných. Tato myšlenka je známa jako *Duhamelův princip*. Funkce u definovaná rovností (2.45) splňuje počáteční podmínku (2.44). Dále pro ni platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t w(t,x,\sigma) \mathrm{d}\sigma = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x,\sigma) \mathrm{d}\sigma,$$

a podle věty o derivaci integrálu závislého na parametru platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t w(t,x,\sigma) \mathrm{d}\sigma = w(t,x,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma) \mathrm{d}\sigma.$$

Po dosazení do rovnice (2.42) dostaneme

$$w(t,x,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma) \mathrm{d}\sigma = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x,\sigma) \mathrm{d}\sigma + f(t,x)$$

a po snadné úpravě

$$\int_0^t \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma) - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x,\sigma)\right) \mathrm{d}\sigma = f(t,x) - w(t,x,t).$$

Z této rovnosti vidíme, že za funkci w ve vyjádření (2.45) řešení úlohy (2.42), (2.44) můžeme dosadit funkci $w = w(t,x,\sigma)$ chápanou jako funkci nezávisle proměnných t a x, s jedním parametrem σ, která při jakékoliv hodnotě tohoto parametru σ splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma) &= a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x,\sigma), \qquad && \text{pro } t > \sigma \text{ a } x \in J, \\ w(\sigma,x,\sigma) &= f(\sigma,x), && \text{pro } x \in J. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Zdůrazněme ještě, že z provedených úvah nijak neplyne, že by řešení úlohy (2.42), (2.44) nutně muselo mít tvar daný rovností (2.45) a dále rovnostmi (2.46). Pouze jsme ukázali, že pokud bude funkce w splňovat rovnosti (2.46), pak funkce (2.45) je řešením úlohy (2.42), (2.44). Proto vyvstává otázka, zda neexistuje i nějaké jiné řešení úlohy (2.42), (2.44). Problematice jednoznačnosti řešení se nebudeme věnovat obecně, ale až později pro rovnice s různými speciálními doplňujícími podmínkami.

Nehomogenní rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.43) má řešení $u = u(t,x)$, které je tvaru

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x), \tag{2.47}$$

kde funkce v je řešením homogenní rovnice (2.41) s počáteční podmínkou (2.43) a funkce w je řešením nehomogenní rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.44). Jinak řečeno, řešení počáteční úlohy pro nehomogenní rovnici je součtem řešení homogenní rovnice s původní počáteční podmínkou a nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou. Vskutku,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}w(t,x) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) + f(t,x) + a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(t,x) = \\ = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(v(t,x) + w(t,x)\big) + f(t,x) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + f(t,x), \\ u(0,x) = v(0,x) + w(0,x) = \varphi(x) + 0 = \varphi(x) \end{aligned}$$

a funkce $u = v + w$ tedy splňuje rovnici (2.42) i počáteční podmínku (2.43).

2.3.3 Parabolická rovnice na kružnici

Budeme řešit nehomogenní parabolickou rovnici (2.42) pro $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$ s počáteční podmínkou (2.43). O počáteční funkci φ a „prostorové části“ nehomogenity $f(t,\cdot)$ budeme předpokládat, že mají stejnou periodu ℓ. Budeme požadovat, aby řešení splňovalo periodickou podmínku (2.21). Obor prostorové proměnné x tedy můžeme chápat jako kružnici délky ℓ, tj. kružnici o poloměru $\ell/(2\pi)$.

Takto formulovanou úlohu lze interpretovat jako model difúze v trubici délky ℓ stočené do prstence.

Víme, že každou po částech spojitou funkci φ s periodou ℓ můžeme vyjádřit jako trigonometrickou Fourierovu řadu

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{\ell}x + b_k\sin\frac{2k\pi}{\ell}x\right),$$

kde

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \psi(\xi)\cos\frac{2k\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi, \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \psi(\xi)\sin\frac{2k\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Řešení úlohy budeme hledat ve tvaru Fourierovy řady. Tento postup se nazývá *metoda Fourierových řad.*

Nechť tedy pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $t > 0$ platí

$$\varphi(x) = \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Phi_k \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \Psi_k \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right),$$

$$f(t,x) = \frac{F_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(F_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + H_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right),$$

kde

$$\Phi_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \cos \frac{2k\pi}{\ell} \xi \mathrm{d}\xi, \quad F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t,\xi) \cos \frac{2k\pi}{\ell} \xi \mathrm{d}\xi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.48}$$

$$\Psi_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \cos \frac{2k\pi}{\ell} \xi \mathrm{d}\xi, \qquad H_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t,\xi) \sin \frac{2k\pi}{\ell} \xi \mathrm{d}\xi, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.49}$$

Řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.21) má být periodické v prostorové proměnné x, hledáme ho tedy ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right), \tag{2.50}$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ jsou zatím neurčené funkce jedné proměnné. Platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{a_0'(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k'(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b_k'(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k\pi}{\ell} \right)^2 \left(a_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right);$$

symbol $'$ přitom označuje obyčejnou derivaci podle proměnné t.

Uvedené řady formálně dosadíme do rovnice (2.42) a počáteční podmínky (2.43),

$$\frac{a_0'(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k'(t) + \left(\frac{2k\pi a}{\ell} \right)^2 a_k(t) \right) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \left(b_k'(t) + \left(\frac{2k\pi a}{\ell} \right)^2 b_k(t) \right) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right] =$$
$$= \frac{F_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(F_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + H_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right),$$

$$\frac{a_0(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(0) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b_k(0) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right) = \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Phi_k \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \Psi_k \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right).$$

Věta o jednoznačnosti Fourierových řad říká, že rovnají-li se součty dvou Fourierových řad, pak se rovnají také jejich koeficienty. Odtud plyne, že pro funkce $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ musí platit

$$a_0'(t) = F_0(t), \quad a_0(0) = \Phi_0,$$

$$a_k'(t) + \left(\frac{2k\pi a}{\ell} \right)^2 a_k(t) = F_k(t), \quad a_k(0) = \Phi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$b_k'(t) + \left(\frac{2k\pi a}{\ell} \right)^2 b_k(t) = H_k(t), \quad B_k(0) = \Psi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

To jsou počáteční úlohy pro obyčejné lineární diferenciální rovnice. Jejich řešení je

$$a_k(t) = \Phi_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} + \int\limits_0^t F_k(s)\mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-s)}\mathrm{d}s, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k(t) = \Psi_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} + \int\limits_0^t H_k(s)\mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-s)}\mathrm{d}s, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Tyto funkce dosadíme do tvaru (2.50) řešení dané úlohy. Po úpravě dostaneme

$$u(t,x) = \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \left(\Phi_k \cos\frac{2k\pi}{\ell}x + \Psi_k \sin\frac{2k\pi}{\ell}x \right) +$$
$$+ \int\limits_0^t \left(\frac{F_0(\sigma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\sigma)} \left(F_k(\sigma) \cos\frac{2k\pi}{\ell}x + H_k(\sigma) \sin\frac{2k\pi}{\ell}x \right) \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Výsledek vyjádříme jen pomocí objektů, které jsou v zadání úlohy, tj. konstanty a a funkcí φ, f. Jinak řečeno, do pravé strany předchozí rovnosti dosadíme vyjádření (2.48) a (2.49) koeficientů Φ_k, Ψ_k a funkcí F_k, H_k. Po úpravě (přehození integrálu a sumace) dostaneme

$$u(t,x) = \int\limits_0^\ell \varphi(\xi) \left(\frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \left(\cos\frac{2k\pi}{\ell}\xi \cos\frac{2k\pi}{\ell}x + \sin\frac{2k\pi}{\ell}\xi \sin\frac{2k\pi}{\ell}x \right) \right) \mathrm{d}\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\ell f(\sigma,\xi) \left(\frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\sigma)} \left(\cos\frac{2k\pi}{\ell}\xi \cos\frac{2k\pi}{\ell}x + \sin\frac{2k\pi}{\ell}\xi \sin\frac{2k\pi}{\ell}x \right) \right) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Tento výsledek ještě upravíme pomocí součtového vzorce na tvar

$$u(t,x) = \int\limits_0^\ell \varphi(\xi) \left(\frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cos\frac{2k\pi}{\ell}(x-\xi) \right) \mathrm{d}\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\ell f(\sigma,\xi) \left(\frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\sigma)} \cos\frac{2k\pi}{\ell}(x-\xi) \right) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Dosažený výsledek lze zapsat v přehlednějším tvaru: Řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.21) je dáno součtem integrálů

$$u(t,x) = \int\limits_0^\ell \varphi(\xi) G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\ell f(\sigma,\xi) G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma, \tag{2.51}$$

kde funkce $G : \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ daná výrazem

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\ell} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cos\frac{2k\pi}{\ell}(x-\xi) \right)$$

je tzv. *funkce vlivu okamžitého bodového zřídla* nebo *zdroje*[2], stručně *zřídlová* nebo *zdrojová funkce,* také *Greenova funkce* nebo *fundamentální řešení.*

[2]Pokud rovnici (2.41) interpretujeme jako model vedení tepla v nějakém prstenci, pak funkce $G(\,\cdot\,,\xi,t)$ udává rozložení teploty v časovém okamžiku t, vzniká-li v tomto okamžiku v bodě ξ jisté množství tepla.

Řešení (2.51) dané úlohy vyšlo jako součet řešení homogenní rovnice (2.41) s nenulovou počáteční podmínkou (2.43) a řešení nehomogenní rovnice (2.42) s nulovou počáteční podmínkou (2.44); jedná se tedy o zvláštní případ obecného výsledku (2.47).

Ještě si povšimněme několika vlastností funkce G, které jsou bezprostředně evidentní, nebo je lze ověřit přímým výpočtem.

- Funkce G je spojitá na množině $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.
- Je symetrická v prvních dvou proměnných, tj. $G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t)$ pro všechny trojice $(x, \xi, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.
- Funkce jedné proměnné $G(\,\cdot\,, \xi, t)$ má spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.
- Funkce dvou proměnných $G(\,\cdot\,, \xi, \,\cdot\,)$, je pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$ řešením rovnice (2.41), které splňuje podmínku periodičnosti (2.21) pro každou hodnotu $t > 0$.
- Pro všechny hodnoty $x, \xi \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{t \to \infty} G(x, \xi, t) = \frac{1}{\ell}.$$

Z poslední uvedené vlastnosti funkce G plyne, že pro řešení $u = u(t, x)$ homogenní parabolické rovnice (2.41) s počáteční podmínkou (2.43), které splňuje podmínku periodičnosti (2.21), platí
$$\lim_{t \to \infty} u(t, x) = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi.$$
Řešení konverguje pro $t \to \infty$ ke konstantní funkci. Pokud tedy úlohu (2.41), (2.43), (2.21) interpretujeme jako model difúze nějaké látky v uzavřeném prstenci délky ℓ, dostáváme, že po dostatečně dlouhém čase se difundující látka stejnoměrně rozptýlí po prstenci a její lineární hustota bude podílem její celkové hmotnosti a délky prstence. To není nikterak překvapivý výsledek; ukazuje však, že se model chová realisticky.

2.3.4 Parabolická rovnice na přímce

Budeme hledat řešení homogenní rovnice (2.41) nebo rovnice nehomogenní (2.42), které je definováno na množině $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ a pro $x \in \mathbb{R}$ splňuje počáteční podmínku (2.43). Navíc budeme požadovat, aby řešení splnilo podmínky
$$\int_{-\infty}^{0} |u(t, x)| \mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_0^{\infty} |u(t, x)| \mathrm{d}x < \infty \tag{2.52}$$
pro $t > 0$.

O počáteční funkci φ a o nehomogenitě f budeme předpokládat, že mají po částech spojitou derivaci a splňují podobné podmínky
$$\int_{-\infty}^{0} |\varphi(x)| \mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_0^{\infty} |\varphi(x)| \mathrm{d}x < \infty, \tag{2.53}$$
$$\int_{-\infty}^{0} |f(t, x)| \mathrm{d}x < \infty, \quad \int_0^{\infty} |f(t, x)| \mathrm{d}x < \infty, \quad \text{pro všechna } t \geq 0. \tag{2.54}$$
Jinak řečeno, funkce φ, $f(t, \,\cdot\,)$ a $u(t, \,\cdot\,)$ jsou v definičním oboru Fourierovy transformace pro každou hodnotu $t > 0$; viz Dodatek A.2.

Homogenní rovnice s nenulovou počáteční podmínkou

Úlohu (2.41), (2.43), (2.52) můžeme podle předpokladu (2.53) nejprve transformovat na Fourierův obraz a pak hledat obraz (spektrum) jejího řešení. Tento způsob hledání řešení bývá nazýván *metoda Fourierovy transformace.*

Při transformaci úlohy čas t zafixujeme, budeme ho považovat za parametr. Fourierův obraz funkce $u(t,\,\cdot\,)$ je komplexní funkce jedné reálné proměnné definovaná předpisem

$$\mathcal{F}\big(u(t,\,\cdot\,)\big)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x;$$

tuto hodnotu budeme stručně označovat symbolem $\hat{u}(t,\xi)$. Fourierův obraz derivace podle parametru t je

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,\,\cdot\,)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,\xi).$$

Poněvadž Fourierova transformace převádí derivaci na násobení výrazem $\mathrm{i}\xi$ (sr. formuli (A.1) a její odvození), je Fourierův obraz druhé derivace funkce $u(t,\,\cdot\,)$ roven

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,\,\cdot\,)\right)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^2\hat{u}(t,\xi) = -\xi^2\hat{u}(t,\xi).$$

Fourierův obraz rovnice (2.41) a počáteční podmínky (2.43) je tedy tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,\xi) = -a^2\xi^2\hat{u}(t,\xi), \quad \hat{u}(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi), \tag{2.55}$$

kde $\hat{\varphi}$ je Fourierův obraz počáteční funkce φ.

Nyní budeme na chvíli považovat proměnnou ξ za parametr a čas t za nezávisle proměnnou, tj. na rovnosti (2.55) se budeme dívat jako na počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici, kde hledanou funkcí je funkce $\hat{u}(\,\cdot\,,\xi)$. Jedná se o úlohu pro lineární homogenní rovnici s konstantním koeficientem, její řešení je dáno formulí

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{-a^2\xi^2t}.$$

To je současně Fourierův obraz řešení počáteční úlohy (2.41), (2.43). Označme ještě

$$\hat{g}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-a^2\xi^2t} \tag{2.56}$$

a Fourierův obraz řešení úlohy (2.41), (2.43) dostáváme ve tvaru

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\hat{g}(t,\xi).$$

Vzhledem k souvislosti Fourierovy transformace a konvoluce funkcí (A.3) můžeme nyní řešení úlohy (2.41), (2.43) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \big(\varphi * g(t,\,\cdot\,)\big)(x). \tag{2.57}$$

Reálná funkce $g(t,\,\cdot\,)$ je vzorem spektrální funkce $\hat{g}(t,\,\cdot\,)$ dané formulí (2.56). Získáme ji tedy inversní Fourierovou transformací (A.2):

$$g(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Pravou stranu nejprve upravíme

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi\mathrm{d}\xi + \mathrm{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\sin x\xi\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi\mathrm{d}\xi,$$

neboť integrovaná funkce v imaginární části je lichá a integrovaná funkce v reálné části je sudá. Ve výsledném integrálu zavedeme substituci a označení

$$\eta = \sqrt{a^2 t}\,\xi, \quad q = \frac{x}{\sqrt{a^2 t}}.$$

Dostaneme

$$\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta\mathrm{d}\eta.$$

Poslední integrál označíme $I(q)$. Tedy

$$I(q) = \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta\mathrm{d}\eta,$$

zejména pro $q = 0$ platí

$$I(0)^2 = \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \iint\limits_{[0,\infty)^2} \mathrm{e}^{-\eta^2-\xi^2}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(-2r\mathrm{e}^{-r^2}\right)\mathrm{d}r\right) = -\frac{\pi}{4}\left[\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=0}^{\infty} = \frac{\pi}{4}, \text{ tj. } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

při výpočtu dvojného integrálu jsme použili transformaci do polárních souřadnic. Dále derivováním podle parametru q obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}I(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta\mathrm{d}\eta = \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}(-\eta\sin q\eta)\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(-2\eta\mathrm{e}^{-\eta^2}\right)\sin q\eta\mathrm{d}\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\mathrm{e}^{-\eta^2}\right]_{\eta=0}^{\infty} - q\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta\mathrm{d}\eta\right) = -\frac{q}{2}I(q).$$

Integrál $I(q)$ je tedy řešením počáteční úlohy pro obyčejnou lineární homogenní diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}I = -\frac{q}{2}I, \quad I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

to znamená, že

$$I(q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{4}}.$$

Návratem k proměnné x dostaneme vyjádření funkce g,

$$g(t,x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2 t}}I\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right). \tag{2.58}$$

Nyní můžeme uzavřít, že řešení počáteční úlohy (2.41), (2.43) je dáno formulí (2.57), kde funkce g je definována rovností (2.58), po dosazení tedy

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)\mathrm{d}\xi.$$

Pro zjednodušení zápisu ještě zavedeme funkci G (opět jí budeme říkat zřídlová funkce) předpisem

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \tag{2.59}$$

a řešení úlohy vyjádříme jako nevlastní integrál

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi. \tag{2.60}$$

Úlohu můžeme mírně zobecnit. Budeme hledat řešení rovnice (2.41) pro $t > \sigma$ a $x \in \mathbb{R}$, kde σ je nějaké reálné číslo. Počáteční podmínku (2.43) v takovém případě nahradíme podmínkou

$$u(\sigma,x) = \varphi(x). \tag{2.61}$$

Nechť funkce u je řešením takové úlohy. Položíme

$$v(t,x) = u(t+\sigma,x).$$

Funkce v je tedy definovaná pro $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ a splňuje podmínky

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t+\sigma,x), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t+\sigma,x), \quad v(0,x) = u(\sigma,x) = \varphi(x).$$

To znamená, že funkce v je řešením úlohy (2.41), (2.43) a je tedy dána integrálem na pravé straně rovnosti (2.60). Poněvadž $u(t,x) = v(t-\sigma,x)$, je řešení rovnice (2.41) na množině $t \geq \sigma$, $x \in \mathbb{R}$, které splňuje počáteční podmínku (2.61) dáno nevlastním integrálem

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi. \tag{2.62}$$

Nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou

Podle 2.3.2 má rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.44) řešení tvaru (2.45) a funkce w je řešením úlohy (2.46) s $J = (-\infty,\infty)$. Podle předpokladu (2.54) a výpočtů v předchozí části, konkrétně podle vztahu (2.62), je funkce w splňující rovnosti (2.46) dána nevlastním integrálem

$$w(t,x,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi) G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi.$$

Dosazením takto definované funkce w do vztahu (2.45) dostaneme řešení úlohy pro nehomogenní rovnici (2.42) s nulovou počáteční podmínkou (2.44) ve tvaru dvojnásobného integrálu

$$u(t,x) = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi) G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma, \tag{2.63}$$

kde funkce G je definována předpisem (2.59).

Nehomogenní rovnice s nenulovou počáteční podmínkou

Uvažujme nehomogenní rovnici (2.42) s počáteční podmínkou (2.43) takovou, že funkce φ splňuje podmínky (2.53). Takto formulovaná úloha má podle 2.3.2 řešení $u = u(t,x)$ tvaru (2.47), kde funkce v je řešením homogenní rovnice (2.41) s počáteční podmínkou (2.43) a funkce w je řešením nehomogenní rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.44). Podle předchozích výsledků je funkce v dána nevlastním integrálem na pravé straně rovnosti (2.60), funkce w je dána dvojnásobným integrálem na pravé straně rovnosti (2.63). Celkem tak dostáváme, že řešení počáteční úlohy (2.42), (2.43) je dáno součtem

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi + \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma, \tag{2.64}$$

kde funkce G je definována předpisem (2.59).

Ještě ukážeme, že toto řešení počáteční úlohy (2.42), (2.43) je jediné ve třídě funkcí, jejichž „prostorová část“ $u(t,\cdot\,)$ je v definičním oboru Fourierovy transformace. Předpokládejme proto, že funkce $u_1 = u_1(t,x)$ a $u_2 = u_2(t,x)$ jsou dvě řešení počáteční úlohy splňující podmínky pro Fourierovu transformaci. Položme $u = u_1 - u_2$. Pak funkce u je ze stejné třídy funkcí a splňuje rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t,x) =$$
$$= a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x) - \left(a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x) \right) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),$$
$$u(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

takže funkce $u = u(t,x)$ je řešením úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{pro } t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = 0, \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Přitom je funkce $u(t,\cdot\,)$ v definičním oboru Fourierovy transformace. Z výpočtů provedených dříve plyne, že tato funkce u je definována formulí (2.60) s $\varphi \equiv 0$, tedy $u \equiv 0$. To znamená, že funkce u_1 a u_2 splývají na svém definičním oboru.

Příklad

Najdeme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru$$

na oblasti $\{(t,x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$, které splňuje počáteční podmínku

$$u(0,x) = \begin{cases} \alpha, & |x| < \frac{1}{2}\varepsilon, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\varepsilon > 0$.

Nejprve se zbavíme reakčního členu ru na pravé straně rovnice tak, že zavedeme novou neznámou funkci $v = v(t,x)$ vztahem

$$v(t,x) = \mathrm{e}^{-rt}u(t,x),$$

tj. provedeme speciální případ transformace rovnice na kanonický tvar uvedené v 2.3.1. Pak je

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{rt}v(t,x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + rv(t,x) \right) \mathrm{e}^{rt}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\mathrm{e}^{rt}$$

a po dosazení do rovnice dostaneme

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + rv(t,x) \right) \mathrm{e}^{rt} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\mathrm{e}^{rt} + rv(t,x)\mathrm{e}^{rt}.$$

Výraz e^{rt} je nenulový, proto ho můžeme vykrátit. Funkce v je tedy řešením homogenní rovnice

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

s počáteční podmínkou

$$v(0,x) = u(0,x)\mathrm{e}^{r\cdot 0} = \begin{cases} \alpha, & |x| < \frac{1}{2}\varepsilon, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podle (2.60) a (2.59) je funkce v dána integrálem

$$v(t,x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}\varepsilon} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \mathrm{d}\xi.$$

Zavedeme v něm substituci

$$\eta = \frac{x-\xi}{\sqrt{2a^2t}}, \qquad \mathrm{d}\xi = -\sqrt{2a^2t}\mathrm{d}\eta.$$

Pak je

$$v(t,x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2x-\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}}^{\frac{2x+\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}} \mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}} \mathrm{d}\eta = \alpha \left[\Phi\left(\frac{2x+\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{2x-\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) \right],$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Dostáváme tak řešení dané úlohy $u(t,x) = \mathrm{e}^{rt}v(t,x)$, tj.

$$u(t,x) = \alpha \left[\Phi\left(\frac{2x+\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{2x-\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) \right] \mathrm{e}^{rt}.$$

V počáteční podmínce nyní zvolíme speciálně $\alpha = \dfrac{A}{\varepsilon}$. Pak je

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)\mathrm{d}x = \frac{A}{\varepsilon} \int_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}\varepsilon} \mathrm{d}x = A$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Pokud tedy danou rovnici interpretujeme jako model autokatalytické reakce (rychlost tvorby reagující látky je úměrná jejímu množství) a difúze, je počáteční množství difundující látky rovno A a toto množství je koncentrováno v malém okolí počátku, na intervalu délky ε. Pro $\varepsilon \to 0$ proto můžeme počáteční funkci považovat za distribuci, tj. zobecněnou funkci, konkrétně za A-násobek Diracovy distribuce. Dále platí

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A}{\varepsilon} \left[\Phi\left(\frac{2x+\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{2x-\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) \right] =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2a^2t}} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2t}} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2t}} - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right)}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2a^2t}}} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2a^2t}} \lim_{\eta\to 0} \frac{\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2t}} + \frac{\eta}{2}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2t}} - \frac{\eta}{2}\right)}{\eta} = \frac{A}{\sqrt{2a^2t}} \Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2t}}\right),$$

a poněvadž derivace distribuční funkce normovaného normálního rozložení pravděpodobnosti je hustotou tohoto rozdělení, dostáváme řešení dané úlohy pro $\varepsilon \to 0$ ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{A}{\sqrt{2a^2t}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\cdot 2a^2t}}\,\mathrm{e}^{rt} = \frac{A}{2\sqrt{a^2\pi t}}\mathrm{e}^{rt-\frac{x^2}{4a^2t}}. \tag{2.65}$$

Pro $r = 0$ dostáváme řešení ve stejném tvaru, jaký mělo „uhodnuté“ řešení (2.26) úlohy (2.22), (2.24).

Podívejme se ještě na interpretaci získaného výsledku. Funkce u daná rovností (2.65) je kladná pro každé $t > 0$ a každé $x \in \mathbb{R}$. Jinak řečeno, za libovolně krátký čas a v libovolně velké vzdálenosti od počátku je koncentrace difundující látky nenulová. To by znamenalo, že nějaké částice látky se pohybují nekonečnou rychlostí, což samozřejmě není fyzikálně možné. Toto pozorování ukazuje, že zjednodušující předpoklady přijaté při vytváření modelu vedou k jeho neadekvátnosti. Fyzikální nesprávnost modelu je však jen teoretická. Vzhledem k tomu, že exponenciální funkce e^{x^2} s rostoucí hodnotou x velice rychle klesá k nule, je nenulová koncentrace v dostatečné vzdálenosti od počátku prakticky nedetekovatelná.

Pokusme se stanovit pozorovatelnou rychlost, jakou se v prostředí šíří difundující látka vznikající autokatylytickou rekcí. Nechť δ označuje minimální koncentraci látky, kterou lze v prostředí detekovat, a $R = R(t)$ časově závislou vzdálenost od počátku, v níž je koncentrace rovna hodnotě δ, tj. $u\big(t, R(t)\big) = \delta$. Dosazením do (2.65) dostaneme

$$\delta = \frac{A\mathrm{e}^{rt}}{2\sqrt{a^2\pi t}}\exp\left(-\frac{R(t)^2}{4a^2t}\right).$$

Z této rovnice vyjádříme

$$\frac{R(t)^2}{t^2} = 4a^2r - \frac{2a^2}{t}\ln\frac{4\pi a^2\delta^2 t}{A^2}$$

a dále

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{R(t)}{t}\right)^2 = 4a^2r.$$

Odtud plyne, že pro dostatečně velký čas t je

$$R(t) \approx 2\sqrt{a^2r}\,t, \tag{2.66}$$

což znamená, že pozorovatená rychlost šíření látky je přibližně konstantní a rovna $2\sqrt{a^2r}$. ∎

Vlastnosti zřídlové funkce

Funkce $G : \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ definovaná vztahem (2.59) má evidentně následující vlastnosti:

- Je spojitá na svém definičním oboru.
- Je symetrická v prvních dvou proměnných, tj. $G(x,\xi,t) = G(\xi,x,t)$ pro všechny trojice $(x,\xi,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$.
- Funkce $G(\,\cdot\,,\xi,t)$ (tj. funkce G chápaná jako funkce jedné proměnné x se dvěma parametry ξ a t) má spojité derivace druhého řádu pro všechny hodnoty $(\xi,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.
- Funkce $G(\,\cdot\,,\xi,\,\cdot\,)$ je pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$ řešením rovnice (2.41), které splňuje podmínky integrovatelnosti

  $$\int_{-\infty}^{0}\big|G(x,\xi,t)\big|\mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_{0}^{-\infty}\big|G(x,\xi,t)\big|\mathrm{d}x < \infty$$

  pro každou hodnotu t.

- Pro jakékoliv hodnoty $\xi \in \mathbb{R}$ a $t > 0$ platí $\lim_{t\to\infty} G(x, \xi, t) = 0$.
- Funkce jedné proměnné $G(0, \cdot, t)$ je pro jakoukoliv hodnotu t sudá.
- Funkce jedné proměnné $\frac{\partial G}{\partial x}(0, \cdot, t)$, tj. funkce daná předpisem
$$\frac{\partial G}{\partial x}(0, \xi, t) = \frac{\xi}{4\sqrt{\pi(a^2t)^3}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)$$
je lichá pro jakoukoliv hodnotu t.

Z posledních dvou vlastností, z toho, že součin sudé a liché funkce je funkce lichá a že integrál z liché funkce na intervalu symetrickém kolem nuly je roven nule, plyne:

Tvrzení 4. Jsou-li $\psi, \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohraničené funkce integrabilní na každém kompaktním intervalu, přičemž funkce ψ je lichá a funkce χ je sudá, pak pro funkce v, w definované vztahy
$$v(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)G(x, \xi, t)\mathrm{d}\xi, \qquad w(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi)G(x, \xi, t)\mathrm{d}\xi$$
platí
$$v(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)G(0, \xi, t)\mathrm{d}\xi = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi)\frac{\partial G}{\partial x}(0, \xi, t)\mathrm{d}\xi = 0.$$

2.3.5 Parabolická rovnice na polopřímce

Budeme hledat řešení nehomogenní parabolické rovnice (2.42) definované na oboru $[0, \infty) \times [0, \infty)$, které splňuje podmínku integrovatelnosti
$$\int_{0}^{\infty} \left|u(t, x)\right|\mathrm{d}x < \infty \tag{2.67}$$
a pro každé $x > 0$ počáteční podmínku (2.43). O počáteční funkci φ a nehomogenitě f budeme předpokládat, že splňují „pravou“ část podmínek integrovatelnosti (2.53) a (2.54). K řešení těchto úloh využijeme výsledky získané při řešení parabolických rovnic na přímce metodou Fourierovy transformace v 2.3.4.

Úlohy s nulovou okrajovou podmínkou

Budeme požadovat, aby řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.67) v levém krajním bodě intervalu $[0, \infty)$ proměnné x splňovalo pro každou hodnotu $t \geq 0$ Dirichletovu
$$u(t, 0) = 0 \tag{2.68}$$
nebo Neumannovu
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.69}$$
nulovou (homogenní) podmínku.

Tvrzení 4 ukazuje, jak tyto úlohy řešit. Při řešení rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.43) pro $x > 0$ a okrajovými podmínkami (2.67), (2.68) pro $t > 0$ prodloužíme počáteční funkci φ a nehomogenitu $f(t, \cdot)$ na celý interval $(-\infty, \infty)$ tak, aby to byly funkce liché. Položíme tedy
$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}, \qquad \tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & x \geq 0, \\ -f(t, -x), & x < 0, \end{cases}, \text{ pro libovolné } t \geq 0.$$

Řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.67), (2.68) je pak podle (2.64) dáno formulí

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma.$$

Tento výsledek ještě upravíme tak, aby ve vyjádření řešení byly pouze funkce vystupující v zadání úlohy, tj. „funkce bez vlnek“. Pro libovolnou ohraničenou lokálně integrovatelnou funkci ψ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi=-\int_{-\infty}^{0}\psi(-\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{\infty}\psi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi=$$
$$=-\int_{0}^{\infty}\psi(\xi)G(x,-\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{\infty}\psi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi=\int_{0}^{\infty}\psi(\xi)\big(G(x,\xi,t)-G(x,-\xi,t)\big)\mathrm{d}\xi.$$

Poněvadž

$$G(x,\xi,t)-G(x,-\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}\right)\left(\exp\frac{2x\xi}{4a^2t}-\exp\frac{-2x\xi}{4a^2t}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^2t}}\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}\right)\sinh\frac{x\xi}{2a^2t},$$

můžeme řešení úlohy

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(t,x), && t>0,\ x>0,\\
&u(0,x)=\varphi(x), && x>0,\\
&u(t,0)=0,\ \int_0^{\infty}\big|u(t,x)\big|\mathrm{d}x<\infty, && t>0
\end{aligned}$$

psát ve tvaru

$$u(t,x)=\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)G_D(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{\infty}f(\sigma,\xi)G_D(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma, \tag{2.70}$$

kde

$$G_D(x,\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^2t}}\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}\right)\sinh\frac{x\xi}{2a^2t}.$$

Analogickým postupem (funkce φ a $f(t,\cdot)$ prodloužíme na interval $(-\infty,\infty)$ tak, aby se z nich staly funkce sudé) odvodíme, že řešení úlohy

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(t,x), && t>0,\ x>0,\\
&u(0,x)=\varphi(x), && x>0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0,\ \int_0^{\infty}\big|u(t,x)\big|\mathrm{d}x<\infty, && t>0,
\end{aligned}$$

tj. úlohy s Neumannovou okrajovou podmínkou v levém krajním bodě, je tvaru

$$u(t,x)=\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)G_N(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{\infty}f(\sigma,\xi)G_N(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma, \tag{2.71}$$

kde

$$G_N(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}\right) \cosh\frac{x\xi}{2a^2t}.$$

Snadno nahlédneme, že funkce $G_D, G_N : (0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ mají následující vlastnosti:

- Jsou spojité na svém definičním oboru.
- Jsou symetrické v prvních dvou proměnných.
- Funkce $G_N(\,\cdot\,,\xi,t)$ a $G_D(\,\cdot\,,\xi,t)$ mají spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů $(\xi,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$.
- Funkce $G_D(\,\cdot\,,\xi,\,\cdot\,)$, resp. $G_N(\,\cdot\,,\xi,\,\cdot\,)$, je pro všechna $\xi \in (0,\infty)$ řešením rovnice (2.41), které splňuje okrajové podmínky (2.67) a (2.68), resp. (2.69), pro každou hodnotu t.
- Pro jakékoliv hodnoty $x,\xi \ge 0$ platí $\lim\limits_{t\to\infty} G_D(x,\xi,t) = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} G_N(x,\xi,t)$.

Úlohy s nenulovou okrajovou podmínkou

Budeme hledat řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.67) na oboru $[0,\infty) \times [0,\infty)$, které navíc splňuje nenulovou (nehomogenní) Dirichletovu

$$u(t,0) = \mu(t) \tag{2.72}$$

nebo Neumannovu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu(t) \tag{2.73}$$

podmínku; přitom μ, ν jsou nějaké funkce definované skoro všude na intervalu $[0,\infty)$ a na tomto intervalu integrovatetelné; funkce μ je navíc skoro všude diferencovatelná . Řešení budeme hledat ve tvaru $u(t,x) = U(t,x) + v(t,x)$, kde funkce U je skoro všude diferencovatelná podle první proměnné a dvakrát diferencovatelná podle druhé a splňuje příslušnou okrajovou podmínku, funkce v je zatím neurčená. Pak platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad u(0,x) = U(0,x) + v(0,x).$$

Po dosazení do rovnice a počáteční podmínky

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f + a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t}, \qquad v(0,x) = \varphi(x) - U(0,x)$$

dostaneme, že funkce $v = v(t,x)$ je řešením úlohy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde f(t,x), && t>0,\ x>0,\\ &v(0,x) = \tilde\varphi(x), && x>0 \end{aligned}$$

s nulovou Dirichletovou nebo Neumannovou podmínkou. Přitom funkce $\tilde\varphi$ a $\tilde f$ jsou dány výrazy

$$\tilde\varphi(x) = \varphi(x) - U(0,x), \qquad \tilde f(t,x) = f(t,x) + a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t,x).$$

Snadno ověříme, že funkce U daná vztahem

$$U(t,x) = \mathrm{e}^{-x}\mu(t) \tag{2.74}$$

splňuje Dirichletovu podmínku (2.72). V takovém případě je

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu(0)\mathrm{e}^{-x}, \qquad \tilde{f}(t,x) = f(t,x) + \big(a^2\mu(t) - \mu'(t)\big)\mathrm{e}^{-x}.$$

Pokud tedy funkce φ a $f(t,\cdot)$ splňují podmínky integrovatelnosti (2.53) a (2.54), pak také funkce $\tilde{\varphi}$ a $\tilde{f}(t,\cdot)$ splňují tytéž podmínky. To znamená, že funkce v je řešením známé úlohy; je dáno formulí (2.70), v níž jsou funkce φ a f psána s vlnkou.

Funkce U daná vztahem

$$U(t,x) = x\mathrm{e}^{-x}\nu(t) \tag{2.75}$$

splňuje Neumannovu podmínku (2.73). V tomto případě je

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \qquad \tilde{f}(t,x) = \big(a^2(x-2)\nu(t) - x\nu'(t)\big)\mathrm{e}^{-x}$$

a funkce v je dána formulí (2.71), v níž píšeme ˜ nad symboly φ a f.

Volit funkci U splňující nehomogenní okrajovou podmínku pomocí rovnosti (2.74) nebo (2.75) je jen jednou z obecných možností. V konkrétních úlohách může tvar nehomogenity napovědět „vhodnější“ tvar funkce U; „vhodnost“ může spočívat v tom, že nehomogenita $\tilde{f}$ v rovnici pro neznámou funkci v je nějakým způsobem jednoduchá (nejlépe nulová), nebo v tom, že funkci U lze nějak (např. fyzikálně) interpretovat.

Příklad

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && t>0,\ x>0,\\
&u(0,x) = 0, && x>0,\\
&u(t,0) = \sin t,\ \int_0^\infty |u(t,x)|\mathrm{d}x < \infty, && t>0.
\end{aligned}$$

Tuto úlohu můžeme interpretovat jako popis vedení tepla v dlouhé tyči, která je na povrchu izolovaná, na počátku má nulovou teplotu a na jednom konci ji periodicky zahříváme a ochlazujeme. Lze očekávat, že v každém bodě tyče se bude teplota měnit se stejnou periodou. Ovšem vliv kolísání teploty na konci tyče na teplotu ve vzdálenosti x od něho se projeví s nějakým zpožděním, které je tím větší, čím je vzdálenost x větší; v nejjednodušším případě by zpoždění mohlo být vzdálenosti přímo úměrné. Amplituda kolísání teploty se musí s rostoucí vzdáleností od konce zmenšovat, a to tak, aby byla splněna podmínka integrovatelnosti. Tato úvaha vede k nápadu, že funkce U by mohla být tvaru

$$U(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(t-\beta x),$$

kde α, β jsou zatím neurčené kladné konstanty. Při této volbě je

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(t-\beta x),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\big((\alpha^2-\beta^2)\sin(t-\beta x) + 2\alpha\beta\cos(t-\beta x)\big),$$

takže

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\big(a^2(\alpha^2-\beta^2)\sin(t-\beta x) + (2a^2\alpha\beta - 1)\cos(t-\beta x)\big).$$

Aby byl poslední výraz nenulový, budeme požadovat $\alpha^2 = \beta^2$, $2a^2\alpha\beta = 1$, tedy zvolíme

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2a^2}}, \qquad U(t,x) = \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right)\sin\left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right).$$

Dostáváme tak řešení dané úlohy ve tvaru $u(t,x) = U(t,x) + v(t,x)$, kde v je řešením počáteční úlohy pro homogenní parabolickou rovnici na polopřímce s homogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, && t > 0,\ x > 0,\\
&v(0,x) = \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right), && x > 0,\\
&v(t,0) = 0,\ \int_0^\infty |v(t,x)| \mathrm{d}x < \infty, && t > 0.
\end{aligned}$$

Podle (2.70) je tedy řešení úlohy dáno formulí

$$u(t,x) = \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right) \sin\left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t} - \frac{\xi}{\sqrt{2a^2}}\right) \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a^2}}\right) \cosh \frac{x\xi}{2a^2 t} \mathrm{d}\xi.$$

Ještě si můžeme povšimnut, že

$$\lim_{t\to\infty} \big(u(t,x) - U(t,x)\big) = 0;$$

řešení dané úlohy je asymptoticky ekvivalentní s „uhodnutou“ funkcí U. V odstavci 2.3.8 uvidíme, že funkce U vyjadřuje speciální případ prvních dvou Fourierových zákonů vedení tepla. ■

2.3.6 Parabolická rovnice na úsečce

Nyní budeme hledat řešení parabolické rovnice homogenní (2.41) nebo nehomogenní (2.42) na oboru $\{(t,x) : t > 0, 0 < x < \ell\}$. O hledané funkci u budeme předpokládat, že pro každou hodnotu $x \in (0,\ell)$ splňuje počáteční podmínku (2.43). Dále budeme pro $t > 0$ požadovat splnění homogenních (2.19) nebo nehomogenních (2.20) Newtonových okrajových podmínek v krajních bodech intervalu $(0,\ell)$. Takovou úlohu můžeme interpretovat jako model difúze ve válci konečné délky ℓ nebo jako model vedení tepla v tyči délky ℓ.

Základní myšlenkou při řešení těchto úloh je oddělení času a prostorové proměnné, tj. předpoklad, že řešení lze hledat ve tvaru součinu dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na čase t a druhá pouze na prostorové proměnné x. Podle tohoto postupu se tato metoda nazývá *separace proměnných,* podle svého objevitele se nazývá *Fourierova metoda.*

Užití metody nejprve ukážeme na jednodušší úloze – řešení rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami. K jejímu řešení stačí znalost základů teorie Fourierových řad. Pro řešení úlohy s obecnými Newtonovými okrajovými podmínkami se využívá Sturmova teorie řešení okrajových úloh pro obyčejné lineární diferenciální rovnice druhého řádu, viz Dodatek A.3.

Dirichletova úloha

Uvažujme nejprve úlohu pro homogenní rovnici s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && t > 0,\ x \in (0,\ell),\\
&u(0,x) = \varphi(x), && x \in (0,\ell),\\
&u(t,0) = 0 = u(t,\ell), && t > 0.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

O počáteční funkci φ budeme předpokládat, že je nenulová[3]. Pak také řešení u musí být nenulová funkce.

[3]Poznamenejme, že počáteční funkce φ nemusí splňovat okrajovou podmínku $\varphi(0) = 0 = \varphi(\ell)$, poněvadž po řešení nepožadujeme, aby splňovalo rovnici a podmínky všude, ale stačí, aby je splňovalo skoro všude, sr. str. 56.

Řešení úlohy (2.76) budeme hledat ve tvaru součinu funkcí, z nichž jedna závisí pouze na čase t a druhá pouze na prostorové proměnné x, tj.

$$u(t,x) = T(t)X(x);$$

obě funkce T, X musí být nenulové. Toto vyjádření dosadíme do řešené rovnice. Dostaneme

$$T'X = a^2TX'',$$

kde $'$ označuje obyčejnou derivaci funkce podle její jediné proměnné. Tuto rovnost vydělíme součinem a^2TX,

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X}.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na proměnné t, výraz na pravé straně pouze na proměnné x. Jinak řečeno, výraz na levé straně nezávisí na proměnné x a proto ani výraz na pravé straně nemůže na x záviset. Obě strany rovnosti jsou tedy konstantní. Označíme jejich hodnotu jako $-\lambda$. Dostaneme tak dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{T'}{a^2T} = -\lambda, \qquad \frac{X''}{X} = -\lambda. \tag{2.77}$$

Věnujme se nejprve druhé z nich. Přepíšeme ji ve tvaru

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{2.78}$$

To je obyčejná lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantním koeficientem. Z okrajové podmínky v úloze (2.76) plyne, že

$$T(t)X(0) = 0 = T(t)X(\ell),$$

což je možné splnit jen tak, že funkce X, tedy řešení rovnice (2.78), splňuje okrajové podmínky

$$X(0) = 0 = X(\ell). \tag{2.79}$$

Pokud je $\lambda < 0$, má rovnice (2.78) obecné řešení tvaru

$$X(x) = A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

První z okrajových podmínek (2.79) klade na integrační konstanty A, B omezení

$$A + B = 0$$

a druhá z nich omezení

$$A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\ell} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,\ell} = 0.$$

Z první rovnosti dostaneme $B = -A$ a po dosazení do druhé dostaneme

$$0 = A\left(\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\ell} - \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,\ell}\right) = 2A\sinh\sqrt{-\lambda}\,\ell.$$

Avšak hyperbolický sinus má hodnotu 0 jedině pro argument rovný 0 a $\sqrt{-\lambda}\,\ell > 0$. Musí tedy být $A = 0$ a v důsledku toho i $B = 0$. To znamená, že v případě $\lambda < 0$ má úloha (2.78), (2.79) pouze nulové, tj. nevyhovující řešení.

Pokud je $\lambda = 0$, pak je řešením rovnice $X'' = 0$ lineární funkce

$$X(x) = Ax + B.$$

První z podmínek (2.79) dá $B = 0$ a druhá z nich následně $A = 0$. V případě $\lambda = 0$ opět nemá úloha (2.78), (2.79) vyhovující řešení.

Pokud je $\lambda > 0$, pak má rovnice (2.78) obecné řešení

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Podmínka $X(0) = 0$ dá $A = 0$. Poté podmínka $X(\ell) = 0$ vede k rovnosti

$$0 = B\sin\sqrt{\lambda}\,\ell.$$

Abychom dostali nenulové řešení, musí být $B \neq 0$ a tedy $\sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0$. Z této goniometrické rovnice plyne, že $\sqrt{\lambda}\,\ell = k\pi$, kde k je nějaké celé číslo. Poněvadž $\lambda > 0$ a $\ell > 0$, musí být také $k > 0$. Dostáváme tak možné hodnoty konstanty λ. Označme je

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Úloha (2.78), (2.79) má nenulové řešení pouze pro hodnoty $\lambda = \lambda_k$; zapišme ho v obecném tvaru

$$X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x.$$

Nalezenou hodnotu λ_k dosadíme do první rovnice (2.77). Dostaneme obyčejnou lineární homogenní rovnici

$$T' = -\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 T,$$

která má obecné řešení

$$T_k(t) = B_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t}.$$

Součin funkcí X_k, T_k označíme u_k. Dostáváme tak nekonečnou spočetnou množinu řešení

$$u_k(t,x) = C_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi}{\ell}x, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Každá z těchto funkcí splňuje rovnici a okrajové podmínky v úloze (2.76). Poněvadž je řešená rovnice homogenní, platí princip superpozice, a proto také lineární kombinace funkcí u_k splňuje rovnici a okrajové podmínky uvažované úlohy. Řešení tedy můžeme formálně zapsat ve tvaru řady

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi}{\ell}x. \tag{2.80}$$

Z počáteční podmínky v úloze (2.76) dostaneme nyní rovnost

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x,$$

kterou můžeme přečíst tak, že počáteční funkce φ má Fourierův rozvoj do sinové řady. Pak konstanty C_k jsou Fourierovými koeficienty funkce φ vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí

$$\left\{\sin\frac{k\pi}{\ell}x\right\}_{k=1}^{\infty},$$

a to znamená, že je můžeme vyjádřit ve tvaru

$$C_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\,\mathrm{d}\xi.$$

Nekonečná řada v rovnosti (2.80) jakožto Fourierova řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně. Proto můžeme řešení úlohy (2.76) upravit

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} x =$$

$$= \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \, \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell}\xi \, \sin \frac{k\pi}{\ell} x \, \mathrm{d}\xi.$$

Označíme-li nyní

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell}\xi \, \sin \frac{k\pi}{\ell} x, \tag{2.81}$$

můžeme řešení úlohy (2.76) psát ve známém tvaru

$$u(t,x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi. \tag{2.82}$$

Opět zformulujeme několik evidentních vlastností funkce $G : [0,\ell]^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$:

- Funkce G je spojitá na množině $(0,\ell)^2 \times (0,\infty)$.
- Je symetrická v prvních dvou proměnných.
- Funkce jedné proměnné $G(\,\cdot\,,\xi,t)$ má spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů $(\xi,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty)$.
- Funkce dvou proměnných $G(\,\cdot\,,\xi,\,\cdot\,)$, je pro všechna $\xi \in (0,\ell)$ řešením rovnice (2.41), které splňuje nulové Dirichletovy okrajové podmínky pro každou hodnotu t.
- Pro všechny hodnoty $x, \xi \in [0,\ell]$ platí $\lim\limits_{t\to\infty} G(x,\xi,t) = 0$.

Řešení úlohy pro nehomogenní rovnici s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), && t > 0,\ x \in (0,\ell), \\ &u(0,x) = \varphi(x), && x \in (0,\ell), \\ &u(t,0) = 0 = u(t,\ell), && t > 0. \end{aligned}$$

je podle Duhamelova principu dáno součtem

$$u(t,x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi + \int_0^t \left(\int_0^{\ell} f(\sigma,\xi) G(x,\xi,t-\sigma) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma.$$

V případě úlohy pro nehomogenní rovnici s obecnými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), && t > 0,\ x \in (0,\ell), \\ &u(0,x) = \varphi(x), && x \in (0,\ell), \\ &u(t,0) = \mu_0(t),\ u(t,\ell) = \mu_1(t), && t > 0 \end{aligned}$$

můžeme řešení hledat ve tvaru

$$u(t,x) = U(t,x) + v(t,x),$$

kde funkce U splňuje okrajové podmínky. Zřejmě stačí funkci U volit jako lineární v proměnné x, tj.

$$U(t,x) = \mu_0(t) + \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{\ell}x.$$

Funkce v je pak řešením úlohy s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(t,x) - \mu_0'(t) + \frac{\mu_1'(t) - \mu_0'(t)}{\ell}x, && t > 0,\ x \in (0,\ell),\\
&v(0,x) = \varphi(x) - \mu_0(0) - \frac{\mu_1(0) - \mu_0(0)}{\ell}x, && x \in (0,\ell),\\
&v(t,0) = 0 = v(t,\ell), && t > 0.
\end{aligned}$$

Příklad

Najdeme řešení homogenní parabolické rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro $t > 0$ a $x \in (0,\ell)$, které splňuje konstantní počáteční podmínku

$$u(0,x) = u_0$$

pro $x \in (0,\ell)$ a konstantní Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(t,0) = 0, \qquad u(t,\ell) = u_1$$

pro $t > 0$.

Tuto úlohu lze interpretovat jako model chladnutí tyče délky ℓ, která byla na počátku zahřáta na teplotu u_0, na jejím levém konci udržujeme nulovou teplotu a na pravém teplotu u_1. Tyč je na svém povrchu tepelně izolovaná, takže na jejím povrchu nedochází k výměně tepla s okolním prostředím.

V daném případě okrajové podmínky splňuje funkce

$$U(t,x) = \frac{u_1}{\ell}x.$$

Hodnoty této funkce nezávisí na čase, takže řešení úlohy je tvaru

$$u(t,x) = \frac{u_1}{\ell}x + v(t,x),$$

kde funkce v je řešením úlohy

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, && t > 0,\ x \in (0,\ell),\\
&v(0,x) = u_0 - \frac{u_1}{\ell}x, && x \in (0,\ell),\\
&v(t,0) = 0 = v(t,\ell), && t > 0.
\end{aligned}$$

Podle obecných výsledků je

$$v(t,x) = \int\limits_0^\ell \left(u_0 - \frac{u_1}{\ell}\xi\right)\frac{2}{\ell}\sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\,\sin\frac{k\pi}{\ell}x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\ell}\sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{\ell}x\int\limits_0^\ell \left(u_0 - \frac{u_1}{\ell}\xi\right)\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi.$$

Integrál vypočítáme „per partes“,

$$\int_0^\ell \left(u_0 - \frac{u_1}{\ell}\xi\right) \sin \frac{k\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi = -\frac{\ell}{k\pi}\left[\left(u_0 - \frac{u_1}{\ell}\xi\right) \cos \frac{k\pi}{\ell}\xi\right]_{\xi=0}^{\ell} - \frac{u_1}{\ell}\frac{\ell}{k\pi}\int_0^\ell \cos \frac{k\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{\ell}{k\pi}\left((u_0 - u_1)\cos k\pi - u_0\right) = \frac{\ell}{k\pi}\left(u_0 - (u_0 - u_1)(-1)^k\right).$$

Dostáváme tak řešení dané úlohy vyjádřené ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{u_1}{\ell}x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_0 - (u_0 - u_1)(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{\ell}x.$$

■

Obecná Newtonova úloha

Uvažujme nejprve úlohu homogenní, tj. homogenní rovnici (2.41) s homogenními okrajovými podmínkami (2.19) na intervalu $(0,\ell)$. Hledáme tedy řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && t>0,\ x\in(0,\ell),\\ u(0,x) &= \varphi(x), && x\in(0,\ell),\\ \alpha_0 u(t,0) + \beta_0\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 &= \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell), && t>0. \end{aligned} \tag{2.83}$$

O počáteční funkci φ opět předpokládáme, že je nenulová, a proto i řešení úlohy musí být nenulové. Nejprve separujeme proměnné, tj. předpokládáme, že řešení má tvar

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{2.84}$$

Toto vyjádření dosadíme do dané rovnice a upravíme tak, že na pravé straně ponecháme pouze funkci X a její derivaci. Dostaneme rovnost

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X},$$

jejíž levá strana nezávisí na proměnné x a pravá nezávisí na proměnné t; výrazy na obou stranách jsou tedy rovny nějaké konstantě, kterou opět označíme $-\lambda$ a dostaneme dvě rovnice

$$\frac{T'}{a^2T} = -\lambda, \qquad \frac{X''}{X} = -\lambda. \tag{2.85}$$

Druhou z nich přepíšeme do tvaru obyčejné lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantním koeficientem

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{2.86}$$

Vyjádření (2.84) řešení úlohy (2.83) dosadíme do okrajové podmínky. Dostaneme rovnosti

$$\alpha_0 T(t)X(0) + \beta_0 T(t)X'(0) = 0 = \alpha_1 T(t)X(\ell) + \beta_1 T(t)X'(\ell),$$

které mají být splněny pro libovolnou hodnotu $t>0$. Odtud plyne, že řešení X rovnice (2.86) splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 X(0) + \beta_0 X'(0) = 0 = \alpha_1 X(\ell) + \beta_1 X'(\ell). \tag{2.87}$$

Úloha (2.86), (2.87) pro obyčejnou lineární rovnici druhého řádu s parametrem λ a homogenními okrajovými podmínkami je Sturmovou-Liouvilleovou úlohou, sr. Dodatek A.3.2. Podle Věty 2 existuje rostoucí posloupnost vlastních čísel, z nichž nejmenší je větší nebo rovno 0. Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že 0 je vlastním číslem úlohy (2.86), (2.87) právě tehdy, když

$$\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = \alpha_0\alpha_1\ell.$$

V takovém případě označíme $\lambda_0 = 0$; příslušná vlastní funkce v_0 je lineární,

$$v_0(x) = \alpha_1 x - \alpha_1\ell - \beta_1.$$

Pro zjednodušení (sjednocení) zápisu zavedeme množinu indexů

$$I = \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots\}, & \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = \alpha_0\alpha_1\ell, \\ \{1, 2, 3, \dots\}, & \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 \neq \alpha_0\alpha_1\ell. \end{cases} \tag{2.88}$$

Řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (2.86), (2.87) dostaneme posloupnost vlastních čísel λ_k a k nim příslušné vlastní funkce v_k, $k \in I$. Dostáváme tak spočetně mnoho řešení

$$X_k(x) = v_k(x), \qquad k \in I$$

okrajové úlohy (2.86), (2.87).

Nalezené hodnoty λ_k, $k \in I$ dosadíme do první rovnice (2.85). Dostaneme tak obyčejné lineární homogenní rovnice

$$T' = -a^2\lambda_k T, \qquad k \in I,$$

jejichž obecné řešení je tvaru

$$T_k(t) = C_k \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}.$$

Po dosazení funkcí X_k, T_k do vyjádření (2.84) hledaného řešení úlohy pro parciální diferenciální rovnici dostaneme spočetný systém funkcí

$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = C_k \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t} v_k(x), \qquad k \in I,$$

z nichž každá je řešením dané rovnice a splňuje příslušné okrajové podmínky z úlohy (2.83). Poněvadž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní, a tedy splňují princip superpozice, můžeme řešení této úlohy psát ve tvaru nekonečné řady

$$u(t,x) = \sum_{k\in I} C_k \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t} v_k(x) \tag{2.89}$$

se zatím neurčenými koeficienty C_k, $k \in I$. Ty získáme z dosud nevyužité počáteční podmínky

$$\varphi(x) = u(0,x) = \sum_{k\in I} C_k v_k(x).$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že konstanty C_k jsou Fourierovými keficienty funkce φ vzhledem k ortogonálnímu systému vlastních funkcí $\{v_k\}_{k\in I}$, tedy

$$C_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_k(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Tyto koeficienty dosadíme do rovnosti (2.89) vyjadřující řešení a upravíme ji na tvar

$$u(t,x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) \sum_{k\in I} \frac{v_k(x)v_k(\xi)}{\|v_k\|^2} \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}.$$

Dosažený výsledek shrneme: Řešení úlohy (2.83) je dáno integrálem

$$u(t,x)=\int_0^\ell \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi\,;$$

přitom funkce $G:[0,\ell]^2\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ je definována nekonečnou řadou

$$G(x,\xi,t)=\sum_{k\in I}\frac{v_k(x)v_k(\xi)}{\|v_k\|^2}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t},$$

kde λ_k jsou vlastní hodnoty a v_k jsou příslušné vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (2.86), (2.87), indexová množina I je zavedena vztahem (2.88).

Zřídlová funkce G má vlastnosti:

- Funkce G je spojitá na množině $(0,\ell)^2\times(0,\infty)$.
- Je symetrická v prvních dvou proměnných.
- Funkce jedné proměnné $G(\,\cdot\,,\xi,t)$ má spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů $(\xi,t)\in(0,\ell)\times(0,\infty)$.
- Funkce dvou proměnných $G(\,\cdot\,,\xi,\,\cdot\,)$ je pro všechna $\xi\in(0,\ell)$ řešením rovnice (2.41), které splňuje homogenní Newtonovy okrajové podmínky

  $$\alpha_0G(0,\xi,t)+\beta_0\frac{\partial G}{\partial x}(0,\xi,t)=0=\alpha_1G(\ell,\xi,t)+\beta_1\frac{\partial G}{\partial x}(\ell,\xi,t)$$

  pro každou hodnotu $t>0$.
- Pro všechny hodnoty $x,\xi\in[0,\ell]$ platí

  $$\lim_{t\to\infty}G(x,\xi,t)=\begin{cases}\dfrac{3\left(\alpha_1^2x\xi-\alpha_1(x+\xi)(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_1+\beta_1)^2\right)}{\ell\left(\alpha_1^2\ell^2+3\beta_1(\alpha_1+\beta_1)\right)}, & \alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1=\alpha_0\alpha_1\ell,\\[2ex] 0, & \alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1\neq\alpha_0\alpha_1\ell.\end{cases}$$

Řešení úlohy pro nehomogenní rovnici s homogenními Newtonovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(t,x), && t>0,\ x\in(0,\ell),\\ u(0,x)&=\varphi(x), && x\in(0,\ell),\\ \alpha_0u(t,0)+\beta_0\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)&=0=\alpha_1u(t,\ell)+\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell), && t>0\end{aligned}$$

je podle Duhamelova principu dáno součtem

$$u(t,x)=\int_0^\ell\varphi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\left(\int_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma.$$

V případě úlohy pro nehomogenní rovnici s nehomogenními Newtonovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(t,x), && t>0,\ x\in(0,\ell),\\ u(0,x)&=\varphi(x), && x\in(0,\ell),\\ \alpha_0u(t,0)+\beta_0\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)&=\mu_0(t),\ \ \alpha_1u(t,\ell)+\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell)=\mu_1(t), && t>0\end{aligned}$$

můžeme řešení hledat ve tvaru

$$u(t,x) = U(t,x) + v(t,x),$$

kde funkce U splňuje okrajové podmínky. Funkce v je pak řešením úlohy pro nehomogenní rovnici s homogenními Newtonovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) + f(t,x), &\qquad t>0,\ x\in(0,\ell),\\
v(0,x) = \varphi(x) - U(0,x), &\qquad x\in(0,\ell),\\
\alpha_0 v(t,0) + \beta_0\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = 0 = \alpha_1 v(t,\ell) + \beta_1\frac{\partial v}{\partial x}(t,\ell), &\qquad t>0.
\end{aligned}$$

Funkci U lze volit ve tvaru

$$U(t,x) = \begin{cases}
\dfrac{\alpha_1\mu_0(t) - \alpha_0\mu_1(t)}{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 - \alpha_0\alpha_1\ell}x + \dfrac{\beta_0\mu_1(t) - \beta_1\mu_0(t) - \ell\alpha_1\mu_0(t)}{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 - \alpha_0\alpha_1\ell}, & \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 \neq \alpha_0\alpha_1\ell,\\[2ex]
\dfrac{\beta_0\mu_1(t) - \beta_1\mu_0(t) - \alpha_1\ell\mu_0}{\beta_0\ell(\alpha_1\ell + 2\beta_1)}x^2 + \dfrac{\mu_0(t)}{\beta_0}x, & \begin{array}{l}\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 = \alpha_0\alpha_1\ell,\\ \beta_0\ell(\alpha_1\ell + 2\beta_1) \neq 0,\end{array}\\[2ex]
\dfrac{\alpha_1\mu_0(t) - \alpha_0\mu_1(t)}{2\alpha_0\alpha_1}\exp\left(\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}x\right) + \dfrac{\mu_1(t)}{\alpha_1}, & \beta_0 \neq 0 = \beta_0\alpha_1 + \beta_1\alpha_0,\\[2ex]
\dfrac{\alpha_1\mu_0(t) - \alpha_0\mu_1(t)}{\alpha_0\alpha_1}\exp\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + \dfrac{\mu_1(t)}{\alpha_1}, & \beta_0 = 0 = \beta_1 + \alpha_1\ell.
\end{cases} \tag{2.90}$$

Zejména pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$ (Dirichletovy podmínky) dostaneme

$$U(t,x) = \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{\ell}x + \mu_0(t)$$

a pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$ (Neumannovy podmínky)

$$U(t,x) = \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{2\ell}x^2 + \mu_0(t)x.$$

V případě $\alpha_0 = -\alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$ (Robinovy podmínky) lze položit

$$U(t,x) = \frac{\mu_1(t) + \mu_0(t)}{2 - \alpha_0\ell}x - \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t) + \alpha_0\ell\mu_0(t)}{\alpha_0(2 - \alpha_0\ell)}, \quad \text{pokud } \alpha_0 \neq 2\ell,$$

a

$$U(t,x) = \frac{\mu_0(t) + \mu_1(t)}{2\alpha_0}\mathrm{e}^{\alpha_0 x} - \frac{\mu_1(t)}{\alpha_0}, \quad \text{pokud } \alpha_0 = 2\ell.$$

Je-li možné funkci U volit jako lineární ve druhé proměnné x (tj. pokud $\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 \neq \alpha_0\alpha_1\ell$), pak je $\dfrac{\partial U}{\partial x^2} \equiv 0$ a nehomogenita řešené rovnice se poněkud zjednoduší. Pokud navíc okrajové podmínky nezávisí na čase, tj. $\mu_0 \equiv const$, $\mu_1 \equiv const$, pak také $\dfrac{\partial U}{\partial t} \equiv 0$ a funkce v je řešením původní rovnice.

2.3.7 Počáteční úlohy pro parabolické rovnice – shrnutí

V odstavcích 2.3.3–2.3.6 jsme našli řešení nehomogenní parabolické rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.43) v několika speciálních případech. Nalezené řešení úlohy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), &\qquad t>0,\ x\in J,\\
u(0,x) &= \varphi(x), &\qquad x\in J,
\end{aligned} \tag{2.91}$$

kde J je nějaký omezený nebo neomezený interval reálných čísel, které navíc splňuje nějaké homogenní okrajové podmínky, je tvaru

$$u(t,x) = \int\limits_J \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi + \int\limits_0^t \left(\int\limits_J f(\sigma,\xi) G(x,\xi,t-\sigma) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma. \tag{2.92}$$

Zřídlová (Greenova) funkce $G : J^2 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je určena intervalem J a okrajovými podmínkami. V Tabulce 2.1 jsou uvedeny zřídlové funkce v některých speciálních případech.

Řešení úlohy (2.91) s nehomogenními okrajovými podmínkami lze hledat ve tvaru

$$u(t,x) = U(t,x) + v(t,x),$$

kde funkce $U : (0,\infty) \times J \to \mathbb{R}$ splňuje okrajové podmínky a funkce v je řešením úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{f}(t,x), & t > 0,\ x \in J, \\ u(0,x) &= \tilde{\varphi}(x), & x \in J, \end{aligned}$$

s homogenními podmínkami stejného typu; přitom

$$\tilde{f}(t,x) = f(t,x) + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t,x), \qquad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(0,x).$$

Volba funkce U není nijak apriori dána, tvary zavedené rovnostmi (2.74), (2.75) nebo (2.90) pro speciální intervaly J a speciální okrajové podmínky jsou jenom jednou z možností.

Ještě si připomeňme, že pro téměř všechny zřídlové funkce G uvedené v Tabulce 2.1 (výjimkou je funkce G pro homogenní Neumannovu úlohu na úsečce), platí vztah

$$\lim_{t \to \infty} G(x,\xi,t) = 0 \text{ pro všechna } (x,\xi) \in \mathbb{R}^2.$$

To znamená, že po „dostatečně dlouhém čase“ bude hodnota prvního integrálu na pravé straně rovnosti (2.92) zanedbatelná. Jinak řečeno, řešení úlohy (2.91) v „dostatečně dlouhém časovém horizontu“ nezávisí na počáteční podmínce, v průběhu času vymizí informace o počátku. Systém s takovou vlastností – jeho vývoj za dlouhý časový interval nezávisí na počátečním stavu – se nazývá *ergodický.*

2.3.8 Úloha bez počátečních podmínek

Dosud jsme hledali řešení parabolické rovnice (2.41) nebo (2.42), které splňovalo nějakou počáteční podmínku, tj. znali jsme stav v počátečním čase $t = 0$. Tato informace však nemusí být vždy dostupná – pokud navíc proces popsaný parabolickou rovnicí pozorujeme v čase dlouho od jeho začátku. Vzhledem k ergodičnosti však počáteční stav nemá na vývoj systému už nějaký podstatný vliv.

Konkrétně: Teplota na zemském povrchu v průběhu dne i v průběhu roku kolísá. Toto kolísání lze v prvním přiblížení považovat za periodické. Budeme modelovat šíření periodických teplotních změn v zemi, kterou budeme považovat za homogenní poloprostar; budeme ho charakterizovat jedinou souřadnicí x, hloubkou pod povrchem. Při mnohonásobném pravidelném opakování teplotních změn na povrchu bude vliv počáteční teploty menší, než vlivy, které zanedbáváme (např. nehomogennost půdy, odchylky od přesné periodičnosti průběhu povrchové teploty a podobně).

Teplotu v čase t a v hloubce x označíme $u(t,x)$. Vnitřní zdroje tepla v půdě (např. geotermální energii) neuvažujeme. Proto bude vývoj teploty popsán homogenní parabolickou rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.93}$$

interval J	okrajová podmínka	$G(x,\xi,t)$
$(-\infty,\infty)$	$u(t,x)=u(t,x+\ell)$	$\dfrac{1}{\ell}\left(1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t}\cos\dfrac{2k\pi}{\ell}(x-\xi)\right)$
$(-\infty,\infty)$	$\int\limits_{-\infty}^{0}\lvert u(t,x)\rvert\mathrm{d}x<\infty,\ \int\limits_{0}^{\infty}\lvert u(t,x)\rvert\mathrm{d}x<\infty$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2\sqrt{\pi a^2 t}}$
$(0,\infty)$	$u(t,0)=0,\ \int\limits_{0}^{\infty}\lvert u(t,x)\rvert\mathrm{d}x<\infty$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi a^2 t}}\sinh\dfrac{x\xi}{2a^2t}$
$(0,\infty)$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0,\ \int\limits_{0}^{\infty}\lvert u(t,x)\rvert\mathrm{d}x<\infty$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi a^2 t}}\cosh\dfrac{x\xi}{2a^2t}$
$(0,\ell)$	$u(t,0)=0=u(t,\ell)$	$\dfrac{2}{\ell}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\dfrac{k\pi}{\ell}\xi\sin\dfrac{k\pi}{\ell}x$
$(0,\ell)$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0=\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\ell)$	$\dfrac{1}{\ell}\left(1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t}\cos\dfrac{k\pi}{\ell}\xi\cos\dfrac{k\pi}{\ell}x\right)$
$(0,\ell)$	$u(t,0)=0=\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\ell)$	$\dfrac{2}{\ell}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 t}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2\ell}\xi\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2\ell}x$
$(0,\ell)$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0=u(t,\ell)$	$\dfrac{2}{\ell}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 t}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2\ell}\xi\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2\ell}x$

Tabulka 2.1: Zřídlové funkce úlohy (2.91) pro některé homogenní okrajové podmínky.

Tabulka 2.1: pokračování

$(0,\ell)$	$u(t,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\ell)=-hu(t,\ell)$	$2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(h^2+\lambda_k)}{\ell(h^2+\lambda_k)+2h}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\sin\sqrt{\lambda_k}x,$ λ_k jsou kladné kořeny rovnice $\sqrt{\lambda}=-h\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda}\ell\right)$
$(0,\ell)$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\ell)=-hu(t,\ell)$	$2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(h^2+\lambda_k)}{\ell(h^2+\lambda_k)+2h}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\cos\sqrt{\lambda_k}\xi\cos\sqrt{\lambda_k}x,$ λ_k jsou kladné kořeny rovnice $\sqrt{\lambda}=h\operatorname{cotg}\left(\sqrt{\lambda}\ell\right)$
$(0,\ell)$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0)=hu(t,0),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\ell)=-hu(t,\ell)$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\left(\cos\sqrt{\lambda_k}\xi+\dfrac{h}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\right)\left(\cos\sqrt{\lambda_k}x+\dfrac{h}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\right)}{\dfrac{\ell}{2}+\dfrac{h^2\ell+2h}{2\lambda_k}},$ λ_k jsou kladné kořeny rovnice $\dfrac{\sqrt{\lambda}}{h}-\dfrac{h}{\sqrt{\lambda}}=2\operatorname{cotg}\left(\sqrt{\lambda}\ell\right)$

kde a^2 vyjadřuje koeficient teplotní vodivosti půdy. Teplota na povrchu bude vyjádřena okrajovou podmínkou

$$u(t, 0) = \mu(t), \tag{2.94}$$

kde μ je nějaká spojitá periodická funkce. Jakožto spojitá periodická funkce je μ také ohraničená, tj. existuje nějaká hodnota M, že

$$|\mu(t)| \leq M \text{ pro } t \in \mathbb{R}.$$

Teplota půdy v dlouhodobém časovém horizontu nemůže překračovat nejvyšší teplotu na povrchu a nemůže klesnout pod jeho nejnižší teplotu (poněvadž neuvažujeme žádné vnitřní zdroje tepla nebo chlazení). Proto budeme hledat řešení, které splňuje podmínku ohraničenosti

$$|u(t, x)| \leq M \text{ pro } t \in \mathbb{R},\ x \geq 0. \tag{2.95}$$

Hledáme tedy funkci $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která splňuje rovnici (2.93) a podmínky (2.94), (2.95).

Poněvadž funkce μ je spojitá a periodická, můřeme ji vyjádřit ve tvaru absolutně a stejnoměrně konvergentní Fourierovy řady[4]

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\big);$$

přitom

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mu(s) \cos k\omega s \mathrm{d}s,\ k = 0, 1, 2, \dots, \qquad b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mu(s) \sin k\omega s \mathrm{d}s,\ k = 1, 2, \dots. \tag{2.96}$$

Je zřejmé, že pokud funkce v_i splňují rovnici (2.93) s okrajovými podmínkami $v_i(t, 0) = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, pak také jejich součet $v = v_1 + v_2$ splňuje rovnici (2.93) a navíc okrajovou podmínku $v(t, 0) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$. Proto budeme řešení naší úlohy (2.93), (2.94), (2.95) hledat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t, x),$$

kde všechny funkce v_k, w_k splňují rovnici (2.93), jsou ohraničené a splňují okrajové podmínky

$$v_k(t, 0) = a_k \cos k\omega t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.97}$$

$$w_k(t, 0) = b_k \sin k\omega t, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{2.98}$$

Nejprve však najdeme ohraničené řešení pomocné úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & t \in \mathbb{R},\ x > 0, \\ v(t, 0) &= a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}, & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.99}$$

s komplexní okrajovou podmínkou. Snadno ověřme, že reálná část řešení této úlohy je také řešením úlohy (2.93), (2.97). Řešení úlohy (2.99) budeme hledat v exponenciálním tvaru

$$v(t, x) = a_k \mathrm{e}^{\alpha t + \beta x}.$$

Pak je $v(t, 0) = a_k \mathrm{e}^{\alpha t}$ a porovnáním s okrajovou podmínkou v úloze (2.99) vidíme, že $\alpha = \mathrm{i}k\omega$. Dále

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \alpha a_k \mathrm{e}^{\alpha t + \beta x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = \beta^2 a_k \mathrm{e}^{\alpha t + \beta x},$$

[4] Pokud uvažujeme roční kolísání teploty, je $\omega = 2\pi/\text{rok}$.

takže po dosazení do rovnice v úloze (2.99) a snadné úpravě dostaneme

$$\alpha = a^2\beta^2.$$

Odtud $a^2\beta^2 = \mathrm{i}k\omega$. Z této kvadratické rovnice s komplexními koeficienty vypočítáme

$$\beta = \pm(1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,.$$

Dostáváme tak řešení pomocné úlohy (2.99) ve tvaru

$$v(t,x) = a_k \exp\left(\mathrm{i}k\omega t \pm (1+i)\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right) = a_k \exp\left(\pm\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right) \exp\left[\mathrm{i}\left(k\omega t \pm \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right)\right].$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že řešení se znaménkem „+“ je neohraničené; vyhovuje tedy tedy pouze funkce se znaménkem „−“. Proto omezené řešení úlohy (2.93), (2.97) je reálnou částí posledního výrazu, v němž místo symbolu „±“ píšeme znaménko „−“, tj.

$$v_k(t,x) = a_k \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right) \cos\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right).$$

Analogicky najdeme ohraničené řešení úlohy (2.93), (2.98) ve tvaru

$$w_k(t,x) = b_k \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right) \sin\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right).$$

Celkem tak dostáváme řešení úlohy (2.93), (2.94), (2.95) ve tvaru nekonečné řady

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right)\left[a_k \cos\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right) + b_k \sin\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right)\right],$$

kde koeficienty a_k, b_k jsou dány integrály (2.96). Výraz v hranatých závorkách můžeme upravit[5] a výsledek zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) \cos k\omega\big(t - \delta_k(x)\big),$$

kde

$$A_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\omega}{2a^2}}\,x\right)}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}, & a_k^2+b_k^2 \neq 0, \\[2ex] 0, & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \delta_k(x) = \sqrt{\frac{1}{2ka^2\omega}}\,x + \begin{cases} \dfrac{1}{k\omega}\operatorname{arctg}\dfrac{b_k}{a_k}, & a_k \neq 0, \\[2ex] \dfrac{\pi}{2k\omega}, & a_k = 0. \end{cases}$$

Teplotní vlny

Úloha o vedení tepla v půdě je jedním z prvních příkladů užití matematické teorie tepla. Za zjednodušujících předpokladů ji řešil již Joseph Fourier[6]. Předpokládal, že teplota na povrchu v průběhu roku (čas vyjadřoval ve dnech) je rovna součtu průměrné roční teploty a teploty specifické pro den,

---

[5] Při výpočtu používáme vzorce $\cos(\varphi - \operatorname{arctg}\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cos\varphi + \dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\sin\varphi$.

[6] J. Fourier: *Théorie analytique de la chaleur.* Firmin Didot Père et Fils, Paris 1822.

která je úměrná výšce Slunce nad obzorem za poledne. Pokud se tedy čas t počítá od okamžiku letního slunovratu, je povrchová teplota vyjádřena funkcí

$$\mu(t) = T + \gamma \cos \omega t,$$

kde T je průměrná roční teplota, γ je příslušná konstanta úměrnosti a frekvence ω má hodnotu

$$\omega = \frac{2\pi}{365{,}26}\mathrm{den}^{-1}.$$

Při této volbě tedy je $a_0 = 2T$, $a_1 = \gamma$, $a_2 = a_3 = \cdots = 0 = b_1 = b_2 = \cdots$ a řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && t \in \mathbb{R},\ x > 0, \\ u(t,0) &= T + \gamma \cos \omega t,\ |u(t,\cdot)| \le |T| + |\gamma| && t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

je dáno výrazem

$$u(t,x) = T + \gamma \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x\right) = T + \gamma \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos \omega \left(t - \sqrt{\frac{1}{2a^2\omega}}\,x\right).$$

Označme

$$A(x) = \gamma \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}, \qquad \delta(x) = \sqrt{\frac{1}{2a^2\omega}}\,x.$$

Řešení nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = T + A(x) \cos \omega\big(t - \delta(x)\big)$$

a interpretovat ho jako šíření teplotních vln v půdě. Přitom $A(x)$ vyjadřuje amplitudu kolísání teploty v hloubce x, $\delta(x)$ vyjadřuje opožďování $\delta(x)$ maxim (minim) teplot v hloubce x od příslušných okamžiků na povrchu. Výsledek lze také přepsat pomocí periody $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ kolísání povrchové teploty jako

$$u(t,x) = T + A(x) \cos \frac{2\pi}{\tau}\big(t - \delta(x)\big);$$

při tomto zápisu je

$$A(x) = \gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}x}, \qquad \delta(x) = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\,x.$$

Mění-li se po dlouhou dobu periodicky teplota na povrchu, nastává v půdě kolísání teploty s toutéž periodou. Přitom platí:

1. Amplituda $A(x)$ kolísání teploty v hloubce x klesá exponenciálně s hloubkou; rostou-li hloubky s aritmetickou posloupností, klesají amplitudy s geometrickou posloupností (první Fourierův zákon).
   V hluboké studni nebo v jeskyni je dlouhodobě téměř konstantní teplota přibližně se rovnající průměrné roční teplotě na povrchu.

2. Teplota v půdě kolísá s jistým fázovým zpožděním za kolísáním teploty na povrchu; opožďování $\delta(x)$ teplotních extrémů v hloubce x je úměrné této hloubce (druhý Fourierův zákon). V hloubce x se teplotní extrém projeví za čas $\delta(x)$ od jeho výskytu na povrchu, což lze chápat i tak, že teplo se v půdě šíří konstantní rychlostí

   $$\frac{x}{\delta(x)} = \sqrt{2a^2\omega} = 2\sqrt{a^2\frac{\pi}{\tau}}.$$

   Poznamenejme, že tato rychlost má formálně stejné vyjádření, jako rychlost difundující látky vznikající autokatylytickou reakcí (viz str. 65nn), přičemž reakční rychlost odpovídá poloviční frekvenci kolísání teploty.

3. Hloubka pronikání teploty do půdy závisí na periodě kolísání teploty na povrchu. Relativní změna amplitudy v hloubce x je rovna

$$\frac{A(x)}{\gamma} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\,x};$$

při kolísání povrchové teploty o periodách τ_1 a τ_2 budou hloubky x_1 a x_2, ve kterých dochází ke stejným relativním změnám teploty, v poměru

$$\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\,.$$

(třetí Fourierův zákon).

Kapitola 3

Rovnice reakce-difúze

3.1 Lineární rovnice

Uvažujme lineární parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru$$

s kladnými parametry D, r.

Pro zjednodušení zápisu změníme měřítko nezávisle proměnných, tj. zavedeme bezrozměrný čas τ a bezrozměrnou prostorovou proměnnou ξ vztahy

$$\xi = \sqrt{\frac{r}{D}}x, \qquad \tau = rt.$$

Pak je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \tau} = r\frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \sqrt{\frac{r}{D}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\frac{r}{D}}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{r}{D}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

po dosazení do rovnice a vykrácení parametru r dostaneme lineární parabolickou rovnici bez parametrů ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + u.$$

Bez újmy na obecnosti se tedy můžeme zabývat rovnicí bez parametrů

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \tag{3.1}$$

v níž opět čas označujeme t a prostorovou proměnnou x. Tato rovnice je lineární a splňuje princip superpozice (o tom se lze přesvědčit přímým výpočtem) – množina jejích řešení tvoří vektorový prostor. Zejména nulová funkce $u_0 \equiv 0$ je řešením rovnice (3.1). Toto řešení je současně *stacionární* (nezávisí na čase t) a *prostorově homogenní* (nezávisí na prostorové proměnné x).

Pokud k rovnici (3.1) přidáme nějaké homogenní okrajové podmínky, bude množina řešení příslušné okrajové úlohy také tvořit vektorový prostor; ten je průnikem prostoru řešení rovnice (3.1) a prostoru funkcí, které splňují okrajové podmínky.

3.1.1 Rovnice na úsečce

Budeme vyšetřovat některé kvalitativní vlastnosti řešení rovnice (3.1) uvažované pro $t > 0$ a $x \in (0, \ell)$, kde ℓ je nějaké kladné číslo. Přitom budeme požadovat splnění homogenních okrajových podmínek. Abstraktněji řečeno, budeme se zabývat některými vlastnostmi zaměření afinního prostoru řešení okrajových a počátečních úloh pro rovnici (3.1).

Rovnice s Neumannovými okrajovými podmínkami

Uvažujme rovnici (3.1) na intervalu $(0,\ell)$ prostorové proměnné s homogenními Neumannovými okrajovými podmínkami

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0=\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell), \quad t>0. \tag{3.2}$$

Podle 2.3.1 a 2.3.7 je řešení úlohy (3.1), (3.2) dáno řadou

$$u(t,x)=a_0\mathrm{e}^t+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp\left[\left(1-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2\right)t\right]\cos\frac{k\pi}{\ell}x,$$

kde konstanty $a_0,a_1,a_2,\ldots$ závisí na počáteční funkci $u(0,\cdot)$; také lze říci, že volba konstant $a_0,a_1,a_2,\ldots$ určuje počáteční funkci.

Zejména tedy vidíme, že úloha (3.1), (3.2) má prostorově homogenní řešení tvaru

$$u_h(t,x)=a_0\mathrm{e}^t.$$

Pro tato řešení platí $u_h(0,\cdot)\equiv a_0$, a pokud $a_0\neq 0$, pak

$$\lim_{t\to\infty}|u_h(t,x)|=\infty, \quad \text{pro všechna } x\in(0,\ell).$$

Úloha (3.1), (3.2) má vždy řešení, které roste nade všechny meze pro $t\to\infty$, i když je jeho počáteční hodnota jakkoliv malá (ale nenulová).

Rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami

Rovnice (3.1) na intervalu $(0,\ell)$ prostorové proměnné s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$u(t,0)=0=u(t,\ell), \quad t>0, \tag{3.3}$$

má podle 2.3.1 a 2.3.7 řešení ve tvaru řady

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp\left[\left(1-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2\right)t\right]\sin\frac{k\pi}{\ell}x, \tag{3.4}$$

kde konstanty a_k jsou určeny počáteční funkcí $u(0,\cdot)$, nebo ji určují. Budeme o ní předpokládat, že je ohraničená a integrabilní.

Ve výrazu na pravé straně rovnosti (3.4) se objevuje poměr π/ℓ. Proto rozlišíme tři možnosti velikosti délky ℓ.

- **$\ell<\pi$:** V tomto případě pro každé $k=1,2,3,\ldots$ platí

  $$1-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2<1-k^2\leq 0.$$

  Odtud dále plyne, že všechny exponenciální funkce ve vyjádření (3.4) pro $t\to\infty$ klesají k nule, takže

  $$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=0 \quad \text{pro všechna } x\in(0,\ell).$$

- **$\ell=\pi$:** Řešení (3.4) můžeme přepsat do tvaru

  $$u(t,x)=a_1\sin x+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\exp\left[\left(1-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2\right)t\right]\sin\frac{k\pi}{\ell}x.$$

  Opět všechny exponenciální funkce monotonně konvergují k 0 pro $t\to\infty$, takže

  $$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=a_1\sin x \quad \text{pro všechna } x\in(0,\ell).$$

Ještě si můžeme všimnout (a přesvědčit se o tom přímým výpočtem), že pro libovolnou hodnotu a_1 je funkce u_n daná vztahem

$$u_n(t, x) = a_1 \sin x$$

řešením úlohy (3.1), (3.3). Toto řešení je stacionární (nezávisí na čase t) a prostorově nehomogenní (závisí na prostorové proměnné x).

- $\ell > \pi$**:** Úloha (3.1), (3.3) má (mimo jiné) řešení dané formulí

$$u(t, x) = a_1 \exp\left[\left(1 - \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\right) t\right] \sin \frac{\pi}{\ell} x.$$

Přitom

$$1 - \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 > 1,$$

takže pro libovolnou hodnotu $a_1 \neq 0$ (ať je absolutní hodnota a_1 sebemenší) platí

$$\lim_{t\to\infty} |u(t, x)| = \infty \quad \text{pro všechna } x \in (0, \ell).$$

Rovnice s Robinovými okrajovými podmínkami

Rovnice (3.1) s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \alpha u(t, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = -\alpha u(t, \ell), \qquad t > 0, \tag{3.5}$$

kde $\alpha > 0$ má podle 2.3.1 a 2.3.7 řešení ve tvaru řady

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{(1-\lambda_k)t} \left(\cos \sqrt{\lambda_k}\, x + \frac{\alpha}{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k}\, x\right), \tag{3.6}$$

kde vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ jsou kladné kořeny rovnice

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = 2 \operatorname{cotg} \sqrt{\lambda}\, \ell \tag{3.7}$$

uspořádané podle velikosti, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$. Konstanty a_k jsou opět určeny počáteční funkcí $u(0, \cdot)$, nebo ji určují.

Z vyjádření (3.6) vidíme, že hodnota λ_1 určuje chování řešení úlohy (3.1), (3.5). Pokud $\lambda_1 > 1$ (a tedy všechna $\lambda_k > 1$), pak

$$\lim_{t\to\infty} u(t, x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in (0, \ell).$$

Pokud $\lambda_1 < 1$, pak má úloha (3.1), (3.5) řešení

$$u(t, x) = \mathrm{e}^{(1-\lambda_1)t} \left(\cos \sqrt{\lambda_1}\, x + \frac{\alpha}{\lambda_1} \sin \sqrt{\lambda_1}\, x\right),$$

pro něž platí $\lim\limits_{t\to\infty} u(t, 0) = \infty$. Úloha tedy má neokraničené řešení.

Pokud $\lambda_1 = 1$, pak má úloha (3.1), (3.5) neomezeně mnoho stacionárních prostorově nehomogenních řešení tvaru

$$u_n(t, x) = a_1(\cos x + \alpha \sin x),$$

kde a_1 jsou nenulové konstanty.

Na rovnici (3.7) se můžeme dívat jako na implicitní zápis funkce λ jedné reálné proměnné ℓ, $\lambda = \lambda(\ell)$. Najdeme její derivaci λ'. Platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right) = \lambda' \frac{\lambda + \alpha^2}{2\alpha\sqrt{\lambda}^3} \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell} 2 \operatorname{cotg} \sqrt{\lambda}\,\ell = -\lambda' \frac{\ell}{\sqrt{\lambda}\left(\sin\sqrt{\lambda}\ell\right)^2} - \frac{2\sqrt{\lambda}}{\left(\sin\sqrt{\lambda}\ell\right)^2}.$$

Porovnáním výrazů na pravých stranách těchto rovností vypočítáme

$$\lambda' = -\frac{4\alpha\lambda^2}{2\alpha\lambda\ell + (\lambda + \alpha^2)\left(\sin\sqrt{\lambda}\ell\right)^2},$$

a to znamená, že $\lambda' < 0$, takže funkce λ je klesající. Je-li tedy $\lambda = 1$ pro nějakou hodnotu nezávisle proměnné ℓ, pak nalevo od této hodnoty je $\lambda > 1$ a napravo od ní je $\lambda < 1$.

Pro analýzu chování řešení úlohy (3.1), (3.5) při $t \to \infty$ v závislosti na délce ℓ definičního intervalu tedy stačí najít kritickou hodnotu ℓ_{krit} takovou, že $\lambda(\ell_{\mathrm{krit}}) = 1$; pak pro $\ell < \ell_{\mathrm{krit}}$ všechna řešení úlohy při $t \to \infty$ vymizí, pro $\ell > \ell_{\mathrm{krit}}$ bude existovat neohraničené řešení.

Dosazením ℓ_{krit} za ℓ v rovnici (3.7) dostaneme rovnici

$$\frac{1-\alpha^2}{2\alpha} = \operatorname{cotg} \ell_{\mathrm{krit}},$$

která má řešení $\ell_{\mathrm{krit}} = 2 \operatorname{arctg} \alpha$, jak se snadno přesvědčíme přímým dosazením.

Shrnutí

Ještě si povšimněme, že Neumannovy podmínky (3.2) jsou speciálním případem Robinových podmínek (3.5) pro $\alpha = 0$. Robinovy podmínky s $\alpha > 0$ můžeme přepsat na tvar

$$u(t,0) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}(t,0), \quad u(t,\ell) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell), \qquad t > 0; \tag{3.8}$$

z něho vidíme, že Dirichletovy podmínky (3.3) jsou limitním případem Robinových podmínek pro $\alpha \to \infty$.

Výsledky provedené diskuse řešení úlohy (3.1), (3.5)/(3.8) s $\ell > 0$ můžeme zapsat:

Nechť $0 \le \alpha \le \infty$.

- Je-li $\ell < 2 \operatorname{arctg} \alpha$, pak pro každé řešení u úlohy platí

  $$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in [0,\ell],$$

  tj. nulové řešení rovnice (3.1) je *atrahující.*

- Je-li $\ell = 2 \operatorname{arctg} \alpha$, pak existují prostorově nehomogenní stacionární řešení úlohy; tato řešení jsou tvaru

  $$u_n(t,x) = a_1(\cos x + \alpha \sin x) = a_1\sqrt{1+\alpha^2}\,\cos(x - \operatorname{arctg}\alpha),$$

  kde $a_1 \neq 0$.

- Je-li $\ell > 2 \operatorname{arctg} \alpha$, pak existuje neohraničené řešení úlohy; podrobněji, existuje řešení u takové, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ je

  $$\max\{|u(t,x)| : x \in [0,\ell]\} < \varepsilon \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty} \max\{|u(t,x)| : x \in [0,\ell]\} = \infty.$$

3.1.2 Rovnice na přímce – putující vlny

Přímým výpočtem se můžeme snadno přesvědčit, že rovnice (3.1) má řešení v exponenciálním tvaru

$$u(t,x) = A\mathrm{e}^{-\mu x+(1+\mu^2)t}, \tag{3.9}$$

která jsou definována pro všechna $t, x \in \mathbb{R}$; parametry A a μ jsou libovolná reálná čísla. Je-li $\mu = 0$, dostaneme prostorově homogenní řešení (nezávisející na prostorové proměnné x) ve tvaru exponenciální funkce.

Nechť $\mu \neq 0$ a označme

$$c = \frac{1+\mu^2}{\mu}, \qquad U(\zeta) = A\mathrm{e}^{-\mu\zeta}.$$

Pak řešení (3.9) můžeme přepsat jako

$$u(t,x) = U(x-ct) \tag{3.10}$$

a interpretovat tak, že graf počáteční funkce $u(0,\cdot\,) = U$ se pohybuje konstantní rychlostí c; je-li $\mu > 0$, pohybuje se doprava (v kladném směru osy x), je-li $\mu < 0$, tak doleva. Proto se řešení rovnice (3.1), které lze zapsat ve tvaru (3.10) někdy nazývá *putující vlna* (travelling wave).

Rychlost c postupu putující vlny závisí na parametru μ. Vyšetřením průběhu funkce

$$c = c(\mu) = \frac{1+\mu^2}{\mu}$$

zjistíme, že pro $\mu > 0$ je $c \geq 2$, pro $\mu < 0$ je $c \leq -2$. Minimální rychlost putující vlny tvaru (3.9) (bez ohledu na směr postupu) je $c = c_{\min} = 2$.

K rychlosti putující vlny se lze dopracovat i jiným, obecnějším, způsobem. Hledejme, pro jaké hodnoty c má rovnice (3.1) řešení tvaru (3.10), kde U je monotonní funkce jedné proměnné.

Řešení musí splňovat rovnici (3.1). Jinak řečeno, poněvadž

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -cU'(x-ct), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = U''(x-ct),$$

musí funkce U splňovat obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$-cU' = U'' + U,$$

po úpravě

$$U'' + cU' + U = 0.$$

Aby tato rovnice měla monotonní řešení, musí být kořeny její charakteristické rovnice $\lambda^2+c\lambda+1 = 0$ reálné, tj.

$$c^2 - 4 \geq 0.$$

Minimální rychlost putující vlny (bez ohledu na orientaci) je opět $c_{\min} = 2$.

Rovnice s podmínkami integrability

Řešení rovnice (3.1) definované pro $x \in \mathbb{R}$ ve tvaru (3.9) nesplňuje podmínky integrovatelnosti

$$\int_{-\infty}^{0} |u(t,x)|\mathrm{d}x < \infty, \quad \int_{0}^{\infty} |u(t,x)|\mathrm{d}x < \infty, \qquad \text{pro } t > 0. \tag{3.11}$$

Můžeme ho však modifikovat. Připustíme pouze nezáporné hodnoty parametru μ, položíme

$$u(t,x) = A\mathrm{e}^{-\mu|x|+(1+\mu^2)t} = A\mathrm{e}^{(1+\mu^2)t}\mathrm{e}^{-\mu|x|} \tag{3.12}$$

a lehce ověříme, že se skutečně jedná o řešení úlohy (3.1), (3.11). Můžeme ho interpretovat jako dvě putující vlny symetrické kolem počátku, které se od něho vzdalují rychlostí

$$c = \frac{1+\mu^2}{\mu} \geq 2.$$

Ještě připomeňme, že v 2.3.4 jsme také našli jedno explicitní řešení úlohy (3.1), (3.11); konkrétně se jedná o řešení (2.65) s $a = r = 1$, tj. řešení tvaru

$$u(t,x) = A\mathrm{e}^t \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{3.13}$$

Ukázali jsme tam také, že pro dostatečně velký čas t se hodnota x prostorové proměnné, pro niž platí $|u(t,x)| = \delta > 0$, pohybuje konstantní rychlostí 2, tj. tou nejmenší možnou (sr. formuli (2.66) s $a = r = 1$).

Obě formule (3.12) a (3.13) jsou vlastně stejného typu – nějaká exponenciální funkce času násobená hustotou nějakého rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0; ve formuli (3.13) se jedná o normální rozdělení s časově proměnným rozptylem $\frac{1}{2}t^2$, ve formuli (3.12) se jedná o Laplaceovo (dvojitě exponenciální) rozdělení s konstantním rozptylem $1/\mu^2$.

3.2 Fisherova-Kolmogorovova rovnice

Jedná se o rovnici reakce-difúze s nelineárním reakčním členem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u). \tag{3.14}$$

Tato rovnice modeluje šíření výhodné allely v populaci[1], nebo šíření populace v prostoru, přičemž velikost populace roste logisticky.

Nebudeme hledat řešení rovnice (3.14) splňující obecné počáteční nebo okrajové podmínky. Omezíme se na některá speciální řešení a jejich některé vlastnosti, které jsou užitečné pro aplikace.

3.2.1 Rovnice na úsečce

Budeme hledat nezáporné *stacionární,* tj. na čase nezávislé, řešení rovnice (3.14) definované na konečném intervalu $(0,\ell)$, které splňuje Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(t,0) = 0 = u(t,\ell), \qquad t \geq 0. \tag{3.15}$$

Jinak řečeno, hledáme takové řešení $u : [0,\infty)\times[0,\ell] \to [0,\infty)$ úlohy (3.14), (3.15), že pro libovolné časové okamžiky $t_1, t_2 \geq 0$ a libovolný bod $x \in [0,\ell]$ platí $u(t_1,x) = u(t_2,x)$ (nebo ekvivalentně, pro všechna $t \geq 0$, $x \in [0,\ell]$ platí $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = 0$). Pak lze zřejmě psát

$$u(t,x) = U(x)$$

pro $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \ell$, kde U je dvakrát diferencovatelná funkce definovaná na intervalu $[0,\ell]$, která splňuje obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

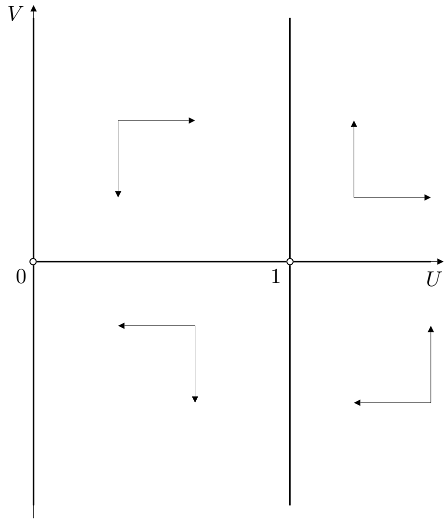
$$U'' + U(1-U) = 0, \quad 0 < x < \ell, \tag{3.16}$$

a okrajovou podmínku

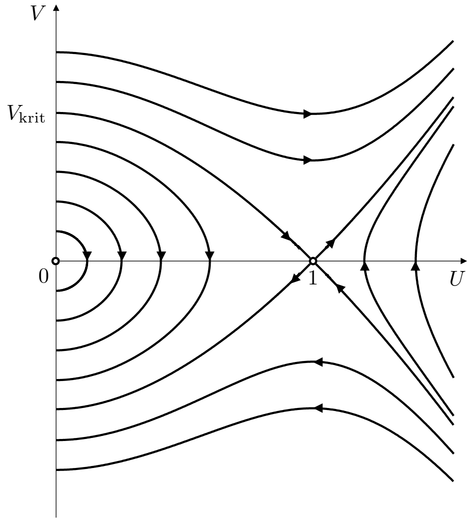
$$U(0) = 0 = U(\ell). \tag{3.17}$$

Okrajová úloha (3.16), (3.17) pro obyčejnou diferenciální rovnici má zřejmě *prostorově homogenní,* tj. konstantní, řešení $U \equiv 0$. Druhé konstantní řešení $U \equiv 1$ rovnice (3.16) nesplňuje okrajovou

[1] „Výhodnou allelou“ se rozumí allela, která při daném selekčním tlaku zajišťuje nejvyšší zdatnost (fitness).



(a)



(b)

Obrázek 3.1: Stavový prostor (a) a trajektorie (b) systému (3.18)

podmínku (3.17). Budeme hledat *prostorově nehomogenní* řešení řešení rovnice (3.16), tj. takové, které má nenulovou derivaci podle prostorové proměnné x.

Rovnici druhého řádu (3.16) převedeme standardním způsobem na systém rovnic prvního řádu. Položíme $V = U'$ a dostaneme autonomní dvourozměrný systém

$$\begin{aligned} U' &= V \\ V' &= U(U-1). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Provedeme kvalitativní analýzu tohoto systému. Funkce U má být nezáporná, $U \geq 0$. Tato funkce má splňovat okrajové podmínky (3.17) a nemá být identicky nulová; to znamená, že v nějakém bodě musí být kladná, někde nalevo od takového bodu pak bude rostoucí (a tedy její derivace tam bude V kladná), někde napravo klesající. Za stavový prostor systému (3.18) lze tedy vzít množinu $\Omega = [0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Systém (3.18) má jedinou U-nulklinu $V = 0$, nad osou U jsou trajektorie orientovány doprava (v kladném směru osy U), pod ní doleva. Dále má systém dvě V-nulkliny $U = 0$ (tvořící hranici stavového prostoru Ω) a $U = 1$, pro $0 < U < 1$ jsou trajektorie orientovány dolů (v záporném směru osy V), pro $U > 1$ jsou orientovány nahoru. Stavový prostor je znázorněn na obr. 3.1(a). Vidíme, že systém (3.18) má dva rovnovážné body $(0,0)$ a $(1,0)$. Jeho variační matice je

$$\mathsf{J}(U,V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U-1 & 0 \end{pmatrix},$$

takže platí

$$\det \mathsf{J}(1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0, \qquad \operatorname{tr} \mathsf{J}(0,0) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

To znamená, že rovnovážný bod $(1,0)$ je sedlo (což je vidět i z obrázku), rovnovážný bod $(0,0)$ ležící na hranici stavového prostoru Ω není hyperbolický.

Vydělením rovnic systému (3.18) dostaneme obyčejnou rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} = \frac{U(U-1)}{V},$$

která má obecné řešení

$$3(V^2 + U^2) - 2U^3 = const. \tag{3.19}$$

Touto rovností jsou implicitně zadány trajektorie systému (3.18), výraz na její levé straně je jeho invariantem; označíme ho $\Phi(U,V)$. Zřejmě platí $\Phi(U,V)=\Phi(U,-V)$ pro všechna $(U,V)\in\Omega$. To znamená, že trajektorie systému (3.18) jsou symetrické podle osy U.

Provedená analýza již umožňuje načrtnout trajektorie systému (3.18), viz obr. 3.1(b). Trajektorie, které současně vyjadřují řešení úlohy (3.16), (3.17), začínají na hranici stavového prostoru Ω v kladné části osy V (řešení úlohy „startuje" pro hodnotu nezávisle proměnné $x=0$ ve funkční hodnotě $U=0$ a má kladnou derivaci) a mělo by skončit (pro hodnotu nezávisle proměnné $x=\ell$) na hranici Ω v záporné části osy V (tam je $U(\ell)=0$, $V'(\ell)<0$). Vidíme ovšem, že pro jakousi kritickou hodnotu $V=V_{\text{krit}}>0$ trajektorie skončí v sedle $(1,0)$. Odpovídající řešení rovnice (3.16) je tedy kladné pro každé $x>0$ a nemůže proto splnit druhou okrajovou podmínku (3.17) pro konečnou hodnotu ℓ; také můžeme říci, že řešení rovnice (3.16) s počáteční podmínkou $U(0)=0$, $U'(0)=V_{\text{krit}}$ je pro $x>0$ kladné a platí pro ně $\lim\limits_{x\to\infty}U(x)=1$.

Trajektorie systému (3.18), které začínají v bodě $(0,V_0)$ takovém, že $0<V_0<V_{\text{krit}}$, skončí pro jistou konečnou hodnotu $x_0>0$ na hranici stavového prostoru Ω v bodě $(0,-V_0)$. Těmto trajektoriím odpovídají řešení okrajové úlohy (3.16), (3.17) s $\ell=x_0$. Pro taková řešení vždy platí $U(x)<1$ pro všechna $x\in(0,\ell)$; přitom maximální hodnota řešení U roste s rostoucí počáteční hodnotou $V(0)=U'(0)$. Poněvadž hodnoty funkce U jsou menší než 1, plyne z rovnice (3.16), že

$$U''(x)=U(x)\big(U(x)-1\big)<0$$

pro $x\in(0,\ell)$, takže funkce U je ryze konkávní.

Nekonstantním řešením okrajové úlohy (3.16), (3.17) odpovídají právě takové trajektorie systému (3.18), které začínají uvnitř úsečky $\{(0,V):\,0<V<V_{\text{krit}}\}$. Trajektorie systému (3.18), které zanikají v sedle $(1,0)$ nebo z něho vycházejí, jsou implicitně dány rovnicí (3.19) s $\mathit{const}=1$. Odtud vypočítáme, že $V_{\text{krit}}=\sqrt{\frac{1}{3}}\doteq 0{,}57735$. Dále můžeme upřesnit, že stavový prostor systému (3.18), v němž jsou trajektorie odpovídající řešením úlohy (3.16), (3.17) je množina

$$\left\{(U,V)\in\mathbb{R}^2:\,0\le U\le 1, |V|<\sqrt{\tfrac{1}{3}\left(1+2U^3-3U^2\right)}\right\}.$$

Ještě vyšetříme trajektorie systému (3.18) v okolí počátku. Je-li hodnota U „malá", $U\ll 1$, pak je hodnota U^2 „zanedbatelná" vzhledem k U, $U^2\ll U$. Řešení systému (3.18) v okolí počátku se tedy (podle věty o spojité závisslosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic na počátečních podmínkách a parametrech) „chová podobně" jako řešení lineárního systému

$$\begin{aligned} U'&=V\\ V'&=-U. \end{aligned}\tag{3.20}$$

Řešení tohoto systému s počátečními podmínkami $U(0)=0$, $V(0)=\varepsilon$, kde $\varepsilon>0$ je „malé" číslo, je dáno rovností

$$U(x)=\varepsilon\sin x.$$

Tato funkce je kladná pro $x\in(0,\pi)$ a pro $x_0=\ell=\pi$ je nulová. Z tohoto výsledku nahlédneme, že řešení rovnice (3.16), které „startuje" v bodě 0 se sebemenší kladnou derivací (tj. řešení s počáteční podmínkou $U(0)=0$, $U'(0)=\varepsilon$) „skončí" v 0 až ve vzdálenosti π. Jinak řečeno, okrajová úloha (3.14), (3.15) může mít prostorově nehomogenní nezáporné stacionární řešení pouze pro $\ell>\pi$.

Stabilita stacionárních řešení

Našli jsme dvě nezáporná stacionární řešení Dirichletovy okrajové úlohy (3.14), (3.15) pro Fisherovu-Kolmogorovovu rovnici. Jsou to triviální konstantní řešení $u_0\equiv 0$ a nekonstantní řešení

$$u_n=u_n(t,x)=U(x),$$

kde U je řešení okrajové úlohy (3.16), (3.17) pro obyčejnou diferenciální rovnici. Vyšetříme stabilitu těchto stacionárních řešení, tj. podíváme se, jak se v čase chová řešení úlohy (3.14), (3.15), které se na počátku „liší málo" od stacionárního.

Prostorově homogenní řešení: Nejprve uvažujme „malou" odchylku v od nulového řešení. Funkce v musí splňovat rovnici (3.14) a poněvadž v je „malá", zanedbáme v ní kvadratický člen v^2. Funkce v je tedy řešením počáteční úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v, && t > 0,\ 0 < x < \ell, \\ v(t,0) &= 0 = v(t,\ell), && t > 0. \end{aligned}$$

Jedná se tedy o Dirichletovu úlohu pro lineární rovnici reakce-difúze na úsečce, kterou jsme vyšetřovali v 3.1.1. Můžeme tedy říci, že nulové řešení úlohy (3.14), (3.15) je asymptoticky stabilní pro $\ell < \pi$ a nestabilní pro $l > \pi$.

Prostorově nehomogenní řešení: Pokud je $\ell > \pi$, pak má úloha (3.14), (3.15) nekonstantní stacionární řešení u_n. Uvažujme řešení této úlohy, které se „málo" liší od u_n, tedy řešení tvaru

$$U(x) + w(t,x), \tag{3.21}$$

kde odchylka w je nějaká „malá" funkce. Platí

$$\frac{\partial}{\partial t}(U+w) = \frac{\partial w}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U+w) = U'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = U(U-1) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

podle (3.16). Po dosazení funkce (3.21) do pravé strany rovnice (3.14) tak dostaneme

$$U(U-1) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (U+w)(1-U-w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1-2U)w - w^2.$$

Poněvadž odchylku považujeme za „malou", zanedbáme kvadratický člen w^2. Odchylku w tedy považujeme za řešení okrajové úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1-2U)w, && t > 0,\ 0 < x < \ell, \\ w(t,0) &= 0 = w(t,\ell), && t > 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Tuto úlohu budeme řešit Fourierovou metodou, tj. řešení budeme hledat ve tvaru

$$w(t,x) = T(t)X(x).$$

Po dosazení do rovnice dostaneme

$$T'X = TX'' + (1-2U)TX,$$

neboli

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + 1 - 2U.$$

Výraz na levé straně nezávisí na prostorové proměnné x, výraz na pravé straně nezávisí na čase t; oba výrazy jsou tedy rovny nějaké konstantě, řekněme $-\lambda$. Funkce T je tedy řešením obyčejné lineární rovnice prvního řádu

$$T' = -\lambda T, \tag{3.23}$$

a funkce X je řešením obyčejné lineární rovnice druhého řádu

$$-X'' - (1-2U)X = \lambda X. \tag{3.24}$$

Aby byly splněny okrajové podmínky pro funkci w v úloze (3.22), musí platit

$$X(0) = 0 = X(\ell). \tag{3.25}$$

Funkce X je tedy řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.24), (3.25). Podle Věty 2 v A.3.2 existují vlastní hodnoty $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ a k nim příslušné vlastní funkce $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Přitom funkce

X_1 na intervalu $(0, \ell)$ nemění znaménko. Ukážeme, že $\lambda_1 > 0$ (a v důsledku toho jsou všechny vlastní hodnoty kladné).

Funkce X_1 splňuje rovnici (3.24) s $\lambda = \lambda_1$, tedy pro ni platí

$$X_1''(x) + \big(\lambda_1 + 1 - 2U(x)\big)X_1(x) = 0.$$

Tuto rovnost vynásobíme výrazem $U(x)$ a upravíme na tvar

$$U(x)X_1''(x) - U''(x)X_1(x) = U(x)^2 X_1(x) - \lambda_1 U(x)X_1(x);$$

využili jsme toho, že funkce U splňuje rovnici (3.16). Pravou stranu zintegrujeme v mezích od 0 do ℓ a využijeme faktu, že funkce U, resp. X_1 splňuje okrajové podmínky (3.17), resp. (3.25). Dostaneme

$$\int_0^\ell \big(U(x)X_1''(x) - U''(x)X_1(x)\big)\mathrm{d}x =$$

$$= \big[U(x)X_1'(x)\big]_0^\ell - \int_0^\ell U'(x)X_1'(x)\mathrm{d}x - \big[U'(x)X_1(x)\big]_0^\ell + \int_0^\ell U'(x)X_1'(x)\mathrm{d}x = 0.$$

To znamená, že po integraci levé strany ve stejných mezích obdržíme rovnost

$$\int_0^\ell U(x)^2 X_1(x)\mathrm{d}x = \lambda_1 \int_0^\ell U(x)X_1(x)\mathrm{d}x.$$

Funkce U je uvnitř intervalu $(0, \ell)$ kladná, funkce X_1 je zde nenulová a nemění znaménko. To znamená, že oba integrály v poslední rovnosti jsou nenulové a mají stejné znaménko. Z toho dále plyne, že $\lambda_1 > 0$.

Sturmova-Liouvilleova úloha (3.24), (3.25) má tedy všechny vlastní hodnoty kladné. Jelikož řešení rovnice (3.23) s $\lambda = \lambda_k$ je dáno rovností

$$T_k(t) = b_k \mathrm{e}^{-\lambda_k t},$$

kde b_k je nějaká konstanta (závislá na počáteční hodnotě), dostáváme řešení okrajové úlohy (3.22) ve tvaru řady

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathrm{e}^{-\lambda_k} X_k(t).$$

Poněvadž jsou všechna λ_k kladná, jsou všechny exponenciální funkce $\mathrm{e}^{-\lambda_k t}$ klesající s limitou 0, a proto platí

$$\lim_{t\to\infty} w(t, x) = 0$$

pro všechna $x \in [0, \ell]$. To znamená, že „malá“ odchylka od stacionárního řešení u_n v průběhu času neroste a v limitě $t \to \infty$ vymizí. Řešení u_n je tedy asymptoticky stabilní.

Bifurkace v úloze (3.14), (3.15)

Na úlohu (3.14), (3.15) se můžeme dívat jako na úlohu s jedním kladným parametrem ℓ. Dosažené výsledky shrneme:

- Je-li $\ell < \pi$, pak má úloha (3.14), (3.15) jediné stacionární řešení $u_0 \equiv 0$, které je asymptoticky stabilní.

- Je-li $\ell > \pi$, pak má úloha (3.14), (3.15) dvě stacionární řešení. Prostorově homogenní řešení $u_0 \equiv 0$ je nestabilní. Prostorově nehomogenní řešení u_n je dáno výrazem

  $$u_n(t,x) = U(x),$$

  kde funkce U je řešením okrajové úlohy (3.16), (3.17). Je to nezáporná ryze konkávní funkce taková, že

  $$\max\{U(x) : 0 \le x \le \ell\} < 1.$$

  Stacionární řešení u_n je asymptoticky stabilní.

Rovnice s Robinovými nebo Neumannovými podmínkami

Nyní se podívejme na řešení rovnice (3.14) na intervalu $(0,\ell)$, které splňuje okrajové podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \alpha u(t,0), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell) = -\alpha u(t,\ell), \qquad t > 0, \tag{3.26}$$

kde α je nezáporné číslo. Pokud $\alpha > 0$, jedná se o Robinovy podmínky, pokud $\alpha = 0$, jedná se o Neumannovy podmínky.

Opět budeme hladet stacionární, prostorově homogenní nebo nehomogenní, řešení úlohy (3.14), (3.26). V podstatě můžeme opakovat provedenou analýzu úlohy (3.14), (3.15). Prostorově homogenní řešení je nulové. Prostorově nehomogenní řešení bude opět řešením obyčejné rovnice (3.16), tentokrát s okrajovou podmínkou

$$U'(0) = \alpha U(0), \quad U'(\ell) = -\alpha U(\ell). \tag{3.27}$$

Počáteční podmínky pro řešení systému (3.18) proto budou

$$V(0) = \alpha U(0), \quad V(\ell) = -\alpha U(\ell). \tag{3.28}$$

Trajektorie systému (3.18) odpovídající stacionárním řešením úlohy (3.14), (3.26) leží proto v jistém zúžení stavového prostoru pro systém (3.18), konkrétně v množině

$$\left\{(U,V) : 0 \le U \le 1, |V| \le \alpha U, |V| < \sqrt{\tfrac{1}{3}(1+2U^3-3U^2)}\right\},$$

viz obr. 3.2.

Trajektorie v okolí počátku jsou opět (přibližně) trajektoriemi lineárního systému (3.20), avšak v případě $\alpha > 0$ s počáteční podmínkou tvaru

$$U(0) = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad V(0) = \varepsilon. \tag{3.29}$$

První složka řešení úlohy (3.20), (3.29) je dána rovností

$$U(x) = \frac{\varepsilon}{\alpha}(\cos x + \alpha \sin x) = \frac{\varepsilon\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\cos(x - \operatorname{arctg}\alpha).$$

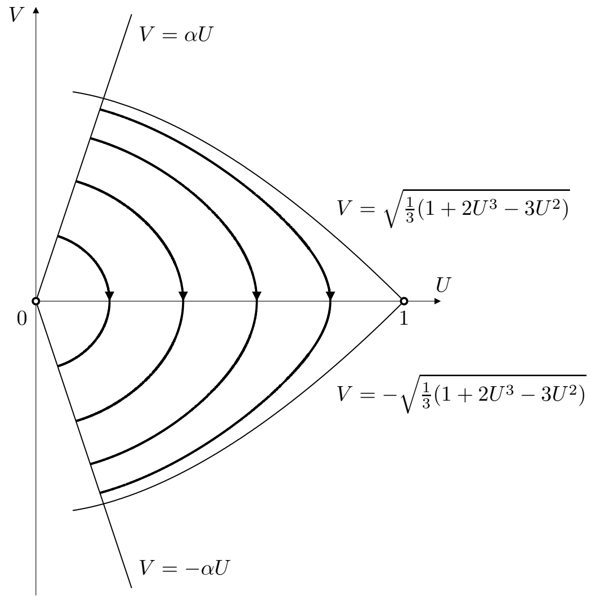
Odtud plyne, že hodnota $U(x_0)$ je stejná jako $U(0)$ pro $x_0 = 2\operatorname{arctg}\alpha$ (tj. trajektorie začínající v bodě $(\varepsilon/\alpha, \varepsilon)$ skončí v bodě $(\varepsilon/\alpha, -\varepsilon)$ pro $x_0 = 2\operatorname{arctg}\alpha$). Z toho je vidět, že minimální hodnota ℓ, pro niž má úloha (3.14), (3.26) prostorově nehomogenní stacionární řešení je větší než $2\operatorname{arctg}\alpha$; použijeme označení

$$\ell_{\mathrm{krit}}(\alpha) = 2\operatorname{arctg}\alpha.$$

Pro $\alpha = 1$ je $\ell_{\mathrm{krit}} = \frac{1}{2}\pi$.

Ještě si připomeňme, že Dirichletovy podmínky (3.15) jsou mezním případem Robinových podmínek (3.26) pro $\alpha \to \infty$. Platí

$$\lim_{\alpha\to\infty} \ell_{\mathrm{krit}}(\alpha) = 2\lim_{\alpha\to\infty} \operatorname{arctg}\alpha = \pi$$



Obrázek 3.2: Stavový prostor autonomního systému (3.18) a trajektorie odpovídající stacionárním řešením úlohy (3.14), (3.26)

v souladu s předchozím výsledkem pro Dirichletovu úlohu (3.14), (3.15).

V případě Neumannových podmínek (3.26) s $\alpha = 0$ zdegeneruje stavový prostor systému (3.18) na úsečku

$$\{(U, 0) :\ 0 \leq U \leq 1\},$$

tj. $V = U' \equiv 0$ a úloha (3.18), (3.28) má tedy pouze řešení, která mají první složku konstantní. Jinak řečeno, úloha (3.14), (3.26) s Neumannovými okrajovými podmínkami, $\alpha = 0$, má jedině konstantní, tj. prostorově homogenní, stacionární řešení. Podle rovnice (3.16) jsou tato řešení $U_0 \equiv 0$ a $u_n \equiv 1$. Tato stacionární řešení existují pro libovolnou nezápornou hodnotu ℓ; to je v souladu s vlastností

$$\lim_{\alpha \to 0} \ell_{\mathrm{krit}}(\alpha) = 2 \lim_{\alpha \to 0} \operatorname{arctg} \alpha = 0.$$

Vyšetřit stabilitu nalezených stacionárních řešení úlohy (3.14), (3.26) lze analogickým způsobem jako v případě úlohy (3.14), (3.15) s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Získané výsledky diskuse stacionárních řešení úlohy (3.14), (3.26) shrneme:

- Je-li $\alpha = 0$, pak jediná stacionární řešení úlohy (3.14), (3.26) jsou řešení prostorově homogenní $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv 1$. Přitom u_0 je nestabilní a u_1 je asymptoticky stabilní.

- Je-li $\alpha > 0$, pak má úloha (3.14), (3.26) jediné prostorově homogenní stacionární řešení $u_0 \equiv 0$. Toto řešení je pro $\ell < 2 \operatorname{arctg} \alpha$ asymptoticky stabilní, pro $\ell > 2 \operatorname{arctg} \alpha$ je nestabilní.

- Je-li $\alpha > 0$ a $\ell > 2 \operatorname{arctg} \alpha$, pak má úloha (3.14), (3.26) prostorově nehomogenní stacionární řešení

  $$u_n(t, x) = U(x),$$

  kde U je řešením okrajové úlohy (3.16), (3.27); je to nezáporná konkávní funkce taková, že

  $$\max\{U(x) :\ 0 \leq x \leq \ell\} < 1.$$

  Toto řešení je asymptoticky stabilní.

3.2.2 Rovnice na přímce – putující vlna

Budeme hledat nezáporné řešení rovnice (3.14) definované pro každé $t > 0$ na neomezeném intervalu $(-\infty, \infty)$, které má tvar putující vlny

$$u(t,x) = U(x - ct), \tag{3.30}$$

kde c je nějaká kladná konstanta, vyjadřující rychlost této vlny. Funkce U jedné proměnné vyjadřuje tvar putující vlny. Budeme po ní požadovat

$$U(\xi) \geq 0, \quad \lim_{\xi \to -\infty} U(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \to \infty} U(\xi) = 0. \tag{3.31}$$

Takové řešení modeluje invazi populace do neobsazeného prostředí o jednotkové kapacitě (úživnosti), nebo šíření výhodné allely v prostorově rozložené populaci.

Řešení tvaru (3.30) musí splňovat rovnici (3.14), tedy

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} U(x-ct) = -cU'(x-ct), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x-ct) = U''(x-ct),$$

a po dosazení do rovnice (3.14)

$$-cU'(x-ct) = U''(x-ct) + U(x-ct)\big(1 - U(x-ct)\big).$$

To znamená, že funkce U je řešením autonomní rovnice druhého řádu

$$U'' = -cU' + U(U-1).$$

Tuto rovnici přepíšeme standardním způsobem jako dvojrozměrný systém prvního řádu, tj. zavedeme novou novou funkci V vztahem $V(\xi) = U'(\xi)$ pro $\xi \in \mathbb{R}$. Dostaneme tak systém

$$\begin{aligned} U' &= V, \\ V' &= U(U-1) - cV. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Tento systém má dva rovnovážné (stacionární) body $(0,1)$ a $(0,0)$. Řešení systému (3.32), jehož první složka má požadované vlastnost (3.31), je ve ve stavovém prostoru reprezentována heteroklinickou trajektorií, která vychází z bodu $(1,0)$, vstupuje do bodu $(0,0)$ a neopustí polorovinu $U \geq 0$. Budeme hledat podmínky, za jakých taková heteroklinická trajektorie existuje.

Variační matice systému (3.32) je

$$\mathsf{J}(U,V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U-1 & -c \end{pmatrix}.$$

Konkrétně

$$\mathsf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}, \quad \det \mathsf{J}(1,0) = -1 < 0,$$

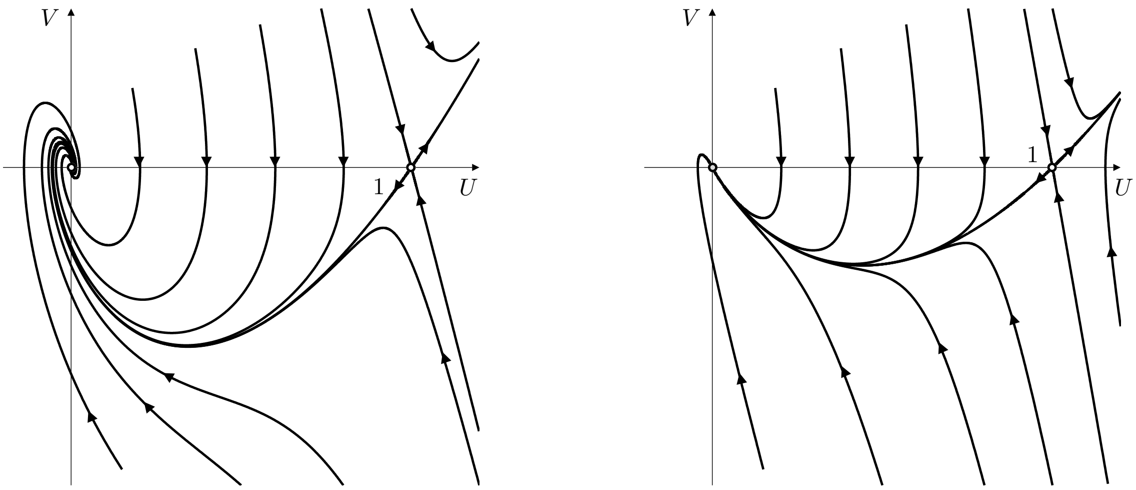
což znamená, že stacionární bod je sedlo. Při každé hodnotě c tedy existuje konečně mnoho trajektorií, které z bodu $(1,0)$ vychází.

Dále

$$\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}, \quad \det \mathsf{J}(0,0) = 1 > 0, \quad \operatorname{tr} \mathsf{J}(0,0) = -c < 0.$$

Stacionární bod $(0,0)$ je tedy stabilní uzel (pro $c \geq 2$) nebo ohnisko (pro $c < 2$). Trajektorie do bodu $(0,0)$ vstupují; fázové portréty systému (3.32) pro dvě různé hodnoty parametru c jsou znázorněny na Obrázku 3.3. Pokud by stacionární bod $(0,0)$ byl ohniskem, libovolná trajektorie by ho obíhala a tak se dostala nalevo od osy V; tím by byl porušen první z požadavků (3.31). Touto úvahou dostáváme nutnou podmínku

$$c \geq 2 \tag{3.33}$$



Obrázek 3.3: Fázové portréty systému (3.32) pro dvě různé hodnoty parametru c; $c = 1$ vlevo a $c = 2$ vpravo.

pro existenci heteroklinické trajektorie systému (3.32) v polorovině $U \geq 0$, tj. pro existenci řešení rovnice (3.14) ve tvaru putující vlny.

Ukážeme, že podmínka (3.33) je také dostatečná pro existenci heteroklinické trajektorie systému (3.32) spojující stacionární body $(1, 0)$ a $(0, 0)$. Ve stavovém prostoru systému (3.32) uvažujme trojúhelník

$$P = \left\{ (U, V) : 0 \leq U \leq 1, -\frac{2}{c}U \leq V \leq 0 \right\},$$

viz Obrázek 3.4. V jeho vrcholech $(0, 0)$ a $(1, 0)$ jsou stacionární body. Ve vrcholu $\left(1, -\frac{c}{2}\right)$ má vektorové pole určené systémem (3.32) směr $\left(-\frac{c}{2}, 2\right)$, je tedy orientováno dovnitř trojúhelníka P. Na vnitřku „horní“ odvěsny je toto vektorové pole orientováno „dolů“, na vnitřku „pravé“ odvěsny „doleva“[2]. Vektor vnitřní normály k trojúhelníku P na přeponě $V = -\frac{2}{c}U$ má souřadnice $(2, c)$. Pro

$$0 < U < 1, \quad V = -\frac{2}{c}U, \quad c \geq 2$$

nyní platí

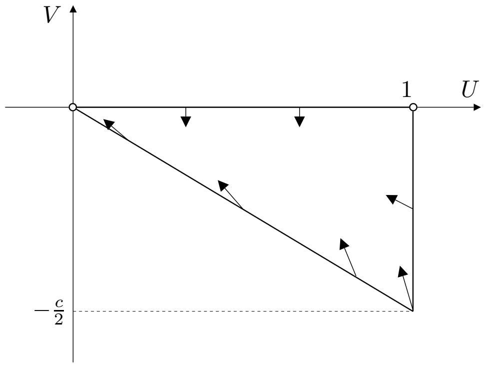
$$(2, c) \cdot (U', V') = (2, c) \cdot \left(-\frac{2}{c}U, U(U - 1) + 2U \right) = -\frac{4}{c}U + cU(U - 1) + 2cU =$$
$$= cU^2 + \left(c - \frac{4}{c} \right) U \geq cU^2 + \left(2 - \frac{4}{2} \right) U = cU^2 > 0;$$

skalární součin vektoru vnitřní normály a vektorového pole je kladný. To znamená, že úhel, který svírá vnitřní normála s vektorovým polem je ostrý, takže vektorové pole je orientováno dovnitř trojúhelníka P. Celkem tak dostáváme, že trojúhelník P je positivně invariantní množinou systému (3.32).

Uvnitř trojúhelníka P není žádný stacionární bod. Podle Bendixsonova kriteria

$$\frac{\partial}{\partial U}V + \frac{\partial}{\partial V}\big(U(U - 1) - cV\big) = -c < 0$$

[2]Přesněji: Pro $U \in (0, 1)$ a $V = 0$ je $U' = 0$, $V' = U(U - 1) < 0$, takže vektorové pole určené systémem (3.32) je orientováno v záporném směru osy V. Pro $U = 1$ a $V \in \left(0, -\frac{2}{c}\right)$ je $U' < -\frac{2}{c} < 0$, takže vektorové pole je orientováno v záporném směru osy U.



Obrázek 3.4: Positivně invariantní množina systému (3.32)

tam není ani žádný cyklus. Trajektorie vycházející z okolí bodu $(1, 0)$ uvnitř trojúhelníka P tak musí skončit ve stacionárním bodě $(0, 0)$, tj. existuje heteroklinická trajektorie spojující stacionární body $(1, 0)$ a $(0, 0)$. Ta representuje řešení rovnice (3.14) ve tvaru putující vlny.

Na konci oddílu 3.2.2 jsme viděli, že $c = 2$ je rychlost putující vlny v lineární rovnici reakce-difúze (3.1) s počáteční podmínkou tvaru Diracovy distribuce. Tato úloha je modelem šíření malthusovsky rostoucí populace v prostoru, která na počátku byla koncentrována v jediném bodě, tedy zaujímala omezenou oblast. Populace rostoucí logisticky se z omezené oblasti těžko může šířit do prostoru rychleji, než populace rostoucí exponenciálně. Proto také pro rychlost c postupu putující vlny v rovnici (3.14) bude platit $c \leq 2$.

Spolu s (3.33) tak dostáváme $c = 2$ jako rychlost putující vlny rovnice (3.14) s počáteční podmínkou

$$u(0, x) = \varphi(x) \geq 0$$

takovou, že $\varphi(x) = 0$ při $|x| > R$ pro nějakou hodnotu R.

Část II

Diferenciální rovnice se zpožděním

Kapitola 4

Nejjednodušší model zpětnovazební regulace

Představme si, že máme zregulovat nějaký proces k nějakému žádoucímu výsledku. Jako „paradigmatický“ příklad bývá v této souvislosti uváděna regulace teploty vody ve sprše, viz obr. 4.1. Pro sprchující se osobu je nějaká teplota optimální. Pokud na ni teče voda chladnější, vychýlí páku baterie směrem k teplé vodě, pokud teče voda teplejší, vychýlí ji naopak. Čím je voda ledovější, (nebo naopak horčejší), tím víc páku vychýlí. Tuto situaci popíšeme matematicky.

Označme y teplotu vody proudící ze sprchy. Tato teplota se s časem může měnit, neboť sprchovaná osoba manipuluje s pákou baterie; tedy $y = y(t)$. Označme dále α teplotu optimální. Budeme předpokládat, že změna teploty (tj. derivace funkce y podle času) způsobená regulací je přímo úměrná rozdílu aktuální teploty od teploty optimální; koeficient úměrnosti označíme β. Dostáváme tak jednoduchou rovnost

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta(\alpha - y). \tag{4.1}$$

Je-li teplota nižší než optimální, tj. $\alpha - y > 0$, teplotu zvětšujeme. To znamená, že koeficient β je kladný.

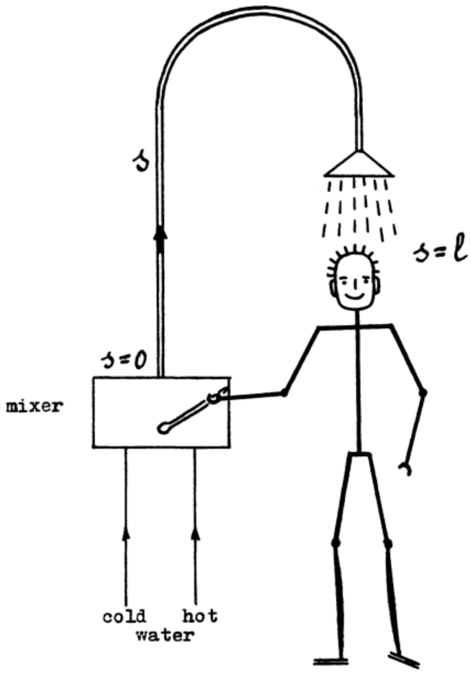
V rovnosti (4.1) není uveden čas. Zamysleme se nad ním. Nechť t označuje časový okamžik, ve kterém voda o teplotě $y = y(t)$ protéká baterií. V témže okamžiku ze sprchy vytéká voda, která tekla přes baterii před nějakou dobou; označme tuto dobu τ. Časová prodleva τ představuje čas, za který voda proteče od baterie k růžici sprchy. Osoba reaguje na vodu ze sprchy, tedy na vodu o teplotě $y(t-\tau)$. Rovnost (4.1) tedy musíme upřesnit, psát ji ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \beta\big(\alpha - y(t-\tau)\big). \tag{4.2}$$

Na tuto rovnost se můžeme dívat jako na model vývoje teploty vody v čase, tj. teplotu y považovat za neznámou a (4.2) chápat jako rovnici pro tuto funkci. Jedná se o *obyčejnou lineární diferenciální rovnici prvního řádu s jedním diskrétním zpožděním.* Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu je to proto, že se v ní vyskytuje první derivace hledané funkce podle její jediné proměnné, lineární je proto, že hledaná funkce je na pravé straně v první mocnině, s jedním diskrétním zpožděním proto, že zpoždění (časová prodleva) τ je přesně určeno a je jediné.

Ale ani rovnice (4.2) ještě nemusí být adekvátním modelem uvažované regulace. Zpoždění může být nějak „rozmazané“. Voda nemusí proudit úplně rovnoměrně, její rychlost se může s teplotou nebo nastavením regulační páky nějak měnit; osoba nemusí na změnu teploty reagovat okamžitě a přesně. Trochu techničtěji řečeno, zpoždění τ nemusí být „klasická veličina“, ale může to být veličina náhodná. Budeme ji považovat za spojitou a její hustotu označíme w.

Diskrétní zpoždění τ můžeme považovat za náhodné s nulovým rozptylem, za jeho hustotu



Obrázek 4.1: Regulace teploty vody ve sprše. Symbol s označuje dráhu, kterou voda urazí od baterie (`mixer`), ℓ označuje délku trubky od baterie po růžici sprchy. (Obrázek je z knihy V. Kolmanovskii, A. Myshkis: *Applied Theory of Functional Differential Equations.* Springer, 2010 reprint.)

můžeme považovat Diracovu distribuci soustředěnou v bodě τ a psát

$$y(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t-s)\delta(s-\tau)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} y(s)\delta(t-s-\tau)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{t} y(s)\delta(t-\tau-s)\mathrm{d}s.$$

Je-li tedy zpoždění náhodnou veličinou s hustotou w, nahradíme v rovnici (4.2) výraz $y(t-\tau)$ výrazem

$$\int_{-\infty}^{t} y(s)w(t-s)\mathrm{d}s.$$

Dostaneme tak *obyčejnou lineární diferenciální rovnici s distribuovaným zpožděním*

$$\frac{dy(t)}{\mathrm{d}t} = \beta\left(\alpha - \int_{-\infty}^{t} y(s)w(t-s)\mathrm{d}s\right). \tag{4.3}$$

Tuto rovnici můžeme také číst tak, že aktuální změna veličiny y závisí na celé předchozí historii této veličiny, od času $-\infty$ (času v temné minulosti, kam nedohlédneme, času od stvoření světa nebo Velkého třesku, případně času, před kterým můžeme vliv modelované veličiny na její změnu v současnosti zanedbat) po přítomný okamžik t. Funkce w pak vyjadřuje váhu, s jakou má minulost vliv na současnost; přesněji: $w(\sigma)$ je váha (intenzita, podíl) vlivu okamžiku σ před aktuálním časem t na změnu velikosti v čase t.

Budeme předpokládat, že přítomnost je zcela výsledkem minulosti a budoucnost na ni nemá žádný vliv. Funkce w tedy má vlastnosti

$$w(s) = 0 \text{ pro } s < 0, \qquad \int_0^\infty w(s)\mathrm{d}s = 1. \tag{4.4}$$

Rovnice (4.3) s funkcí w splňující podmínky (4.4) se nazývá *kauzální* nebo *neanticipativní*. Vzhledem k první z vlastností (4.4) můžeme rovnici (4.3) zapsat ve tvaru konvoluce

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \beta\big(\alpha - y * w(t)\big)$$

nebo stručněji

$$y' = \beta(\alpha - y * w).$$

4.1 Rovnice s diskrétním zpožděním

V rovnici s diskrétním zpožděním (4.2) jsou tři parametry α, β, τ; parametr α má stejný rozměr jako veličina y, τ má rozměr času a β převrácené hodnoty času. Vhodnou změnou měřítek (jednotek) veličiny y i času můžeme počet parametrů zredukovat o dva, tedy rovnici (4.2) transformovat na rovnici s jediným parametrem. Konkrétně, začátek sledování nebo regulace procesu zvolíme za počátek času a změníme jeho měřítko tak, aby čas byl bezrozměrný; to můžeme udělat dvěma přirozenými způsoby – čas vynásobit parametrem β nebo vydělit parametrem τ. „Cílovou“ hodnotu α veličiny y zvolíme za počátek (nulovou hodnotu) a měřítko neměníme; místo regulované veličiny uvažujeme její odchylku od požadované hodnoty, ta má stejný rozměr jako původní veličina[1].

Označme na chvíli čas symbolem s a dále označme s_0 okamžik, v němž začínáme pozorování veličiny y. Rovnici (4.2) přepíšeme

$$y'(s) = \beta\big(\alpha - y(s-\tau)\big), \quad s \geq s_0 \tag{4.5}$$

a označíme

$$a = \beta\tau; \tag{4.6}$$

bezrozměrný parametr a je kladný, $a > 0$.

1. transformace

Zvolíme novou jednotku času tak, že položíme

$$t = \frac{1}{\tau}(s - s_0);$$

čas t je bezrozměrný a proces regulace začne v čase $t = 0$. Dále zavedeme novou stavovou proměnnou x vyjadřující absolutní odchylku regulované veličiny od požadované hodnoty α v čase t,

$$x(t) = y(\tau t + s_0) - \alpha.$$

Pak je

$$\begin{aligned} x'(t) = \tau y'(\tau t + s_0) = \tau\beta\big(\alpha - y(\tau t + s_0 - \tau)\big) = \tau\beta\big(\alpha - y(\tau(t-1) + s_0)\big) = \\ = \tau\beta\big(\alpha - x(t-1) + \alpha\big) = -\tau\beta x(t-1). \end{aligned}$$

Vzhledem k (4.6) tedy můžeme rovnici (4.5) zapsat ve tvaru

$$x' = -ax(t-1), \quad t > 0. \tag{4.7}$$

[1] Jinak řečeno, za novou regulovanou veličinu bereme $y - \alpha$, tj. posunutou starou. Bezrozměrnou veličinu můžeme „přirozeně“ získat jen v případě $\alpha \neq 0$; pak by za novou veličinu bylo možné zvolit y/α (relativní odchylku od požadované hodnoty) nebo $y/\alpha - 1$.

2. transformace

Nyní zavedeme bezrozměrný čas vztahem

$$t = \beta(s - s_0).$$

Vzdálenost regulované veličiny od požadované hodnoty α v čase t je tedy dána výrazem

$$x(t) = y\left(\frac{1}{\beta}t + s_0\right) - \alpha.$$

Dále je

$$x'(t) = \frac{1}{\beta}y'\left(\frac{1}{\beta}t + s_0\right) = \frac{1}{\beta}\left(\alpha - y\left(\frac{1}{\beta}t + s_0 - \tau\right)\right) = \alpha - y\left(\frac{1}{\beta}(t - \beta\tau) + s_0\right) = -x(t - \tau\beta),$$

takže rovnici (4.5) můžeme také přepsat ve tvaru

$$x'(t) = -x(t - a), \quad t > 0. \tag{4.8}$$

4.1.1 Řešení metodou kroků

Hledáme řešení rovnice (4.7) spojité na intervalu $[0, \infty)$, které splňuje počáteční podmínku

$$x(0) = 1. \tag{4.9}$$

O funkci $x(\,\cdot\,)$, která je řešením této úlohy budeme dále předpokládat, že je definována na celém intervalu $(-\infty, \infty)$ a splňuje podmínku

$$x(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0. \tag{4.10}$$

Tato úloha popisuje situaci, kdy uvažovaná veličina byla v počátečním čase $t = 0$ nějakým impulsem vychýlena z požadovaného stavu a příslušnou výchylku považujeme za jednotkovou.

Pro $t \in [0, 1)$ je funkce $x(\,\cdot\,)$ řešením počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$x'(t) = 0, \quad x(0) = 1,$$

tedy $x(t) = 1$. To znamená, že pro $t \in [1, 2)$ je $x(t - 1) = 1$. Dále

$$\lim_{t \to 1-} x(t) = 1.$$

Na intervalu $[1, 2)$ je tedy funkce $x(\cdot\,)$ řešením počáteční úlohy

$$x'(t) = -a, \quad x(1) = 1,$$

tedy $x(t) = 1 - a(t - 1)$. Pro $t \in [2, 3)$ nyní platí $x(t - 1) = 1 - a(t - 2)$ a je

$$\lim_{t \to 2-} x(t) = \lim_{t \to 2-} \big(1 - a(t - 1)\big) = 1 - a.$$

Na tomto intervalu je tedy funkce $x(\,\cdot\,)$ řešením počáteční úlohy

$$x'(t) = -a\big(1 - a(t - 2)\big) = -a + a^2(t - 2), \quad x(2) = 1 - a,$$

což znamená, že

$$x(t) = 1 - a + \int_2^t \big(-a + a^2(s - 2)\big)\mathrm{d}s = 1 - a - a(t - 2) + \frac{a^2}{2}(t - 2)^2 = 1 - a(t - 1) + \frac{a^2}{2}(t - 2)^2.$$

Analogicky postupujeme dále. Pro $t \in [3,4)$ je

$$x'(t) = -a + a^2(t-2) - \frac{a^2}{2}(t-3)^2,$$

$$x(3) = \lim_{t \to 3-}\left(1 - a(t-1) + \frac{a^2}{2}(t-2)^2\right) = 1 - 2a + \frac{a^2}{2},$$

$$\begin{aligned} x(t) = 1 - 2a + \frac{a^2}{2} + \int_3^t \left(-a + a^2(s-2) - \frac{a^2}{2}(s-3)^2\right) \mathrm{d}s = \\ = 1 - 2a + \frac{a^2}{2} - a(t-3) + \frac{a^2}{2}\left((t-2)^2 - 1\right) - \frac{a^3}{6}(t-3)^3 = \\ = 1 - a(t-1) + \frac{a^2}{2}(t-2)^2 - \frac{a^3}{6}(t-3)^3. \end{aligned}$$

Z dosavadních výsledků můžeme hádat, že pro $t \in [n, n+1)$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí

$$x(t) = 1 - a(t-1) + \frac{a^2}{2}(t-2)^2 - \frac{a^3}{6}(t-3)^3 + \frac{a^4}{24}(t-4)^4 + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{n!}(t-n)^n = \sum_{i=0}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{i!}(t-i)^i,$$

kde $[\xi]$ označuje celou část z reálného čísla ξ. Ověříme, že tato funkce je skutečně řešením úlohy (4.7), (4.9), (4.10).

Pro $t \in [0,1)$ je $x(t) = 1$ a to je podle provedených výpočtů řešením úlohy. Pro každé $t > 1$, $t \notin \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} x'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=0}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{i!}(t-i)^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 + \sum_{i=1}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{i!}(t-i)^i\right) = \\ = \sum_{i=1}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{(i-1)!}(t-i)^{i-1} = -a \sum_{i=0}^{[t-1]} (-1)^i \frac{a^i}{i!}(t-1-i)^i = -ax(t-1). \end{aligned}$$

Dále je

$$\lim_{s \to 1-} x(t) = \lim_{s \to 1-} 1 = 1, \qquad \lim_{s \to 1+} x(t) \lim_{s \to 1+} \left(1 - a(s-1)\right) = 1,$$

takže funkce $x(\,\cdot\,)$ je v bodě $t = 1$ spojitá. Pro $t > 1$, $t \in \mathbb{N}$ platí $t = [t]$ a

$$\lim_{s \to t-} x(t) = \lim_{s \to t-} \sum_{i=0} t - 1(-1)^i \frac{a^i}{i!}(s-i)^i = \sum_{i=0} t - 1(-1)^i \frac{a^i}{i!}(t-i)^i,$$

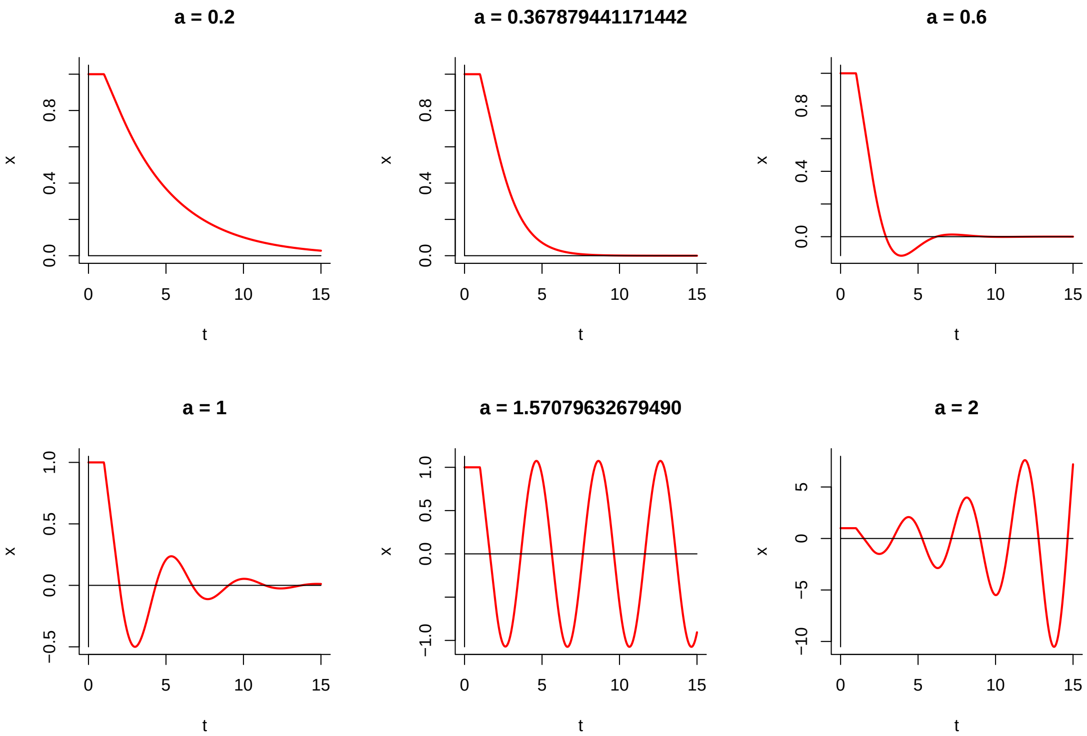
$$\lim_{s \to t+} x(t) = \lim_{s \to t+} \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \frac{a^i}{i!}(s-i)^i = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \frac{a^i}{i!}(t-i)^i = \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^i \frac{a^i}{i!}(s-i)^i,$$

tedy

$$\lim_{s \to t-} x(t) = \lim_{s \to t+} x(t)$$

a funkce $x(\,\cdot\,)$ je v bodě $t \in \mathbb{N}$ spojitá. Dále

$$\begin{aligned} \lim_{s \to t-} x'(t) = \lim_{s \to t-} \sum_{i=0} t - 1(-1)^i \frac{a^i}{(i-1)!}(s-i)^{i-1} = \sum_{i=0} t - 1(-1)^i \frac{a^i}{(i-1)!}(t-i)^{i-1} = \\ = \sum_{i=0} t(-1)^i \frac{a^i}{(i-1)!}(t-i)^{i-1} = \lim_{s \to t+} x'(t), \end{aligned}$$



Obrázek 4.2: Fundamentální řešení (4.11) rovnice (4.7) pro různé hodnoty parametru a.

což znamená, že funkce $x(\cdot)$ má v bodě $t \in \mathbb{N}$ spojitou derivaci. Celkem je tedy funkce $x(\cdot)$ spojitá pro každé $t > 0$ a s výjimkou jediného bodu $t = 1$ má spojitou první derivaci a splňuje diferenciální rovnici (4.7).

Analogickými výpočty se lze přesvědčit, že řešení $x(\cdot)$ úlohy (4.7), (4.9), (4.10) má v každém bodě $t = n \in \mathbb{N}$ spojitou derivaci až do řádu $n-1$. Řešení je tedy funkce, která je po částech polynomem. V každém z intervalů tvaru $[n, n+1)$ se však jedná o polynom jiného stupně; stupeň polynomu se zvětšuje s rostoucí hodnotou nezávisle proměnné t. Navíc s rostoucím t také vzrůstá hladkost funkce, roste řád derivace, kterou má funkce spojitou.

Řešení úlohy (4.7), (4.9), (4.10) nazveme *fundamentální řešení rovnice* (4.7) a označíme ho $k(\cdot)$. Je tedy

$$k(t) = \sum_{i=0}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{i!}(t-i)^i. \tag{4.11}$$

Průběh fundamentálního řešení rovnice (4.7) pro několik různých hodnot parametru a je zobrazeno na obr. 4.2. Vidíme, že řešení může k nule konvergovat monotonně ale různě rychle (s parametrem a rostoucím od nuly k jisté hodnotě roste i rychlost konvergence), může k ní konvergovat s více či méně tlumenými oscilacemi (s parametrem a rostoucím v jistých mezích roste i amplituda tlumených oscilací), ale také může kolem ní oscilovat s konstantní nebo rostoucí amplitudou (pro dostatečně velkou hodnotu parametru a).

4.1.2 Řešení pomocí Laplaceovy transformace

Přestavme si, že známe vývoj uvažované veličiny po jistou dobu v minulosti a chceme ho určit pro budoucnost. Přesněji řečeno, předpokládejme, že známe řešení rovnice (4.7) na intervalu $[-1, 0]$ a chceme znát řešení pro $t > 0$. Hledáme tedy řešení úlohy

$$\begin{aligned} x'(t) &= -ax(t-1), \quad && t > 0, \\ x(t) &= \varphi(t), && -1 \le t \le 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

kde $\varphi : [-1,0] \to \mathbb{R}$ je integrabilní funkce.

Integrací rovnice v mezích od 0 do t a s využitím počáteční podmínky $x(0) = \varphi(0)$ dostaneme

$$x(t) = \varphi(0) - a \int_0^t x(s-1)\mathrm{d}s = \varphi(0) - a \int_{-1}^{t-1} x(s)\mathrm{d}s = \varphi(0) - a \int_{-1}^{0} \varphi(s)\mathrm{d}s - a \int_0^{t-1} x(s)\mathrm{d}s.$$

Označme

$$M = \left| \varphi(0) - a \int_{-1}^{0} \varphi(s)\mathrm{d}s \right|.$$

Při tomto označení dostaneme pro řešení úlohy odhad

$$|x(t)| = \left| \varphi(0) - a \int_{-1}^{0} \varphi(s)\mathrm{d}s - a \int_0^{t-1} x(s)\mathrm{d}s \right| \le \left| \varphi(0) - a \int_{-1}^{0} \varphi(s)\mathrm{d}s \right| + a \int_0^{t-1} |x(s)|\,\mathrm{d}s \le$$

$$\le M + a \int_0^t |x(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Podle Gronwallova lemmatu (viz např. J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 19) tedy platí $|x(t)| \le M\mathrm{e}^{at}$. To znamená, že řešení úlohy je funkce exponenciálního řádu, a proto existuje jeho Laplaceův obraz.

Laplaceova transformace levé strany rovnice je $s\mathcal{L}x(s) - \varphi(0)$ a pravé strany

$$-a \int_0^{\infty} x(t-1)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -a \int_{-1}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-s(t+1)}\mathrm{d}t =$$

$$= -a\mathrm{e}^{-s} \left(\int_{-1}^{0} \varphi(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \right) = -a\mathrm{e}^{-s} \int_{-1}^{0} \varphi(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t - a\mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}x(s).$$

Z transformované úlohy

$$s\mathcal{L}x(s) - \varphi(0) = -a\mathrm{e}^{-s} \int_{-1}^{0} \varphi(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t - a\mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}x(s)$$

tedy dostaneme Laplaceův obraz řešení úlohy (4.12) ve tvaru

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s + a\mathrm{e}^{-s}} \left(\varphi(0) - a\mathrm{e}^{-s} \int_{-1}^{0} \varphi(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \right). \tag{4.13}$$

Pokud je počáteční funkce φ tvaru

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t = 1, \\ 0, & 0 > t \ge -1, \end{cases}$$

pak řešená úloha (4.12) je již vyřešenou úlohou (4.7), (4.9), (4.10). V takovém případě je

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s + a\mathrm{e}^{-s}} = \mathcal{L}k(s), \tag{4.14}$$

kde $k(\,\cdot\,)$ je fundamentální řešení rovnice (4.7) dané formulí (4.11).

Označme na chvíli

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t-1), & 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak je

$$\mathrm{e}^{-s}\int_{-1}^{0} \varphi(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-s}\int_{0}^{1} \varphi(t-1)\mathrm{e}^{-s(t-1)}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \mathcal{L}\tilde{\varphi}(s).$$

Dosazením tohoto výsledku a (4.14) do vyjádření (4.13) dostaneme

$$\mathcal{L}x(s) = \mathcal{L}k(s)\big(\varphi(0) - a\mathcal{L}\tilde{\varphi}(s)\big) = \varphi(0)\mathcal{L}k(s) - a\mathcal{L}\tilde{\varphi}(s)\mathcal{L}k(s).$$

Poněvadž součin Laplaceových obrazů funkcí je Laplaceovým obrazem konvoluce funkcí, platí

$$\mathcal{L}x(s) = \varphi(0)\mathcal{L}k(s) - a\mathcal{L}\tilde{\varphi} * k(s) = \mathcal{L}\big(\varphi(0)k - a\tilde{\varphi} * k\big)(s).$$

To znamená, že řešení úlohy (4.12) je dáno formulí

$$x(t) = \varphi(0)k(t) - a\tilde{\varphi} * k(t).$$

Ještě upravíme konvoluci na pravé straně rovnosti:

$$\tilde{\varphi} * k(t) = \int_{0}^{\infty} \tilde{\varphi}(\tau)k(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-1}^{\infty} \tilde{\varphi}(\tau+1)k(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{-1}^{0} \varphi(\tau)k(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{1} \varphi(s-j)k(t-s)\mathrm{d}s.$$

Dostáváme tak řešení úlohy (4.12) ve tvaru

$$x(t) = \varphi(0)k(t) - a\int_{0}^{1} k(t-s)\varphi(s-1)\mathrm{d}s. \tag{4.15}$$

4.1.3 Charakteristická rovnice

Rovnice (4.7) je lineární homogenní, splňuje princip superpozice. To napovídá, že by mohla mít řešení tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, kde λ je zatím neznámá hodnota. Dosadíme toto vyjádření do rovnice (4.7),

$$\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} = -a\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

a po vynásobení výrazem $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ dostaneme *charakteristickou rovnici*

$$\lambda + a\mathrm{e}^{-\lambda} = 0; \tag{4.16}$$

její řešení se nazývá *charakteristický kořen.*

Připomeňme, že číslo ξ je n-násobným kořenem rovnice $f(\xi) = 0$, pokud platí

$$f'(\xi) = 0,\ \ f''(\xi) = 0,\ \ \ldots, f^{(n-1)}(\xi) = 0,\ \ f^{(n)}(\xi) \neq 0;$$

je-li $n = 1$, mluvíme o jednoduchém kořenu.

Tvrzení 5. Každá z funkcí $x(t) = t^j \mathrm{e}^{\lambda t}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ je řešením rovnice (4.7) právě tehdy, když λ je n-násobným kořenem charakteristické rovnice (4.16).

Důkaz: Poněvadž předpokládáme $a > 0$, není $\lambda = 0$ kořenem charakteristické rovnice.

Označme $h(\lambda)$ levou stranu charakteristické rovnice (4.16). Pak

$$h(\lambda) = \lambda + a\mathrm{e}^{-\lambda},\ h'(\lambda) = 1 - a\mathrm{e}^{-\lambda},\ h''(\lambda) = a\mathrm{e}^{-\lambda},\ h^{(j)}(\lambda) = (-1)^j a\mathrm{e}^{-\lambda} \text{ pro } j = 2, 3, \dots .$$

Nechť L je operátor, který diferencovatelné funkci x definované na intervalu $(-\infty, \infty)$ přiřadí funkci Lx danou vztahem

$$Lx(t) = x'(t) + ax(t-1).$$

Pak L je lineární operátor a jeho jádrem jsou diferencovatelná řešení rovnice (4.7), tj. $Lx \equiv 0$ právě tehdy, když x je řešením rovnice (4.7).

Buď $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. S využitím binomické věty dostaneme

$$\begin{aligned}
Lt^k\mathrm{e}^{\lambda t} &= kt^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda t^k \mathrm{e}^{\lambda t} + a(t-1)^k \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} = \\
&= \mathrm{e}^{\lambda t}\left(\lambda t^k + kt^{k-1} + a\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} t^{k-j}(-1)^j\right) = \\
&= \mathrm{e}^{\lambda t}\left(\left(\lambda + a\mathrm{e}^{-\lambda}\right)t^k + \left(1 - a\mathrm{e}^{-\lambda}\right)kt^{k-1} + a\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j} t^{k-j}(-1)^j\right) = \\
&= \mathrm{e}^{\lambda t}\left(h(\lambda)t^k + h'(\lambda)kt^{k-1} + \sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j} t^{k-j}h^{(j)}(\lambda)\right) = \mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j} t^{k-j}h^{(j)}(\lambda),
\end{aligned}$$

a s využitím Leibnizovy formule pro výpočet vyšší derivace součinu funkcí dostaneme

$$\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}h(\lambda)\right) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} h^{(j)}(\lambda)\frac{\partial^{k-j}}{\partial\lambda^{k-j}}\mathrm{e}^{\lambda t} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} h^{(j)}t^{k-j}\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} t^{k-j}h^{(j)}(\lambda).$$

Celkem tedy

$$Lt^k\mathrm{e}^{\lambda t} = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}h(\lambda)\right)$$

pro libovolné $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ (pro $k = 0$ je totiž tento vztah splněn triviálně). To znamená, že funkce $x(t) = t^k\mathrm{e}^{\lambda t}$ je řešením rovnice (4.7) právě tehdy, když je alespoň k-násobným kořenem rovnice

$$\mathrm{e}^{\lambda t}h(\lambda) = 0,$$

která je ekvivalentní s rovnicí charakteristickou (4.16). □

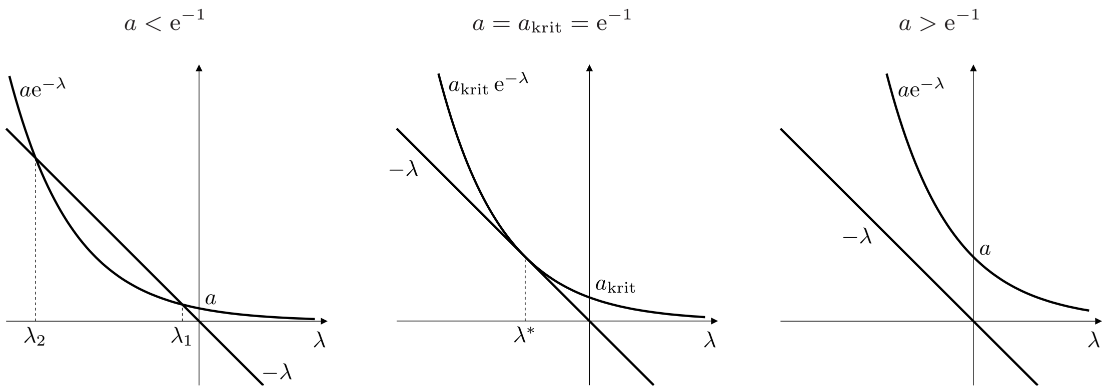
Důsledek 1. *Má-li charakteristická rovnice* (4.16) *komplexní n-násobná kořen $\lambda = \alpha + \beta\mathrm{i}$, pak má také n-násobný kořen $\lambda = \alpha - \beta\mathrm{i}$ a funkce $x(t) = t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$, $x(t) = t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ jsou řešením rovnice* (4.7)

Důkaz: Je-li $\alpha + \beta\mathrm{i}$ n-násobným kořenem charakteristické rovnice (4.16) a h je funkce zavedená v důkazu předchozího tvrzení, pak

$$h^{(j)}(\alpha + \beta\mathrm{i}) = (-1)^j a\mathrm{e}^{-\alpha}(\cos\beta - \mathrm{i}\sin\beta) = (-1)^j a\mathrm{e}^{-\alpha}\big(\cos(-\beta) + \mathrm{i}\sin(-\beta)\big) = h^{(j)}(\alpha - \beta\mathrm{i}),$$
$$j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Odtud plyne první tvrzení. Druhé tvrzení nyní plyne z principu superpozice, neboť

$$t^j\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}t^j\left(\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})t} + \mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})t}\right), \qquad t^j\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{1}{2\mathrm{i}}t^j\left(\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})t} - \mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})t}\right).$$ □



Obrázek 4.3: Grafické znázornění charakteristické rovnice (4.16) pro různé hodnoty parametru a.

Charakteristickou rovnici (4.16) můžeme přepsat ve tvaru

$$a\mathrm{e}^{-\lambda} = -\lambda.$$

Grafem pravé strany je osa druhého a čtvrtého kvadrantu, grafem levé strany je klesající exponenciála. Ta může osu druhého kvadrantu protínat ve dvou bodech (charakteristická rovnice má dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2), může se jí dotýkat (charakteristická rovnice má dvojnásobný reálný kořen λ^*), nebo s ní nemít žádný společný bod (charakteristická rovnice nemá reálný kořen), viz obr. 4.3.

Najdeme kritickou hodnotu a_{krit} parametru a, pro kterou má charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen λ^*. Hodnoty a_{krit} a λ^* jsou řešením soustavy rovnic

$$a_{\text{krit}}\mathrm{e}^{-\lambda^*} = -\lambda^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} a_{\text{krit}}\mathrm{e}^{-\lambda} = -a_{\text{krit}}\mathrm{e}^{-\lambda^*} = -1.$$

Tedy $\lambda^* = -1$, $a_{\text{krit}} = \mathrm{e}^{-1}$.

Nyní můžeme zformulovat první výsledek: Pokud parametr a splňuje podmínky $0 < a \leq \mathrm{e}^{-1}$, pak existuje monotonní řešení $x = x(t)$ rovnice (4.7) takové, že

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Charakteristická rovnice (4.16) může také mít komplexní kořeny tvaru $\lambda = \alpha + \beta\mathrm{i}$. Ty samozřejmě rovnici splňují, tj.

$$\alpha + \beta\mathrm{i} + a\mathrm{e}^{-\alpha}(\cos\beta - \mathrm{i}\sin\beta) = 0.$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha &= -a\mathrm{e}^{-\alpha}\cos\beta, \\ \beta &= a\mathrm{e}^{-\alpha}\sin\beta \end{aligned} \tag{4.17}$$

pro reálné hodnoty α, β. Bezprostředně je vidět, že s každým řešením (α, β) je také dvojice $(\alpha, -\beta)$ řešením této soustavy. Stačí se tedy omezit na hledání řešení s $\beta > 0$.

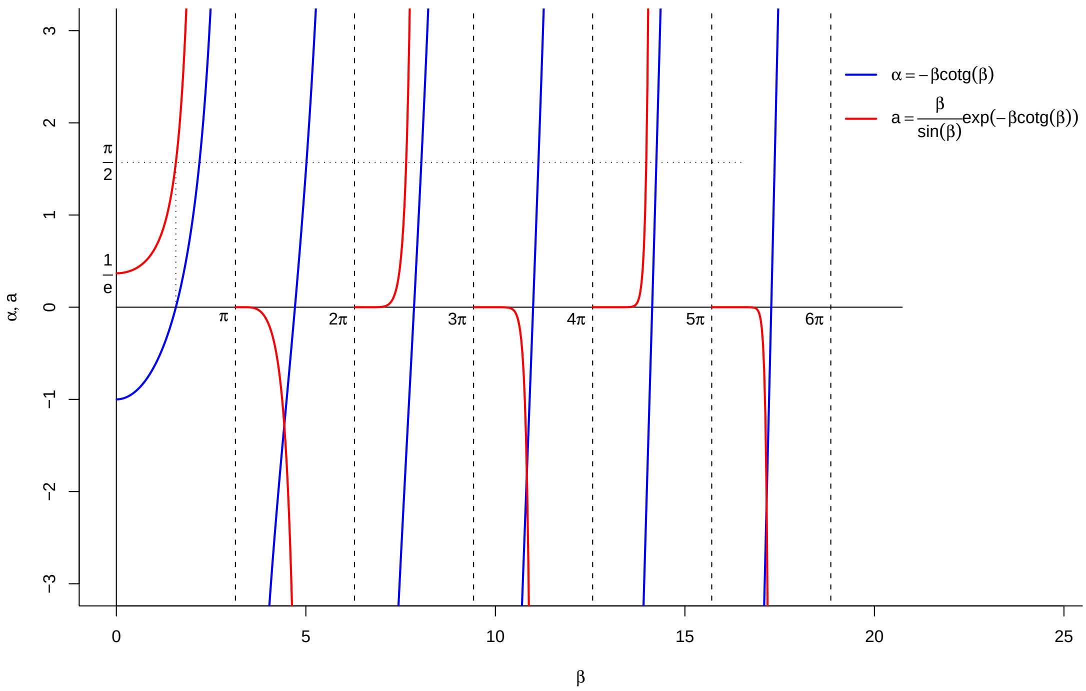
Přímým výpočtem ověříme, že pro $a = \frac{1}{2}\pi$ má soustava (4.17) řešení $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}\pi$. Pro hodnotu parametru $a = \frac{1}{2}\pi$ tedy existují periodická řešení rovnice (4.7)

$$x(t) = \cos\tfrac{1}{2}\pi t \quad \text{a} \quad x(t) = \sin\tfrac{1}{2}\pi t.$$

Soustavu rovnic (4.17) můžeme dále upravit na tvar

$$\alpha = -\beta\operatorname{cotg}\beta,$$

$$a = \frac{\beta}{\sin\beta}\mathrm{e}^{-\beta\operatorname{cotg}\beta},$$



Obrázek 4.4: Grafické řešení soustavy rovnic (4.17), tj. hledání komplexních kořenů charakteristické rovnice (4.16).

v jehož pravých stranách se objevuje pouze neznámá β. Vyšetříme průběh pravých stran, které budeme považovat za funkce nezávisle proměnné β. Výsledek je na obr. 4.4. Tento obrázek můžeme využít tak, že pro zvolenou hodnotu parametru a najdeme příslušné hodnoty β (jako první souřadnice průsečíků přímky rovnoběžné s vodorovnou osou ve výšce a s červenými čarami). K těmto hodnotám β najdeme hodnoty α (jako druhou souřadnici modré čáry v příslušné hodnotě β). Na obrázku 4.4 je takto znázorněna nejmenší hodnota β odpovídající hodnotě $a = \frac{1}{2}\pi$ a k němu příslušná hodnota $\alpha = 0$.

Z obrázku 4.4 je vidět, že pro libovolnou hodnotu $a > 0$ existuje nekonečně mnoho dvojic (α, β), které vyhovují rovnicím (4.17). To znamená, že rovnice (4.7) má nekonečně mnoho nezávislých oscilatorických řešení. Dále pro hodnoty $a > \frac{1}{2}\pi$ existuje dvojice (α, β) vyhovující rovnicím (4.17) taková, že $\alpha > 0$. To znamená, že pro $a > \frac{1}{2}\pi$ existuje řešení rovnice (4.7), které osciluje s rostoucí amplitudou.

Poněvadž rovnice (4.7) splňuje princip superpozice, množina jejích řešení tvoří vektorový prostor. Provedené úvahy však ukazují, že tento prostor nemá konečnou dimenzi.

4.2 Rovnice s distribuovaným zpožděním

Uvažujme rovnici (4.3) s váhovou funkcí w splňující podmínky (4.4). Parametr β má rozměr převrácené hodnoty času a parametr α má stejný rozměr jako regulovaná veličina y. „Váha minulosti“ w je bezrozměrná veličina a je současně hustotou nezáporné náhodné veličiny „zpoždění signálu, který určuje regulaci veličiny y“. Označme její střední hodnotu symbolem τ, tj.

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} sw(s)\mathrm{d}s = \int_{0}^{\infty} sw(s)\mathrm{d}s$$

a platí $\tau > 0$; hodnota τ představuje očekávané zpoždění signálu potřebného k regulaci veličiny y.

Podobně jako v případě rovnice s diskrétním zpožděním zavedeme novou stavovou proměnnou $x = x(t)$ jako (absolutní) odchylku regulované veličiny y od cílové hodnoty α,

$$x(t) = y(t) - \alpha.$$

Pak je

$$x'(t) = y'(t) = \beta\left(\alpha - \int_{-\infty}^{t} y(s)w(t-s)\mathrm{d}s\right) = \beta\left(\alpha\int_{-\infty}^{t} w(t-s)\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{t} y(s)w(t-s)\mathrm{d}s\right) =$$
$$= -\beta\int_{-\infty}^{t}\big(y(s)-\alpha\big)w(t-s)\mathrm{d}s = -\beta\int_{-\infty}^{t} x(s)w(t-s)\mathrm{d}s.$$

Rovnice (4.3) je tedy ekvivalentní s rovnicí

$$x'(t) = -\beta\int_{-\infty}^{t} x(s)w(t-s)\mathrm{d}s, \tag{4.18}$$

nebo stručněji s rovnicí, jejíž pravá strana je ve tvaru konvoluce

$$x' = -\beta x * w.$$

Tato rovnice vypadá jako obyčejná diferenciální rovnice pro neznámou funkci x, na jejíž pravé straně se nezávisle proměnná explicitně nevyskytuje; jedná se tedy o rovnici „svého druhu autonomní“. Transformovaná rovnice formálně obsahuje jediný parametr β. Ovšem další parametry jsou skryty ve váhové funkci w; přinejmenším je v ní implicitně obsaženo očekávané zpoždění signálu τ.

Jako počáteční podmínku k rovnici (4.18) je potřebné zadat všechny hodnoty hledané funkce x až do počátečního času t_0, tj. podmínku

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \le t_0. \tag{4.19}$$

Nyní zvolíme $t_0 = 0$ a speciální počáteční funkci φ, konkrétně

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Integrací rovnice (4.18) podle času v mezích od 0 po t dostaneme

$$x(t) = x(0) - \beta\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{\sigma} x(s)w(\sigma-s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\sigma =$$
$$= x(0) - \beta\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{0} x(s)w(\sigma-s)\mathrm{d}s + \int_0^{\sigma} x(s)w(\sigma-s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\sigma.$$

Pokud funkce x splňuje počáteční podmínku (4.19) s funkcí φ danou předpisem (4.20), pak platí

$$x(t) = 1 - \beta\int_0^t\left(\int_0^{\sigma} x(s)w(\sigma-s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\sigma. \tag{4.21}$$

Zavedeme funkci W vztahem

$$W(s) = \int_0^s w(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^s w(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Pokud váhovou funkci w interpretujeme jako hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny „zpoždění regulačního signálu“, pak funkce W představuje distribuční funkci této náhodné veličiny.

Nyní v dvojnásobném integrálu na pravé straně rovnosti (4.21) změníme pořadí integrace a integrál upravíme,

$$\int_0^t \left(\int_0^\sigma x(s)w(\sigma - s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\sigma = \int_0^t \left(\int_s^t x(s)w(\sigma - s)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^t x(s) \left(\int_s^t w(\sigma - s)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s = \int_0^t x(s) \left(\int_0^{t-s} w(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s = \int_0^t x(s)W(t-s)\mathrm{d}s.$$

Celkem tak dostáváme výsledek, že řešení počáteční úlohy

$$\begin{array}{ll} x'(t) = -\beta \int\limits_{-\infty}^{t} x(s)w(t-s)\mathrm{d}s, & t > 0, \\ x(0) = 1, & t = 0, \\ x(t) = 0, & t < 0 \end{array}$$

pro diferenciální rovnici s distribuovaným zpožděním je současně řešením integrální rovnice

$$x(t) + \beta \int_0^t x(s)W(t-s)\mathrm{d}s = 1.$$

4.2.1 Distribuované zpoždění typu Γ

V rovnici (4.18) zvolíme speciální váhovou funkci w, konkrétně hustotu gama rozdělení pravděpodobnosti,

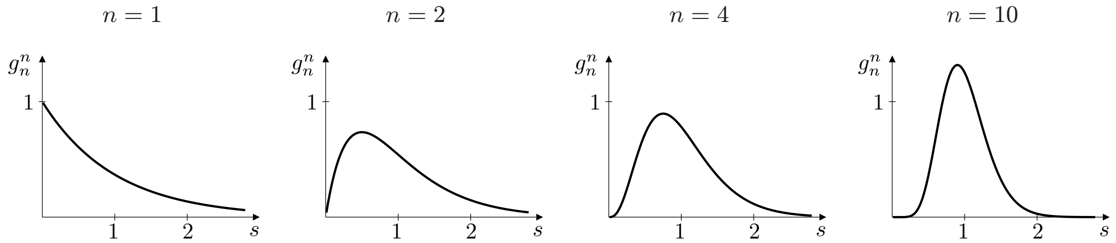
$$w(s) = g_\alpha^p(s) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \mathrm{e}^{-\alpha s} s^{p-1},$$

kde α a p jsou kladné parametry. Tato funkce má vlastnosti (4.4). Náhodnou veličinu T s hustotou g_α^p interpretujeme jako zpoždění signálu. Očekávaná (střední) doba zpoždění τ je

$$\mathrm{E}\,T = \int_0^\infty s g_\alpha^p(s)\mathrm{d}s = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s} s^p \mathrm{d}s = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \left(\left[-\frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha s} s^p \right]_{s=0}^\infty + \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s} s^{p-1} \mathrm{d}s \right) =$$
$$= \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \mathrm{e}^{-\alpha s} s^{p-1} \mathrm{d}s = \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty g_\alpha^p(s)\mathrm{d}s = \frac{p}{\alpha},$$

druhý moment náhodné veličiny T je

$$\int_0^\infty s^2 g_\alpha^p(s)\mathrm{d}s = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s} s^{p+1} \mathrm{d}s = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \left(\left[-\frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha s} s^{p+1} \right]_{s=0}^\infty + \frac{p+1}{\alpha} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s} s^p \mathrm{d}s \right) =$$
$$= \frac{p+1}{\alpha} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty s \mathrm{e}^{-\alpha s} s^{p-1} \mathrm{d}s = \frac{p+1}{\alpha} \int_0^\infty s g_\alpha^p(s)\mathrm{d}s = \frac{p+1}{\alpha} \mathrm{E}\,T = \frac{(p+1)p}{\alpha^2},$$



Obrázek 4.5: Hustota gama rozdělení pravděpodobnosti s parametry $p = \alpha = n \in \mathbb{N}$ pro několik hodnot n.

takže rozptyl zpoždění je roven

$$\operatorname{var} T = \mathrm{E}\, T^2 - (\mathrm{E}\, T)^2 = \frac{(p+1)p}{\alpha^2} - \left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 = \frac{p}{\alpha^2}.$$

Zejména pro $p = \alpha = n \in \mathbb{N}$ platí

$$g_n^n(s) = \frac{n^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-ns}s^{n-1}, \qquad \mathrm{E}\, T = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{var} T = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

To znamená, že posloupnost funkcí $\{g_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ je vytvořující posloupností Diracovy distribuce soustředěné v bodě 1. Grafy hustot g_n^n pro několik hodnot parametru n jsou zobrazeny na obrázku 4.5.

Transformace rovnice na rovnici s bezrozměrným časem

Vzhledem k tomu, že $\tau = \mathrm{E}\, T = p/\alpha$, můžeme ve vyjádření váhové funkce g_α^p psát zlomek p/τ místo parametru α. Váhová funkce tedy bude

$$w(s) = g_{p/\tau}^p(s) = \frac{p^p}{\tau^p\Gamma(p)}\mathrm{e}^{-\frac{p}{\tau}s}s^{p-1} = \frac{p^p}{\tau\Gamma(p)}\mathrm{e}^{-p\frac{s}{\tau}}\left(\frac{s}{\tau}\right)^{p-1} = \frac{1}{\tau}g_p^p\left(\frac{s}{\tau}\right)$$

a rovnice (4.18) získá tvar

$$z'(s) = -\frac{\beta}{\tau}\int_{-\infty}^{s} z(\sigma)g_p^p\left(\frac{s-\sigma}{\tau}\right)\mathrm{d}\sigma; \tag{4.22}$$

píšeme symbol z místo x a s místo t. Změnou měřítka $\sigma \mapsto \tau\sigma$ v integrační proměnné tuto rovnici přepíšeme

$$z'(s) = -\beta\int_{-\infty}^{s/\tau} z(\tau\sigma)g_p^p\left(\frac{s-\tau\sigma}{\tau}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

Nyní zavedeme bezrozměrnou nezávisle proměnnou t vztahem $s = \tau t$ a označíme $x(t) = z(\tau t)$. Pak

$$x'(t) = \tau z'(\tau t) = -\tau\beta\int_{-\infty}^{t} z(\tau\sigma)g_p^p\left(\frac{\tau t-\tau\sigma}{\tau}\right)\mathrm{d}\sigma = -\beta\tau\int_{-\infty}^{t} x(\sigma)g_p^p(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Znovu použijeme označení (4.6). Rovnice (4.22) se pak transformuje na rovnici

$$x'(t) = -a\int_{-\infty}^{t} x(s)g_p^p(t-s)\mathrm{d}s \tag{4.23}$$

s bezrozměrným časem t a s bezrozměrnými parametry a, p. Také tuto rovnici lze přepsat v kratším tvaru s konvolucí na pravé straně

$$x' = -ax * g_p^p.$$

Pokud zvolíme $p \in \mathbb{N}$, můžeme rovnici (4.7) s diskrétním zpožděním považovat za limitní případ rovnice (4.23) s distribuovaným zpožděním pro $p \to \infty$.

Příklad: Řešení rovnice (4.23) s parametrem $p = 1$

Hustota gama rozdělení pravděpodobnosti s parametry $p = \alpha = 1$ je klesající exponenciální funkce, $g_1^1(s) = \mathrm{e}^{-s}$. Uvažujme tedy počáteční úlohu

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a \int_{-\infty}^{t} x(s)\mathrm{e}^{-(t-s)}\mathrm{d}s, && t > 0, \\ x(t) &= \varphi(t), && t \leq 0. \end{aligned}$$

Zavedeme pomocnou funkci $y = y(t)$ vztahem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)\mathrm{e}^{-t+s}\mathrm{d}s.$$

Pak je

$$y'(t) = x(t) - \int_{-\infty}^{t} x(s)\mathrm{e}^{-t+s}\mathrm{d}s = x(t) - y(t)$$

a dále platí

$$x(0) = \varphi(0), \qquad y(0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(s)\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s. \tag{4.24}$$

Funkce x a y tedy splňují soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \quad -ay \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami (4.24). Tato počáteční úloha je ekvivalentní s počátečním problémem pro obyčejnou lineární homogenní rovnici druhého řádu s konstantním koeficientem

$$x'' + x' + ax = 0, \qquad x(0) = \varphi(0), \quad x'(0) = -a \int_{-\infty}^{0} \varphi(s)\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s,$$

který má jediné řešení

$$x(t) = \begin{cases} \left(\varphi(0)\cosh\frac{1}{2}\sqrt{1-4a}\,t + \dfrac{A}{\sqrt{1-4a}}\sinh\frac{1}{2}\sqrt{1-4a}\,t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}, & a < \frac{1}{4}, \\ \left(\varphi(0) + \frac{1}{2}At\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}, & a = \frac{1}{4}, \\ \left(\varphi(0)\cos\frac{1}{2}\sqrt{4a-1}\,t + \dfrac{A}{\sqrt{4a-1}}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4a-1}\,t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}, & a > \frac{1}{4}, \end{cases}$$

kde jsme označili

$$A = \varphi(0) - 2a \int_{-\infty}^{0} \varphi(s)\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s.$$

Tato funkce je současně řešením dané úlohy. Platí pro ni

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

a funkce x je v okolí nekonečna monotonní (pro $a \leq \frac{1}{4}$), nebo osciluje kolem 0 (pro $a > \frac{1}{4}$).

Z výsledků výpočtu vidíme, že regulace pomocí zpětné vazby s exponenciálně klesajícím vlivem minulosti, vede vždy k dosažení žádaného cílového stavu; při jeho dosahování se mohou objevit tlumené oscilace – pokud „intenzita regulování“ je příliš velká, nebo regulaci ovlivňuje příliš vzdálená minulost.

Charakteristická rovnice a nestabilita

Rovnice (4.23) splňuje princip superpozice, jak se můžeme snadno přesvědčit přímým výpočtem. Proto zkusíme hledat její řešení ve tvaru exponenciální funkce $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Takové řešení musí splňovat rovnost

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} = x'(t) = -a \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\lambda s} g_p^p(t-s)\mathrm{d}s,$$

tedy pro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > -p$ a $p > 1$ bude platit

$$\begin{aligned}
\lambda = -a \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} g_p^p(t-s)\mathrm{d}s = -a \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} g_p^p(s)\mathrm{d}s = \frac{-ap^p}{\Gamma(p)} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+p)s} s^{p-1}\mathrm{d}s = \\
= -\frac{ap^p}{\Gamma(p)} \left(\left[-\frac{1}{\lambda+p} \mathrm{e}^{-(\lambda+p)s} s^{p-1} \right]_{s=0}^{\infty} + \frac{p-1}{\lambda+p} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+p)s} s^{p-2}\mathrm{d}s \right) = \\
= -\frac{ap^p}{(\lambda+p)\Gamma(p-1)} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+p)s} s^{p-2}\mathrm{d}s = -a \left(\frac{p}{\lambda+p}\right)^p \int_{0}^{\infty} \frac{(\lambda+p)^{p-1}}{\Gamma(p-1)} \mathrm{e}^{-(\lambda+p)s} s^{p-2}\mathrm{d}s = \\
= -a \left(\frac{p}{\lambda+p}\right)^p \int_{0}^{\infty} g_{\lambda+p}^{p-1}(s)\mathrm{d}s = -a \left(\frac{p}{\lambda+p}\right)^p,
\end{aligned}$$

neboť $g_{\lambda+p}^{p-1}$ je hustotou rozdělení pravděpodobnosti. Analogickým výpočtem se lze přesvědčit, že odvozená rovnost platí i pro $p = 1$ a také pro λ komplexní s reálnou částí větší než $-p$. Dostáváme tak *charakteristickou rovnici příslušnou k rovnici* (4.23) ve tvaru

$$\lambda(\lambda+p)^p + ap^p = 0. \tag{4.25}$$

Z provedených výpočtů je zřejmé, že pro každý kořen λ této rovnice je exponenciální funkce x, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ řešením diferenciální rovnice s distribuovaným zpožděním (4.23).

Pokud je parametr p přirozené číslo, pak je charakteristická rovnice (4.25) rovnicí algebraickou stupně $p+1$. Pak můžeme vyšetřit standardními metodami, např. užitím Hurwitzova kritéria, za jakých podmínek má kořeny s kladnou reálnou částí, tedy za jakých podmínek je nulové řešení rovnice (4.23) nestabilní. Výsledky pro několik hodnot parametru p jsou shrnuty v následující tabulce:

p	dostatečná podmínka nestability
2	$a > 4$
3	$a > \frac{8}{3} \doteq 2{,}6667$
4	$a > 32\left(5\sqrt{2}-7\right) \doteq 2{,}2742$
5	$a > \frac{16}{5}\left(7\sqrt{5}-15\right) \doteq 2{,}0879$

Ekvivalence rovnice (4.23) se systémem obyčejných lineárních rovnic

Nechť $p \in \mathbb{N}$ a uvažujme počáteční úlohu pro rovnici s distribuovaným zpožděním

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a \int_{-\infty}^{t} x(s) g_p^p(t-s) \mathrm{d}s, \quad && t > 0, \\ x(t) &= \varphi(t), && t \le 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Pro funkce g_p^j definované vztahy

$$g_p^j(s) = \frac{p^j}{(j-1)!} \mathrm{e}^{-ps} s^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

platí

$$g_p^1(0) = p, \qquad g_p^j(0) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, p,$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g_p^1(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} p\mathrm{e}^{-ps} = -p^2 \mathrm{e}^{-ps} = -p g_p^1(s), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g_p^j(s) &= \frac{p^j}{(j-1)!} \left(-ps^{j-1} + (j-1)s^{j-2} \right) \mathrm{e}^{-ps} = \\ &= p \left(\frac{p^{j-1}}{(j-2)!} s^{j-2} - \frac{p^j}{(j-1)!} s^{j-1} \right) \mathrm{e}^{-ps} = p \left(g_p^{j-1}(s) - g_p^j(s) \right), \quad j = 2, 3, \dots, p. \end{aligned}$$

Nechť nyní funkce $x = x(t)$ je řešením úlohy (4.26). Položme

$$y_0(t) = x(t), \qquad y_j(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s) g_p^j(t-s) \mathrm{d}s, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Pak platí

$$y_0(0) = \varphi(0), \qquad y_j(0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(s) g_p^j(t-s) \mathrm{d}s, \quad j = 1, 2, \dots, p, \tag{4.27}$$

dále

$$y_0'(t) = -a \int_{-\infty}^{t} x(s) g_p^p(t-s) \mathrm{d}s = -a y_p(t)$$

a s využitím odvozených identit pro funkce g_p^j dostaneme

$$y_1'(t) = x(t) g_p^1(0) + \int_{-\infty}^{t} x(s) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g_p^1(t-s) \mathrm{d}s = px(t) - p \int_{-\infty}^{t} x(s) g_p^1(t-s) \mathrm{d}s = p\big(y_0(t) - y_1(t)\big),$$

$$\begin{aligned} y_j'(t) = x(t) g_p^j(0) + \int_{-\infty}^{t} x(s) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g_p^j(t-s) \mathrm{d}s = p \int_{-\infty}^{t} x(s) \left(g_p^{j-1}(t-s) - g_p^j(t-s) \right) \mathrm{d}s = \\ = p\big(y_{j-1}(t) - y_j(t)\big), \quad j = 2, 3 \dots, p. \end{aligned}$$

To znamená, že funkce $y_0, y_1, \dots, y_p$ jsou řešením systému obyčejných homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} y_0' &= -a y_p, \\ y_j' &= p(y_{j-1} - y_j), \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \tag{4.28}$$

a s počátečními podmínkami (4.27). Tuto počáteční úlohu můžeme zapsat v obvyklém vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a \\ p & -p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & -p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_0(0) \\ y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_{p-1}(0) \\ y_p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi * g_p^1(0) \\ \varphi * g_p^2(0) \\ \vdots \\ \varphi * g_p^{p-1}(0) \\ \varphi * g_p^p(0) \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Nultá složka řešení tohoto systému je řešením počáteční úlohy (4.26).

Ještě si můžeme všimnout, že charakteristická rovnice příslušná k systému obyčejných lineárních rovnic (4.29) je tvaru (4.25).

Příloha A

Dodatky k matematické analýze

A.1 Distribuce

A.1.1 Základní pojmy

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných definovaná na celém prostoru $\mathbb{R}^n$. *Nosič funkce* φ definujeme jako uzávěr množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ a značíme ho $\operatorname{Supp}\varphi$.

Symbolem $\mathcal{D}$ označíme množinu funkcí definovaných na $\mathbb{R}^n$, které zde jsou třídy C^∞ (mají spojité všechny parciální derivace libovolného řádu) a jejichž nosič je kompaktní množina.

Na množině $\mathcal{D}$ definujeme metriku ρ vztahem

$$\rho(\varphi,\psi) \;=\; \sup\left\{\left|\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\varphi(\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{x}))\right| : \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ (i_1,i_2,\ldots,i_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n\right\}.$$

Množinu $\mathcal{D}$ s touto metrikou nazýváme *prostor testovacích funkcí*, jeho prvky nazýváme *testovací funkce*.

Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$T(\varphi+\psi) \;=\; T(\varphi)+T(\psi), \quad T(c\varphi) \;=\; cT(\varphi)\,,\ c\in\mathbb{R}$$

nazýváme *lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí*. Obraz funkce φ při zobrazení T budeme značit

$$T(\varphi),\ T\cdot\varphi,\ T\varphi.$$

Množinu všech lineárních funkcionálů $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazýváme *prostor duální k* $\mathcal{D}$ a značíme ji $\mathcal{D}'$.

Definice 1. Spojitý lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí se nazývá *distribuce*.

Podrobněji: Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazveme distribuce, jestliže

- $(\forall\varphi,\psi\in\mathcal{D})\ T(\varphi+\psi) = T\varphi + T\psi$,
- $(\forall\varphi\in\mathcal{D})\,(\forall c\in\mathbb{R})\ T(c\varphi) = cT\varphi$,
- $(\forall\{\varphi_n\}\subseteq\mathcal{D})\,(\forall\varphi\in\mathcal{D})\ \varphi_n\to\varphi$ v prostoru $(\mathcal{D},\rho)\ \Rightarrow\ T\varphi_n \to T\varphi$ v prostoru $\mathbb{R}$ s přirozenou metrikou.

Příklady distribucí

1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každou kompaktní množinu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existuje konečný integrál $\int\limits_K f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ (tzv. *lokálně integrabilní funkce*). Definujme $T_f \in \mathcal{D}'$ vztahem

$$T_f\varphi \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.$$

$T_f\varphi$ budeme také značit $\langle\ f \mid \varphi\ \rangle$, nebo podrobněji $\langle\ f(\boldsymbol{x}) \mid \varphi(\boldsymbol{x})\ \rangle$.
Distribuce $T \in \mathcal{D}'$ taková, že existuje lokálně integrabilní funkce f pro niž $T\varphi = \langle\ f \mid \varphi\ \rangle$ pro všechny $\varphi \in \mathcal{D}$, se nazývá *regulární distribuce*. Distribuce, která není regulární, se někdy nazývá *singulární*.
Každé lokálně integrabilní funkci odpovídá distribuce, proto lze množinu lokálně integrovatelných funkcí považovat za podmnožinu $\mathcal{D}'$. Z tohoto důvodu se distribuce někdy nazývají *zobecněné funkce*.
Každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ lze považovat za regulární distribuci. Tedy $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$.

2. *Diracova distribuce* δ přiřadí každé testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ hodnotu $\varphi(0)$. Diracova distribuce není regulární. Přesto se používá zápis

$$\langle\ \delta \mid \varphi\ \rangle \;=\; \langle\ \delta(\boldsymbol{x}) \mid \varphi(\boldsymbol{x})\ \rangle \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \;=\; \varphi(0)\,.$$

Nosič distribuce

Řekneme, že distribuce $T \in \mathcal{D}'$ je na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *nulová*, jestliže $T\varphi = 0$ pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ takovou, že $\operatorname{Supp}\varphi \subseteq \Omega$.
Nosič distribuce T je nejmenší (vzhledem k množinové inklusi) uzavřená množina taková, že na jejím komplementu je T nulová.

Základní operace v prostoru distribucí

- Součet distribucí $T, S \in \mathcal{D}'$:
  $T + S \in \mathcal{D}'$ je distribuce, pro niž platí

  $$(T+S)\varphi \;=\; T\varphi + S\varphi$$

  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

- Násobení distribuce $T \in \mathcal{D}'$ funkcí $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ třídy C^∞:
  Je-li $\varphi \in \mathcal{D}$ testovací funkce, pak φ má kompaktní nosič. To znamená, že také funkce $a\varphi$ má kompaktní nosič, tedy $a\varphi \in \mathcal{D}$.
  $aT \in \mathcal{D}'$ je distribuce, pro niž platí

  $$(aT)\varphi \;=\; T(a\varphi)$$

  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

- Translace (posunutí) distribuce $T \in \mathcal{D}$ o vektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$:
  Je-li $\varphi \in \mathcal{D}$, pak funkce $\varphi_{\boldsymbol{h}}$ definovaná vztahem $\varphi_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ má kompaktní nosič, je tedy také testovací funkcí.
  Translace distribuce $T \in \mathcal{D}'$ o vektor $\boldsymbol{h}$ je distribuce $\tau_{\boldsymbol{h}}T \in \mathcal{D}'$, pro niž platí

  $$(\tau_{\boldsymbol{h}}T)\,\varphi \;=\; T\varphi_{\boldsymbol{h}}$$

  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.
  Pro regulární distribuci určenou funkcí f platí

  $$(\tau_{\boldsymbol{h}}T_f)\,\varphi \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.$$

Nechť $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{h}$. Translace Diracovy distribuce o vektor $\boldsymbol{h}$, je distribuce $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$, pro niž platí

$$\langle\ \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \mid \varphi(\boldsymbol{x})\ \rangle \;=\; \langle\ \delta(\boldsymbol{x}) \mid \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\ \rangle \;=\; \varphi(\boldsymbol{x}_0)$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}$. Tato distribuce se nazývá *Diracova distribuce soustředěná v bodě* $\boldsymbol{x}_0$.

A.1.2 Derivování distribucí

Nechť f je diferencovatelná (a tedy lokálně integrabilní) funkce, $\varphi \in \mathcal{D}$. Pak platí

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n \ =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left([f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n \ =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n \ = \ -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,,$$

poněvadž $\mathrm{Supp}(f\varphi)$ je kompaktní. Jako zobecnění této úvahy definujeme:

Parciální derivace podle první proměnné distribuce $T \in \mathcal{D}'$ je distribuce $\dfrac{\partial}{\partial x_1}T$, pro niž platí

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}T\right)\varphi \ = \ -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}$.

Obecně

$$\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}T\right)\varphi \ = \ (-1)^{i_1+i_2+\cdots i_n}T\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}\varphi\right).$$

Každá distribuce má derivace libovolného řádu.

Každá lokálně integrabilní funkce f určuje regulární distribuci. Tato distribuce má derivaci libovolného řádu. V tomto smyslu lze říci, že každá lokálně integrabilní funkce f má derivaci libovolného řádu. Tato distribuce však obecně není funkcí ale distribucí. Nazýváme ji *distributivní derivací funkce* f.

Heavisidova skoková funkce (distribuce)

Funkce $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x) \ = \ \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

je lokálně integrabilní. Určuje tedy regulární distribuci, pro niž platí

$$\langle\ H \mid \varphi\ \rangle \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ = \ \int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Dále platí

$$\langle\ H' \mid \varphi\ \rangle \ = \ -\langle\ H \mid \varphi'\ \rangle \ = \ -\int\limits_{0}^{\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x \ = \ -[\varphi(x)]_0^{\infty} \ = \ \varphi(0) \ = \ \langle\ \delta \mid \varphi\ \rangle\,,$$

tedy distributivní derivací funkce H je Diracova distribuce (soustředěná v bodě 0).

Obecně: Funkce $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

určuje regulární distribuci:

$$\left\langle\ H \mid \varphi\ \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x_1,x_2,\ldots,x_n)\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\,.$$

Poněvadž

$$\left\langle\ \tfrac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}H \;\middle|\; \varphi\ \right\rangle = (-1)^n\left\langle\ H \;\middle|\; \tfrac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\varphi\ \right\rangle =$$

$$= (-1)^n\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n =$$

$$= (-1)^n\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2\partial x_3\cdots\partial x_n}\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right]_{x_1=0}^{\infty}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n =$$

$$= -(-1)^n\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2\partial x_3\cdots\partial x_n}\varphi(0,x_2,x_3,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n = \cdots$$

$$\cdots = (-1)^{2n}\varphi(0,0,\ldots,0) \;=\; \varphi(0,0,\ldots,0)\,,$$

je $\quad \dfrac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}H = \delta.$

Distributivní derivace funkcí jedné proměnné

Nechť funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je třídy C^∞ na každém z intervalů $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ a nechť každá její derivace je lokálně integrabilní. Tato funkce určuje regulární distribuci T_f.

Označme $\sigma_m = \lim\limits_{x\to 0+} f^{(m)}(x) - \lim\limits_{x\to 0-} f^{(m)}(x)$ a $T_f' = \dfrac{\partial}{\partial x}T,\ T_f'' = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}T\ \ \ldots,\ T_f^{(k)} = \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}T.$

Pro každou $\varphi\in\mathcal{D}$ platí

$$\begin{aligned}
T_f'\varphi \;&=\; -\left\langle\ f(x) \mid \varphi'(x)\ \right\rangle \;=\; -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \;=\; -\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \;=\\
&=\; -\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} + \int\limits_{-\infty}^{0} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \left[f(x)\varphi(x)\right]_{0}^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\\
&=\; \lim_{x\to 0+} f(x)\varphi(x) - \lim_{x\to 0-} f(x)\varphi(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\\
&=\; \varphi(0)\left(\lim_{x\to 0+} f(x) - \lim_{x\to 0-} f(x)\right) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\\
&=\; \sigma_0\varphi(0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\; \sigma_0\left\langle\ \delta \mid \varphi\ \right\rangle + \left\langle\ f' \mid \varphi\ \right\rangle \;=\; \sigma_0\left\langle\ \delta \mid \varphi\ \right\rangle + T_{f'}\varphi\,,
\end{aligned}$$

symbolicky

$$T_f' = \sigma_0\delta + T_{f'}\,.$$

Obecně

$$T_f^{(k)}\varphi \;=\; \sum_{m=0}^{k-1}(-1)^{k-m-1}\sigma_m\varphi^{(k-m-1)}(0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\,,$$

Symbolicky

$$T_f^{(k)} \;=\; \sum_{m=0}^{k-1}\sigma_m\delta^{(k-m-1)} + T_{f^{(k)}}\,.$$

A.1.3 Konvergence distribucí

Řekneme, že posloupnost distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}'$ *konverguje pro* $k \to \infty$ *k distribuci* $T \in \mathcal{D}'$ a píšeme

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T\,,$$

jestliže pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ je $\lim\limits_{k\to\infty} T_k\varphi = T\varphi$ (v tomto případě jde o konvergenci číselných posloupností).

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}'$ je posloupnost distribucí taková, že pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ existuje limita posloupnosti čísel $\{T_k\varphi\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$T(\varphi) \;=\; \lim_{k\to\infty} T_k\varphi\,.$$

Pak T je lineární (to plyne z linearity každé z distribucí T_k a z linearity operátoru limity posloupností) a spojité (důkaz např. v: Laurent Schwartz: Théorie des distributions, Paris 1973). To znamená, že T je distribuce.

δ-vytvořující posloupnosti

Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost lokálně integrabilních funkcí na $\mathbb{R}^n$ takových, že $\lim\limits_{k\to\infty} T_{f_k} = \delta$, tj.

$$\lim_{k\to\infty}\left\langle\, f_k \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle = \varphi(0)$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$. Pak $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *δ-vytvořující posloupnost*, funkce f_k se nazývají *impulsní funkce*.

Příklady δ-vytvořujících posloupností:

$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} k, & |x| \le \dfrac{1}{2k} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{2k} \end{cases}, \qquad f_k(x) \;=\; \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \le \dfrac{1}{k} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{k} \end{cases},$$

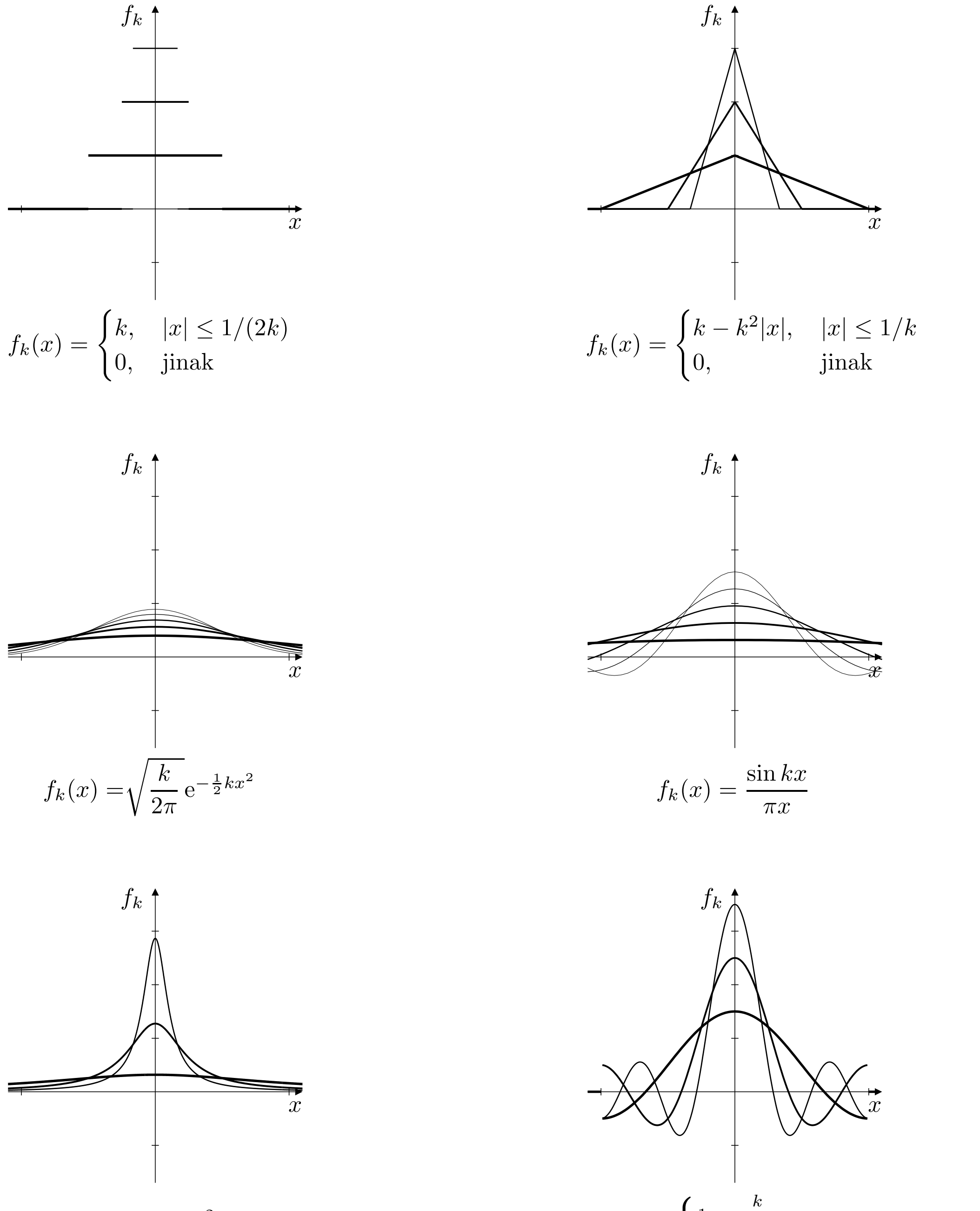
$$f_k(x) \;=\; \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-kx^2/2}\,, \qquad f_k(x) \;=\; \frac{\sin kx}{\pi x}\,,$$

$$f_k(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{\alpha_k}{x^2+\alpha_k^2},$$

přitom $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost kladných čísel taková, že $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k = 0$,

$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} + \dfrac{2}{\ell}\sum\limits_{m=1}^{k}\cos\dfrac{2\pi m}{\ell}x, & |x| \le \frac{1}{2}\ell \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}\ell \end{cases}.$$

Tyto posloupnosti jsou znázorněny na obrázku A.1.



$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \leq 1/(2k) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_k(x) = \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \leq 1/k \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kx^2}$$

$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{\pi x}$$

$$f_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{k^2}{k^4x^2 + 1}$$

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k} \cos n\pi x, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Obrázek A.1: Několik prvních členů některých δ-vytvořujících posloupností. S rostoucím k se zmenšuje síla čáry.

A.2 Fourierova transformace a konvoluce

O všech funkcích nezávisle proměnné x, které se v tomto oddíle vyskytnou, budeme předpokládat, že jsou definovány na celé množině $\mathbb{R}$, mají po částech spojitou derivaci a konvergují dostatečně rychle k nule pro $|x| \to \infty$. „Dostatečně rychlou konvergencí“ budeme rozumět, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty.$$

Fourierova transformace $\mathcal{F}$ převádí reálnou funkci f jedné reálné proměnné na komplexní funkci $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ jedné reálné proměnné definovanou vztahem

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.$$

Obraz funkce f při Fourierově transformaci (Fourierův obraz funkce) můžeme také vyjádřit jako součet reálné a imaginární části,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x.$$

Poznámka 1. Fourierův obraz funkce f bývá v (technických) aplikacích nazýván *spektrum (signálu)* f, někdy také *spektrální funkce* nebo *spektrální hustota.*

Z linearity integrálu plyne, že Fourierova transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\xi) = c_1\hat{f}_1(\xi) + c_2\hat{f}_2(\xi).$$

Příklady:

- Najdeme Fourierův obraz funkce f dané předpisem $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$, kde $\alpha > 0$.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x(\alpha-\mathrm{i}\xi)}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x(\alpha+\mathrm{i}\xi)}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x(\alpha-\mathrm{i}\xi)}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x(\alpha+\mathrm{i}\xi)}\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x(\alpha-\mathrm{i}\xi)}}{\alpha-\mathrm{i}\xi} - \frac{\mathrm{e}^{-x(\alpha+\mathrm{i}\xi)}}{\alpha+\mathrm{i}\xi}\right]_{x=0}^{\infty} = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x\alpha}(\cos x + \mathrm{i}\sin x\xi)}{\alpha-\mathrm{i}\xi} - \frac{\mathrm{e}^{-x\alpha}(\cos x\xi - \mathrm{i}\sin x\xi)}{\alpha+\mathrm{i}\xi}\right]_{x=0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\mathrm{i}\xi} + \frac{1}{\alpha+\mathrm{i}\xi} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\xi^2}.$$

- Najdeme Fourierův obraz funkce f dané předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & |x| < \beta, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{kde } \beta > 0.$$

Při výpočtu využijeme skutečnosti, že funkce cos je sudá a funkce sin je lichá. Dostaneme

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \alpha\int_{-\beta}^{\beta}(\cos x\xi + \mathrm{i}\sin x\xi)\mathrm{d}x = 2\alpha\int_{0}^{\beta}\cos x\xi\mathrm{d}x = 2\alpha\left[\frac{\sin x\xi}{\xi}\right]_{x=0}^{\beta} = 2\alpha\frac{\sin\beta\xi}{\xi}.$$

■

Pro Fourierův obraz derivace funkce f dostaneme integrací per partes a s využitím vlastnosti $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ vztah

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \big[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\big]_{x=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-\mathrm{i}\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{i}\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi\mathcal{F}(f)(\xi),$$

tj.

$$\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi). \tag{A.1}$$

Fourierova transformace převádí infinitesimální operaci, derivaci funkce, na operaci aritmetickou, na násobení.

Fourierova transformace není prostá – dvě funkce, které se liší na množině míry nula mají stejný Fourierův obraz. Pokud však ztotožníme funkce, lišící se na množině míry nula, tj. provedeme rozklad uvažované třídy funkcí podle ekvivalence

$$f \equiv g \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f(x) - g(x)\big|\mathrm{d}x = 0,$$

můžeme na těchto třídách ekvivalence považovat Fourierovu transformaci za prostou a v tomto smyslu mluvit o transformaci inversní. *Inversní Fourierova transformace* $\mathcal{F}^{-1}$ převádí komplexní funkci $\hat{f}$ zpět na reálnou funkci f na celém oboru $\mathbb{R}$; funkce f je dána vztahem

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi; \tag{A.2}$$

nevlastní integrál na pravé straně přitom chápeme ve smyslu hlavní hodnoty.

Příklad:

Najdeme vzor funkce

$$\hat{f}(\xi) = 2\alpha\frac{\sin\beta\xi}{\xi},$$

jinak řečeno, najdeme funkci f jejíž spektrum je $\hat{f}$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\ell\to\infty}\int\limits_{-\ell}^{\ell} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\lim_{\ell\to\infty}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\frac{\sin\beta\xi}{\xi}(\cos x\xi + \mathrm{i}\sin x\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Imaginární část integrálu se rovná nule, neboť integrovaná funkce je lichá. V reálné části integrujeme sudou funkci, počítáme tedy integrál

$$2\int\limits_{0}^{\ell}\frac{\sin\beta\xi}{\xi}\cos x\xi\mathrm{d}\xi = \int\limits_{0}^{\ell}\frac{1}{\xi}\big(\sin(\beta+x)\xi + \sin(\beta-x)\xi\big)\mathrm{d}\xi.$$

Tento integrál rozdělíme na součet dvou. V prvním z nich substitucí $(\beta+x)\xi = s$ dostaneme

$$\int\limits_{0}^{\ell}\frac{\sin(\beta+x)\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi = \int\limits_{0}^{(\beta+x)\ell}\frac{\sin s}{s}\mathrm{d}s = \mathrm{Si}(\beta+x)\ell,$$

kde Si označuje funkci integrálsinus[1]. Podobně najdeme

$$\int_0^\ell \frac{\sin(\beta - x)\xi}{\xi} \mathrm{d}\xi = \mathrm{Si}(\beta - x)\ell.$$

Celkem tedy máme

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \lim_{\ell\to\infty} \big(\mathrm{Si}(\beta + x)\ell + \mathrm{Si}(\beta - x)\ell \big).$$

Pokud je $-\beta < x < \beta$, jsou oba výrazy $\beta + x$ a $\beta - x$ kladné a tedy

$$\lim_{\ell\to\infty} \big(\mathrm{Si}(\beta + x)\ell + \mathrm{Si}(\beta - x)\ell \big) = 2 \lim_{y\to\infty} \mathrm{Si}(y) = \pi.$$

Pokud je $x < -\beta$ nebo $x > \beta$, mají výrazy $\beta + x$ a $\beta - x$ opačná znaménka a protože je funkkce Si lichá, platí

$$\lim_{\ell\to\infty} \big(\mathrm{Si}(\beta + x)\ell + \mathrm{Si}(\beta - x)\ell \big) = \lim_{y\to\infty} \mathrm{Si}(y) + \lim_{y\to-\infty} \mathrm{Si}(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Pokud je $x = -\beta$ nebo $x = \beta$, platí

$$\lim_{\ell\to\infty} \big(\mathrm{Si}(\beta + x)\ell + \mathrm{Si}(\beta - x)\ell \big) = \lim_{\ell\to\infty} \mathrm{Si}(2\beta\ell) = \frac{\pi}{2}.$$

Tyto výpočty ukazují, že

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in (-\beta, \beta), \\ \frac{1}{2}\alpha, & x \in \{-\beta, \beta\}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Porovnáním s předchozím příkladem vidíme, že funkce f se shoduje s funkcí, která byla „původním“ vzorem funkce $\hat{f}$, ve všech bodech spojitosti. V bodech nespojitosti nabývá hodnot, které jsou průměrem limity zprava a zleva. ■

Poznámka 2. Vzorce pro Fourierovu transformaci a pro inversní Fourierovu transformaci jsou poněkud nesymetrické, rušivě působí faktor $1/(2\pi)$. Proto v někteých (teoretičtěji zaměřených) publikacích bývá Fourierova transformace definována vztahem

$$\hat{f}(\xi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x.$$

Inversní transformace v takovém případě vyjde

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Tyto vzorce se liší jen znaménkem u výrazu $\mathrm{i}x\xi$.

Konvoluce funkcí f, g definovaných na $\mathbb{R}$ je funkce $f * g$ daná vztahem

$$f * g(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y.$$

[1] Funkce Si je definována vztahem

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$$

Tato funkce je lichá a splňuje rovnosti $\mathrm{Si}(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Si}(t) = \frac{1}{2}\pi$.

Příklad:

Vypočítáme konvoluci funkcí f a g daných předpisem $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$, $g(x) = \mathrm{e}^{-\beta|x|}$; konstanty α, β jsou kladné.

Konvoluce je dána nevlastním integrálem

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|y|}\mathrm{e}^{-\beta|x-y|}\mathrm{d}y.$$

Pro $x < 0$ tento integrál upravíme,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|y|}\mathrm{e}^{-\beta|x-y|}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\alpha y}\mathrm{e}^{-\beta(x-y)}\mathrm{d}y + \int_{x}^{0} \mathrm{e}^{\alpha y}\mathrm{e}^{\beta(x-y)}\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha y}\mathrm{e}^{\beta(x-y)}\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{\alpha+\beta}\left[\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)y}\right]_{y=-\infty}^{x} + \frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{\alpha-\beta}\left[\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)y}\right]_{y=x}^{0} - \frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{\alpha+\beta}\left[\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)y}\right]_{y=0}^{\infty} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)x}}{\alpha+\beta} + \frac{\mathrm{e}^{\beta x}\left(1-\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)x}\right)}{\alpha-\beta} + \frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{\alpha+\beta} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}+\mathrm{e}^{\beta x}}{\alpha+\beta} + \frac{\mathrm{e}^{\beta x}-\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha-\beta} =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\mathrm{e}^{\beta x} - \frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x} = \frac{2}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\mathrm{e}^{-\beta|x|} - \beta\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right).$$

Analogicky vypočítáme, že také pro $x \geq 0$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|y|}\mathrm{e}^{-\beta|x-y|}\mathrm{d}y = \frac{2}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\mathrm{e}^{-\beta|x|} - \beta\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right).$$

Výrazem na pravé straně této rovnosti je tedy dána hodnota konvoluce funkcí f a g. ■

Fourierův obraz konvoluce funkcí f, g je

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f*g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V tomto dvojném integrálu budeme transformovat proměnné tak, že položíme $x = z + y$, $y = y$. Jacobián tohoto zobrazení je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dále $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}$, tedy

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}\mathrm{d}z\right) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

To znamená, že

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}, \tag{A.3}$$

Fourierova transformace převádí konvoluci funkcí na jejich součin.

A.3 Okrajové úlohy pro obyčejné lineární rovnice druhého řádu

A.3.1 Formulace úloh

Označme $C^k(0,\ell)$ množinu funkcí k-krát diferencovatelných na $(0,\ell)$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Diferenciální operátor

Buďte $a, b, c \in C^0(0,\ell)$ a $a(x) \neq 0$ pro $x \in (0,\ell)$. *Lineární diferenciální operátor druhého řádu* $L = L(a,b,c) : C^2(0,\ell) \to C^0(0,\ell)$ definujeme předpisem

$$Ly(x) \;=\; a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,.$$

Rovnice

$$Ly = g,$$

kde $g \in C^0(0,\ell)$ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu; v případě $g \equiv 0$ homogenní, v opačném nehomogenní.

Buďte $p \in C^1(0,\ell)$, $q \in C^0(0,\ell)$. Pak operátor $L(-p,-p',q)$ daný vztahem

$$L(-p,-p',q)y(x) \;=\; -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x)$$

nazveme *samoadjungovaný*. Každý lineární diferenciální operátor druhého řádu $L(a,b,c)$, pro jehož koeficienty a, b platí

$$b(x) = a'(x), \quad x \in (0,\ell)$$

je samoadjungovaný. Rovnice

$$-\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)$$

se nazývá *samoadjungovaná* nebo *Sturmova-Liouvilleova* rovnice.

Tvrzení 6. Každou lineární diferenciální rovnici s koeficientem $a \in C^1(0,\ell)$ lze vyjádřit v samoadjungovaném tvaru.

Důkaz: Buď

$$h(x) \;=\; \int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\,, \quad \varrho(x) \;=\; \mathrm{e}^{h(x)}\,.$$

Pak

$$(\varrho(x)a(x))' = \Big(\mathrm{e}^{h(x)}a(x)\Big)' = \mathrm{e}^{h(x)}h'(x)a(x) + \mathrm{e}^{h(x)}a'(x) =$$
$$= \varrho(x)\frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}a(x) + \varrho(x)a'(x) = \varrho(x)b(x),$$

tedy

$$\varrho(x)a(x)y''(x) + \varrho(x)b(x)y'(x) + \varrho(x)c(x)y(x) = \varrho(x)g(x)$$

je samoadjungovaná rovnice, $p = -\varrho a$, $q = \varrho c$, $f = \varrho g$. □

Okrajové podmínky

Budeme hledat řešení rovnice

$$Ly(x) = f(x),$$

na intervalu $(0,\ell)$, které splňuje některé z následujících podmínek.

- *Dirichletovy podmínky*:

$$y(0) = y_0, \qquad y(\ell) = y_1.$$

- *Neumannovy podmínky*:

$$y'(0) = y_0, \qquad y'(\ell) = y_1.$$

- *Newtonovy podmínky*:

$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = y_0, \qquad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) = y_1,$$

  přičemž $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \neq \alpha_1^2 + \beta_1^2$.

- *Podmínky omezenosti*:

$$y(x) \text{ je omezená pro } x \to 0+, \qquad y(x) \text{ je omezená pro } x \to \ell - .$$

  U podmínek omezenosti můžeme připustit $\ell = \infty$ a jako levý okraj použít $-\infty$, nikoliv 0.

- *Podmínky periodičnosti (periodické podmínky)*:

$$y(x) = y(x + \ell) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R};$$

  Řešení rovnice v tomto případě hledáme na celé reálné ose.

Dirichletovy podmínky jsou zvláštním případem podmínek Newtonových pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$; Neumannovy podmínky jsou zvláštním případem Newtonových podmínek pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

Podmínky různého typu lze kombinovat; můžeme například požadovat splnění Neumanovy podmínky v levém krajním bodě a podmínky omezenosti v pravém krajním bodě.

Jakoukoliv okrajovou podmínku nazveme *homogenní*, jestliže s libovolnými dvěma funkcemi y_1, y_2, které této podmínce vyhovují, vyhovuje téže podmínce i jejich libovolná lineární kombinace $k_1 y_1 + k_2 y_2$.

Newtonovy podmínky s $y_0 = y_1 = 0$, podmínky periodičnosti i podmínky omezenosti s $y_1 = 0$ nebo $y_0 = 0$ jsou homogenní.

Okrajová úloha, v níž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní se nazývá *homogenní okrajová úloha*, v opačném případě *nehomogenní okrajová úloha*.

Symetrický diferenciální operátor

Řekneme, že *operátor L je symetrický na množině $M \subseteq C^2(0, \ell)$*, jestliže pro všechny $u, v \in M$ platí

$$\int_0^\ell Lu(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^\ell u(x)Lv(x)\mathrm{d}x .$$

Buď $L = L(-p, -p', q)$ samoadjungovaný operátor. Pak platí (s využitím integrace „per partes“)

$$\int_0^\ell Lu(x)v(x)\mathrm{d}x - \int_0^\ell u(x)Lv(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\ell \Big[\Big(-\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x)\Big)v(x) - u(x)\Big(-\big(p(x)v'(x)\big)' + q(x)v(x)\Big)\Big]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\ell \Big[\big(p(x)v'(x)\big)'u(x) - \big(p(x)u'(x)\big)'v(x)\Big]\,\mathrm{d}x =$$

$$= [p(x)v'(x)u(x)]_0^\ell - \int_0^\ell p(x)v'(x)u'(x)\mathrm{d}x - [p(x)u'(x)v(x)]_0^\ell + \int_0^\ell p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= p(\ell)v'(\ell)u(\ell) - p(0)v'(0)u(0) - p(\ell)u'(\ell)v(\ell) + p(0)u'(0)v(0) =$$

$$= p(\ell)\big(v'(\ell)u(\ell) - u'(\ell)v(\ell)\big) - p(0)\big(v'(0)u(0) - u'(0)v(0)\big).$$

- Samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině funkcí, které splňují homogenní Newtonovy podmínky.
  Důkaz: Je-li $\beta_0 \neq 0$, pak $u'(0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}u(0), v'(0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}v(0)$, takže $v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = 0$.
  Je-li $\alpha_0 \neq 0$, pak $u(0) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}u'(0), v(0) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}v'(0)$, takže opět $v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = 0$.
  Analogicky ověříme, že $v'(\ell)u(\ell) - u'(\ell)v(\ell) = 0$. □

- Pokud funkce p je ℓ-periodická, pak samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině ℓ-periodických funkcí.

A.3.2 Homogenní okrajová úloha s parametrem

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvažujme homogenní okrajovou úlohu pro rovnici

$$Lv(x) = \lambda v(x).$$

Tato úloha má vždy *triviální řešení* $v \equiv 0$. Pokud existuje netriviální řešení $v = v(x)$, nazveme ho *vlastní funkcí okrajové úlohy* a parametr λ nazveme *vlastním číslem operátoru* L.

Je-li λ vlastní číslo operátoru L a $v = v(x)$ je příslušná vlastní funkce uvažované okrajové úlohy, pak také funkce cv je pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ vlastní funkcí.

Jestliže vlastnímu číslu λ odpovídá k lineárně nezávislých vlastních funkcí, řekneme, že λ je *k-násobné vlastní číslo.*

Tvrzení 7. Označme M_L množinu funkcí splňujících příslušné homogenní okrajové podmínky. Je-li operátor L symetrický na množině M_L a $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou jeho dvě vlastní čísla, pak odpovídající vlastní funkce jsou ortogonální v prostoru $\mathcal{L}^2(0, \ell)$.

Důkaz:

$$\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell \lambda_1 v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell Lv_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell v_1(x)Lv_2(x)\mathrm{d}x = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x.$$

Kdyby $\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \neq 0$ pak by $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$, což by byl spor. □

Příklady:

Uvažujme samoadjungovaný operátor $L = L(-a^2, 0, 0)$, kde a je nějaká nenulová konstanta. Rovnici

$$-a^2 y''(x) = \lambda y(x) \tag{A.4}$$

můžeme přepsat na tvar

$$y''(x) + \frac{\lambda}{a^2} y(x) = 0.$$

Řešení této homogenní lineární rovnice druhého řádu závisí na znaménku parametru λ. Obecné řešení rovnice je dáno vztahem

$$y(x) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|} x\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|} x\right), & \lambda < 0, \\ Ax + B, & \lambda = 0, \\ A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} x + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} x, & \lambda > 0, \end{cases}$$

kde A, B jsou nějaké konstanty.

1) Hledáme řešení rovnice (A.4) na intervalu $(0, \ell)$, které splňuje Dirichletovy homogenní okrajové podmínky

$$y(0) = 0 = y(\ell).$$

Je-li $\lambda = 0$, pak má platit

$$y(0) = 0 = B, \quad y(\ell) = 0 = A\ell + B,$$

takže $B = 0$ a v důsledku toho také $A = 0$ a rovnice má pouze triviální řešení.

Je-li $\lambda < 0$, pak má platit

$$y(0) = 0 = A + B, \quad \text{tj. } B = -A, \qquad y(\ell) = 0 = Ae^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}\ell} - Ae^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}\ell} = 2A \sinh \frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}\ell;$$

pro $-\lambda > 0$ je však $\sinh \frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}\ell > 0$ a z toho plyne, že $A = 0$. Rovnice (A.4) má opět pouze triviální řešení.

Je-li $\lambda > 0$, pak má platit

$$y(0) = 0 = A, \qquad y(\ell) = 0 = B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell.$$

Odtud plyne, že $\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, tedy $\lambda = \left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$, neboť $\lambda > 0$.

Vlastní čísla operátoru $L(-a^2, 0, 0)$ s homogenními Dirichletovými podmínkami na intervalu $(0, \ell)$ a příslušné vlastní funkce jsou

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin \frac{k\pi|a|}{\ell} x, \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

2) Nyní hledáme řešení rovnice (A.4) na $\mathbb{R}$, které splňuje podmínky periodičnosti

$$y(x) = y(x + \ell).$$

Je-li $\lambda < 0$, pak je řešení $y(x)$ je monotonní; konkrétně rostoucí pro $A > 0$ nebo $A = 0$, $B < 0$, klesající pro $A < 0$ nebo $A = 0$, $B > 0$ a konstantní nulové pro $A = B = 0$. Úloha má tedy pouze triviální řešení.

Pro $\lambda = 0$ má rovnice řešení $y(x) = Ax + B$, které je periodické a netriviální pouze pro $A = 0$, $B \neq 0$. První vlastní číslo tedy je $\lambda_0 = 0$ a příslušná vlastní funkce v_0 je nenulová konstanta.

Pro $\lambda > 0$ má rovnice řešení $y(x) = A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$ které má splňovat podmínku

$$\begin{aligned}
&A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x = A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}(x+\ell) + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}(x+\ell) = \\
&= A\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x\,\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell - \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x\,\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell\right) + B\left(\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x\,\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x\,\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell\right) = \\
&\qquad = \left(A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell\right)\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + \left(-A\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + B\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell\right)\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x.
\end{aligned}$$

Poněvadž funkce $\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$ a $\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$ jsou nezávislé, plyne odtud

$$A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = A, \qquad -A\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell + B\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = B,$$

neboli

$$\begin{aligned}
\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell - 1\right)A + \left(\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell\right)B &= 0, \\
\left(-\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell\right)A + \left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell - 1\right)B &= 0.
\end{aligned}$$

Tato homogenní soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé A, B má nenulové řešení právě tehdy, když determinant její matice je nulový, tj. právě tehdy, když

$$\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell\right)^2 = 0.$$

Tato rovnost je splněna právě tehdy, když $\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = 1$ a $\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = 0$, což znamená, že $\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}\ell = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Celkem tedy vlastní čísla operátoru $L(-a^2, 0, 0)$ s podmínkami periodičnosti a příslušné vlastní funkce jsou

$$\lambda_0 = 0, \quad v_0(x) = const \neq 0,$$

$$\lambda_k = \left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2, \quad v_k(x) = \cos\frac{2k\pi}{\ell}x,\ \tilde{v}_k(x) = \sin\frac{2k\pi}{\ell}x, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Kladná vlastní čísla jsou tedy dvojnásobná.

3) Nakonec najdeme řešení rovnice (A.4) na $(0, \infty)$, které splňuje podmínky omezenosti

$$y(x) \text{ je omezená pro } x \to 0+ \text{ a pro } x \to \infty\,.$$

Je-li $\lambda < 0$, pak

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \begin{cases} \infty, & A \neq 0, \\ 0, & A = 0. \end{cases}$$

V tomto případě tedy všechna záporná čísla λ_- jsou vlastními čísly a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_-(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{-\lambda_-}}{|a|}x}.$$

Podobně pro $\lambda = 0$ je

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \begin{cases} \infty, & A \neq 0, \\ B, & A = 0. \end{cases}$$

Číslo $\lambda_0 = 0$ je vlastním číslem a příslušná vlastní funkce je

$$v_0(x) = const \neq 0.$$

Pro $\lambda > 0$ jsou všechna řešení omezená, takže jakékoliv kladné číslo λ_+ je vlastním číslem a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_+(x) = \cos \frac{\sqrt{\lambda_+}}{|a|} x, \qquad \tilde{v}_+(x) = \sin \frac{\sqrt{\lambda_+}}{|a|} x.$$

■

Sturmova-Liouvilleova úloha

$$\begin{aligned} &-\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = \lambda y(x), \qquad x \in (0,\ell), \\ &\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

Věta 2. *Platí následující tvrzení:*

- *Sturmova-Liouvilleova úloha má nekonečně mnoho vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, pro která platí*

$$\min\{q(x) : x \in [0,l]\} \ \leq \ \lambda_1 \ < \ \lambda_2 \ < \ \cdots ; \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n \ = \ \infty .$$

- *Každému vlastnímu číslu Sturmovy-Liouvilleovy úlohy přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce.*

- *Vlastní funkce $v_n = v_n(x)$ odpovídající vlastnímu číslu λ_n má v intervalu $(0,\ell)$ právě $n-1$ nulových bodů. Mezi každými dvěma sousedními nulovými body vlastní funkce v_n leží právě jeden nulový bod vlastní funkce v_{n+1}. Zejména vlastní funkce v_1 nemění znaménko na intervalu $(0,\ell)$.*

- *Posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ normovaných vlastních funkcí Sturmovy-Liouvilleovy úlohy tvoří úplnou ortonormální posloupnost na $[0,\ell]$. Tj. je-li funkce $f \in \mathcal{L}^2(0,\ell)$, pak Fourierova řada funkce f vzhledem k ortonormální posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f podle středu (konvergence v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\ell)$). Je-li funkce f navíc spojitá a splňuje homogenní okrajové podmínky, je tato konvergence stejnoměrná.*

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 1995, str. 158–163. Důkaz je tam proveden pro případ $p \equiv 1$. □

Tvrzení jsou ilustrována předchozím příkladem.

A.3.3 Řešení nehomogenní okrajové úlohy

Budeme hledat řešení nehomogenní rovnice v samoadjungovaném tvaru s homogenními Newtonovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} &Ly(x) \ \equiv \ -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,\ell), \\ &\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

Fourierova metoda

- Najdeme posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a ortogonální posloupnost příslušných vlastních funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ Sturmovy-Liouvilleovy úlohy, tj. rostoucí posloupnost čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, které splňují:

$$Lv_n(x) = \lambda_n v_n(x),$$

$$\alpha_0 v_n(0) + \beta_0 v_n'(0) = 0 = \alpha_1 v_n(\ell) + \beta_1 v_n'(\ell).$$

- Funkci f vyjádříme ve tvaru Fourierovy řady vzhledem k orthogonálnímu systému vlastních funkcí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad \text{kde} \quad d_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^l f(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

- Řešení úlohy hledáme také ve tvaru Fourierovy řady

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x).$$

Musí tedy platit

$$Ly(x) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n L v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x),$$

takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x).$$

z čehož podle věty o jednoznačnosti Fourierovy řady plyne

$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

pokud všechna vlastní čísla jsou nenulová.
Hledané řešení tedy je

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_0^{\ell} f(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_0^{\ell} \left(f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \right) \mathrm{d}\xi.$$

Označíme-li

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2},$$

lze řešení zapsat ve tvaru integrálu

$$y(x) = \int_0^{\ell} f(\xi) G(x, \xi) \mathrm{d}\xi.$$

Metoda variace konstant

- Najdeme řešení u, v dvou pomocných homogenních úloh s jednou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} Lu &= -\left(pu'\right)' + qu = 0, & \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) &= 0, \\ Lv &= -\left(pv'\right)' + qv = 0, & \alpha_1 v(\ell) + \beta_1 v'(\ell) &= 0. \end{aligned}$$

  Funkce $u,\ v$ nejsou určeny jednoznačně. Vezmeme ty, které jsou lineárně nezávislé.

- Pro Wronskián $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$ funkcí $u,\ v$ platí $p(x)W(x) \equiv K$, kde K je nenulová konstanta, neboť

$$\begin{aligned} (pW)' = \big(p(uv' - u'v)\big)' &= p'uv' + pu'v' + puv'' - p'u'v\ - pu''v - pu'v' = \\ &= (pv'' + p'v')u - (pu'' + p'u')v = \left(pv'\right)' u - \left(pu'\right)' v\ = qvu - quv = 0, \end{aligned}$$

  kdyby $K = 0$, pak by $W \equiv 0$, což by byl spor s lineární nezávislostí.

- Řešení nehomogenní úlohy hledáme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)u(x) + c_2(x)v(x).$$

  Funkce y má být řešením dané nehomogenní rovnice, takže musí platit

$$\begin{aligned} f &= L(c_1 u + c_2 v) = -\big(p(c_1 u)'\big)' + qc_1 u - \big(p(c_2 v)'\big)' + qc_2 v = \\ &= -p\left(c_1'' u + 2c_1' u' + c_1 u''\right) - p'\left(c_1' u + c_1 u'\right) + qc_1 u - \\ &\qquad - p\left(c_2'' v + 2c_2' v' + c_2 v''\right) - p'\left(c_2' v + c_2 v'\right) + qc_2 v = \\ &= c_1\left(-pu'' - p'u' + qu\right) - pc_1' u' - p\left(c_1'' u + c_1' u'\right) - p' c_1' u + \\ &\qquad c_2\left(-pv'' - p'v' + qv\right) - pc_2' v' - p\left(c_2'' v + c_2' v'\right) - p' c_2' v = \\ &= c_1 Lu - pc_1' u' - \big(p(c_1' u)\big)' + c_2 Lv - pc_2' v' - \big(p(c_2' v)\big)' = \\ &= -p(c_1' u' + c_2' v') - \big(p(c_1' u + c_2' v)\big)'. \end{aligned}$$

  Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když funkce c_1, c_2 splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x)u(x) + c_2'(x)v(x) &= 0, \\ c_1'(x)u'(x) + c_2'(x)v'(x) &= -\frac{f(x)}{p(x)}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

  Platí tedy

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & v(x) \\ -\dfrac{f(x)}{p(x)} & v'(x) \end{vmatrix} = \frac{f(x)v(x)}{K}, \\ c_2'(x) &= \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} u(x) & 0 \\ u'(x) & -\dfrac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)u(x)}{K}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

- Funkce $y(x)$ má splňovat okrajové podmínky, tj.

$$\begin{aligned} \alpha_0\left[c_1(0)u(0) + c_2(0)v(0)\right] + \beta_0\left[c_1'(0)u(0) + c_1(0)u'(0) + c_2'(0)v(0) + c_2(0)v'(0)\right] &= 0 \\ \alpha_1\left[c_1(\ell)u(\ell) + c_2(\ell)v(\ell)\right] + \beta_1\left[c_1'(\ell)u(\ell) + c_1(\ell)u'(\ell) + c_2'(\ell)v(\ell) + c_2(\ell)v'(\ell)\right] &= 0, \end{aligned}$$

  po úpravě s využitím (A.5)

$$\begin{aligned} c_1(0)\big(\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0)\big) + c_2(0)\big(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)\big) &= 0, \\ c_1(\ell)\big(\alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)\big) + c_2(\ell)\big(\alpha_1 v(\ell) + \beta_1 v'(\ell)\big) &= 0; \end{aligned}$$

každá z funkcí splňuje jednu okrajovou podmínku, tedy

$$\begin{aligned} c_2(0)\big(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)\big) &= 0\,, \\ c_1(\ell)\big(\alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)\big) &= 0\,, \end{aligned}$$

takže

$$c_1(\ell) = 0\,, \quad c_2(0) = 0\,. \tag{A.7}$$

- Funkce $c_1,\ c_2$ jsou řešením rovnic (A.6) s počátečními podmínkami (A.7) a jsou tedy dány výrazy

$$c_1(x) = \frac{1}{K}\int_{\ell}^{x} f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi\,, \qquad c_2(x) = -\frac{1}{K}\int_{0}^{x} f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

- Řešení úlohy je

$$y(x) = -\frac{u(x)}{K}\int_{x}^{\ell} f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{v(x)}{K}\int_{0}^{x} f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Označíme-li

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{u(x)v(\xi)}{K}, & 0 \le x < \xi \le \ell \\ -\dfrac{v(x)u(\xi)}{K}, & 0 \le \xi < x \le \ell \end{cases},$$

lze řešení zapsat ve tvaru jediného integrálu

$$y(x) = \int_{0}^{\ell} f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Greenova funkce

Funkci $G : [0,\ell]\times[0,\ell] \to \mathbb{R}$ nazveme *Greenovou funkcí homogenní okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} Ly(x) \equiv -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0,\ell), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

kde $p(x) > 0$ pro $x \in [0,l]$, jestliže

(i) G je spojitá pro $x \in [0,\ell]\times[0,\ell]$,

(ii) G je symetrická, tj. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$,

(iii) pro každé $\xi \in [0,\ell]$ má funkce $G(\cdot,\xi)$ spojité derivace druhého řádu,

(iv) pro každé $\xi \in [0,\ell]$ je funkce $G(\cdot,\xi)$ řešením uvažované okrajové úlohy,

(v) $\lim\limits_{x\to\xi+} G_x(x,\xi) - \lim\limits_{x\to\xi-} G_x(x,\xi) = -\dfrac{1}{p(\xi)}$ pro $\xi \in (0,\ell)$.

Věta 3. *Má-li uvažovaná homogenní okrajová úloha jen triviální řešení $y \equiv 0$ a jsou-li funkce $p \in C^1(0,\ell),\ q \in C^2(0,\ell)$, existuje právě jedna její Greenova funkce. Nehomogenní okrajová úloha*

$$\begin{aligned} Ly(x) \equiv -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,\ell), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

má pak jediné řešení tvaru

$$y(x) \;=\; \int\limits_0^{\ell} f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Důkaz: Viz I. Kiguradze: *Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic.* MU, Brno 1997, str. 82. Důkaz je proveden pro mnohem obecnější situaci. □

Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} Ly(x) \;&\equiv\; -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,\ell),\\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= y_0, \qquad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) = y_1. \end{aligned}$$

Jestliže funkce $w = w(x)$ splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) \;=\; y_0, \qquad \alpha_1 w(\ell) + \beta_1 w'(\ell) = y_1$$

a funkce $u = u(x)$ je řešením úlohy

$$Lu(x) = f(x) - Lw(x)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = 0 = \alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell),$$

pak funkce

$$y(x) = u(x) + w(x)$$

je řešením uvažované úlohy, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem.

Funkci w je vhodné volit v co nejjednodušším tvaru, například polynom.

Cvičení

1. Vypočítejte první a druhou distributivní derivaci funkce $f(x) = |x|$.
2. Nechť H je Heavisidova funkce a položme $x_+ = xH(x)$, $x_- = -xH(-x)$. Vypočítejte distributivní derivace těchto funkcí.
3. Určete distribuci $x^n\delta^{(n)}(x)$, tj. upravte výraz tak, aby se v něm objevovala Diracova distribuce v první mocnině.
4. Najděte Fourierův obraz (spektrum) funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-cx^2}$, kde c je kladná konstanta.
5. Vypočítejte konvoluci funkcí $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $g(x) = \mathrm{e}^{-bx^2}$, kde a, b jsou kladné konstanty.

Řešte okrajové úlohy

6. $-y'' - \dfrac{2}{x}y' = 0,\ x \in (0,1);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to 0_+$.
7. $-\big(x^2y'\big)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$
8. $-\left(xy'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to \infty$.
9. $-xy'' - y' = 0,\ x \in (1,2);\ y(1) = y_1,\ y(2) = 0.$

10. $-x^2y'' - xy' + k^2y = 0,\ x \in (0,\ell);\ y(\ell) = 1$, y je omezená pro $x \to 0_+$; k je parametr.

11. $-xy'' - y' = -x,\ x \in (0,\ell);\ y(0) = y(\ell) = 0.$

12. $-y'' = \sin x,\ x \in (0, 2\pi);\ y'(0) = y'(2\pi) = 0.$

Najděte vlastní funkce okrajových úloh a vlastní čísla příslušných operátorů

13. $-v'' = \lambda v,\ x \in (0,\ell);\ v'(0) = v'(\ell) = 0.$

14. $-v'' = \lambda v,\ x \in \mathbb{R};\ v(x) = v(x + 2\pi).$

15. $-v'' + qv = \lambda v,\ x \in (0,\ell);\ v'(0) = 0,\ v(\ell) = 0;$ q je parametr.

Řešte okrajové úlohy

16. $-y'' - \omega^2 y = f(x),\ x \in (0,\ell);\ y(0) = y(\ell) = 0;$ ω je parametr.

17. $-y'' - 3y = \dfrac{\pi - x}{2},\ x \in (0,\pi);\ y(0) = y(\pi) = 0.$

18. Najděte Greenovu funkci úlohy $-y'' + y = 0,\ y(0) = y(1) = 0.$

Výsledky:

1. $\operatorname{sgn} x$, $2\delta(x)$
2. $x'_+ = H(x)$, $x'_- = -H(-x)$
3. $(-1)^n n!\delta(x)$
4. $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{c}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4c}\right)$; návod: ukažte, že $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{f}(\xi) = -\dfrac{\xi}{2c}\hat{f}(\xi)$
5. $\sqrt{\dfrac{\pi}{a+b}}\exp\left(-\dfrac{ab}{a+b}x^2\right)$
6. $y(x) = y_0$
7. $y(x) = \frac{y_0}{x}$
8. $y(x) = y_0$
9. $y(x) = y_1 \frac{\ln 2 - \ln x}{\ln 2}$
10. $y(x) = \left(\frac{x}{\ell}\right)^{|k|}$
11. nemá řešení
12. $y(x) = \sin x - x + C$, C je libovolná konstanta
13. $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $v_n(x) = \cos\frac{n\pi}{\ell}x,\ n = 0, 1, 2, \ldots$
14. $\lambda_n = n^2$, $v_n(x) = C_n \cos nx + D_n \sin nx$, C_n, D_n jsou libovolné konstanty, $C_0 \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
15. $\lambda_n = q + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$, $v_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x.$
16. $y(x) = B\sin\frac{k\pi}{\ell}x + \frac{1}{\omega}\int_0^x f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}(\xi - x)\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega\ell}{\pi} = k \in \mathbb{N}$ a $\int_0^\ell f(\xi)\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi = 0$, B je libovolná konstanta;
    $y(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi - \frac{\sin\omega x}{\omega\sin\omega\ell}\int_0^\ell f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi = 2\ell\int_0^x f(\xi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\sin\frac{k\pi}{\ell}x}{k^2\pi^2 - \omega^2\ell^2}\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega\ell}{\pi} \notin \mathbb{N}$
17. $y(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k^2-3)} = \frac{\pi}{6}\left(\cos\sqrt{3}x - \operatorname{cotg}\sqrt{3}\pi\ \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{6}(x - \pi)$
18. $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\sinh(1-x)\sinh\xi}{\sinh 1}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ \frac{\sinh x\sinh(1-\xi)}{\sinh 1}, & 0 \le x < \xi \le 1 \end{cases}$