LINEÁRNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU

2.0

NECHŤ I JE LIBOVOLNÝ INTERVAL. NECHŤ $g, h : I \to \mathbb{R}$ JSOU SPOJITÉ FUNKCE. BUDEME UVAŽOVAT DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$x'' + g(t)x = 0, \qquad (1)$$

$$y'' + g(t)\,y = h(t). \qquad (2)$$

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

VĚTA: NECHŤ $t_0 \in I$ A $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ JSOU LIBOVOLNÉ. PAK POČÁTEČNÍ PROBLÉM

$$y'' + g(t)y = h(t), \quad y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = y_0'$$

MÁ PRÁVĚ 1 ŘEŠENÍ NA CELÉM INTERVALU I.

VĚTA (PRINCIP SUPERPOZICE). JSOU-LI u, v ŘEŠENÍ ROVNICE (1) A $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, PAK JE TAKÉ $c_1 u + c_2 v$ ŘEŠENÍM (1). JE-LI y_1 ŘEŠENÍM (2), PAK JE y_2 ŘEŠENÍM (2), PRÁVĚ KDYŽ JE $y = y_1 - y_2$ ŘEŠENÍM (1).

VĚTA: JSOU-LI u, v ŘEŠENÍ (1), PAK JEJICH WRONSKIÁN $w := uv' - u'v$ MÁ NA I KONSTANTNÍ HODNOTU.

VĚTA: JE-LI u ŘEŠENÍM (1), $u(t) \neq 0$ PRO $t \in I_1 \subseteq I$, PAK FUNKCE

$$v(t) := u(t) \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{u^2(s)},$$

KDE $t_0 \in I_1$, JE ŘEŠENÍM (1) NA I_1, KTERÉ JE NAVÍC LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ S u.

VĚTA: NECHŤ u, v JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ ŘEŠENÍ ROVNICE (1) A $w \neq 0$ JEJICH WRONSKIÁN. POTOM FUNKCE

$$z(t) = w^{-1} \int_{t_0}^{t} [u(s)v(t) - u(t)v(s)] h(s)\, ds$$

JE ŘEŠENÍM (2) SPLŇUJÍCÍM $z(t_0) = z'(t_0) = 0$.

OBECNÉ ŘEŠENÍ (2) JE ~~TVARU~~ PROTO VE TVARU

$$y = C_1 u + C_2 v + z, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

VĚTA (GREENOVA): NECHŤ u, v JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ ŘEŠENÍ (1) NA JISTÉM INTERVALU $[a,b]$, $w \neq 0$ JE JEJICH WRONSKIÁN A $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ JSOU TAKOVÁ, ŽE

$$|d_1| + |d_2| \neq 0, \quad |d_3| + |d_4| \neq 0$$

A ŽE

$$d_1 u(a) + d_2 u'(a) = 0, \quad d_3 v(b) + d_4 v'(b) = 0.$$

PAK JE FUNKCE

$$y(t) := \int_a^b G(t,s)\, h(s)\, ds,$$

KDE G JE GREENOVA FUNKCE

$$G(t,s) := \begin{cases} w^{-1} v(t) u(s), & s \in [a,t]; \\ w^{-1} u(t) v(s) & s \in [t,b], \end{cases}$$

ŘEŠENÍM (2) SPLŇUJÍCÍM

(3) $\quad d_1 y(a) + d_2 y'(a) = 0, \quad d_3 y(b) + d_4 y'(b) = 0.$

POZNÁMKA: TZV. OKRAJOVÉ PODMÍNKY (3) SE ČASTO ZAPISUJÍ V EKVIVALENTNÍM TVARU

$$y(a)\cos\alpha - y'(a)\sin\alpha = 0, \quad y(b)\cos\beta - y'(b)\sin\beta = 0,$$

KDY SE MŮŽE VYNECHAT POŽADAVEK $|d_1| + |d_2| \neq 0$, $|d_3| + |d_4| \neq 0$.

STURMOVA VĚTA

NECHŤ q, Q JSOU SPOJITÉ FUNKCE NA INTERVALU $[a,b)$. BUDEME UVAŽOVAT ROVNICE

$$x'' + q(t)x = 0, \qquad (4)$$

$$y'' + Q(t)y = 0. \qquad (5)$$

VĚTA (STURMOVA): NECHŤ JE

$$q(t) \leq Q(t), \quad t \in [a,b).$$

NECHŤ MÁ ŘEŠENÍ x ROVNICE (4) NA INTERVALU (a,b) PRÁVĚ n NULOVÝCH BODŮ $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ A NECHŤ JE y NENULOVÉ ŘEŠENÍ (5). JE-LI

$$\frac{y'(a)}{y(a)} < \frac{x'(a)}{x(a)}$$

NEBO

$$\frac{y'(a)}{y(a)} = \frac{x'(a)}{x(a)}, \text{ A } q \not\equiv Q \text{ NA } (a, t_n),$$

TAK MÁ y ALESPOŇ n NULOVÝCH BODŮ NA INTERVALU (a, t_n). (POZNÁMKA: JE-LI $x(a)=0$ NEBO $y(a)=0$, UVAŽOVANÉ PODÍLY SE NAHRAZUJÍ ZA $+\infty$.

DŮSLEDEK: NECHŤ JE

$$q(t) \le Q(t), \quad t \in (a, b].$$

NECHŤ JSOU $t_1 < t_2$ SOUSEDNÍ NULOVÉ BODY ŘEŠENÍ x ROVNICE (4), ~~K TAK~~ PŘIČEMŽ $t_1, t_2 \in (a, b]$. PAK MÁ KAŽDÉ ŘEŠENÍ y ROVNICE (5) ALESPOŇ 1 NULOVÝ BOD V INTERVALU $(t_1, t_2]$. ZVLÁŠTĚ SE TAK NULOVÉ BODY KAŽDÝCH 2 LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH ŘEŠENÍ ROVNICE (4) VZÁJEMNĚ ODDĚLUJÍ.

STURMŮV-LIOUVILLEŮV PROBLÉM

NECHŤ q JE SPOJITÁ FUNKCE NA $[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ JE PARAMETR A $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ SPLŇUJÍ $0 \leq \alpha < \pi$, $0 < \beta \leq \pi$.

BUDEME UVAŽOVAT OKRAJOVÝ PROBLÉM

$$
\begin{aligned}
&x'' + (q(t)+\lambda)x = 0, \\
&x(a)\cos\alpha - x'(a)\sin\alpha = 0, \qquad (6) \\
&x(b)\cos\beta - x'(b)\sin\beta = 0.
\end{aligned}
$$

VĚTA: EXISTUJE NEOHRANIČENÁ POSLOUPNOST ČÍSEL λ_n PRO $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ TAKOVÁ, ŽE PROBLÉM (6) MÁ NENULOVÉ ŘEŠENÍ, PRÁVĚ KDYŽ $\lambda = \lambda_n$. ODPOVÍDAJÍCÍ ŘEŠENÍ x_n JE URČENO JEDNOZNAČNĚ AŽ NA MULTIPLIKATIVNÍ KONSTANTU A MÁ PRÁVĚ n NULOVÝCH BODŮ NA INTERVALU (a,b).

DEFINICE: ČÍSLA λ_n PRO $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ SE NAZÝVAJÍ VLASTNÍ HODNOTY A ŘEŠENÍ x_n VLASTNÍ FUNKCE PROBLÉMU (6).

VĚTA: NECHŤ x_n, x_m JSOU ~~ŘEŠ~~ ŘEŠENÍ (6) ODPOVÍDAJÍCÍ VLASTNÍM HODNOTÁM λ_n, λ_m. JE-LI $m \neq n$, PLATÍ

$$\int_a^b x_n(t)\, x_m(t)\, dt = 0.$$

VĚTA: PRO KAŽDÉ λ, KTERÉ NENÍ VLASTNÍ HODNOTOU (6), EXISTUJE PRÁVĚ 1 ŘEŠENÍ PROBLÉMU

$$\begin{aligned} &y'' + [q(t) + \lambda] y = h(t), \\ &y(a)\cos\alpha - y'(a)\sin\alpha = 0, \\ &y(b)\cos\beta - y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

PRO KAŽDOU FUNKCI h SPOJITOU NA $[a,b]$. TOTO ŘEŠENÍ JE DÁNO VZORCEM

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)\, h(s)\, ds,$$

KDE G JE GREENOVA FUNKCE (DEFINOVANÁ DÁLE).

VĚTA: JE-LI $\lambda = \lambda_n$ PRO JISTÉ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ A FUNKCE h JE SPOJITÁ NA $[a,b]$, MÁ PROBLÉM (7) ŘEŠENÍ, PRÁVĚ KDYŽ JE

NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

$$\int_a^b x_n(t)\, h(t)\, dt = 0,$$

KDE x_n JE VLASTNÍ FUNKCE PRO λ_n.

V ~~TOMTO PŘÍPADĚ MÁ PROBLÉM (7) NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ~~. JE-LI y JEDNO ŘEŠENÍ (7), PAK KAŽDÉ DALŠÍ ŘEŠENÍ (7) LZE ~~ZAPSAT~~ VYJÁDŘIT VE TVARU $y + C x_n$, KDE C JE KONSTANTA.

OSCILATORIČNOST

NECHŤ $I = [t_0, \omega)$, KDE $t_0 < \omega \leq +\infty$.

DEFINICE: NENULOVÉ ŘEŠENÍ x ROVNICE (1) SE NAZÝVÁ OSCILUJÍCÍ, POKUD MÁ NA I NEKONEČNĚ MNOHO NULOVÝCH BODŮ. JINAK SE NAZÝVÁ NEOSCILUJÍCÍ.

POZNÁMKA: MÁ-LI ~~nenulové~~ nenulové ŘEŠENÍ x NEKONEČNĚ MNOHO NULOVÝCH BODŮ $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, PAK NUTNĚ $\lim_{n \to \infty} t_n = \omega$.

DEFINICE: ROVNICE (1) SE NAZÝVÁ OSCILATORICKÁ, POKUD MÁ OSCILUJÍCÍ ŘEŠENÍ, JINAK SE NAZÝVÁ NEOSCILATORICKÁ.

POZNÁMKA: ZE STURMOVY VĚTY PLYNE, ŽE JAKMILE ASPOŇ 1 ŘEŠENÍ JE OSCILUJÍCÍ, PAK JSOU OSCILUJÍCÍ VŠECHNA nenulová ŘEŠENÍ.

VĚTA: ROVNICE (1) JE OSCILATORICKÁ, PRÁVĚ KDYŽ EXISTUJÍ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ ŘEŠENÍ u, v, PRO KTERÁ

$$\int_{t_0}^{\omega} \frac{dt}{u^2(t) + v^2(t)} = \infty.$$

DŮSLEDEK: JE-LI $\langle t_0, \omega) = \infty$ A VŠECHNA ŘEŠENÍ ROVNICE (1) JSOU OHRANIČENÁ, PAK JE ROVNICE (1) OSCILATORICKÁ.

VĚTA: NECHŤ JSOU q, Q SPOJITÉ ~~NA I~~ FUNKCE NA I SPLŇUJÍCÍ $q(t) \leq Q(t)$, $t \in I$. JE-LI ROVNICE (4) OSCILATORICKÁ, POTOM JE OSCILATORICKÁ TAKÉ ROVNICE (5). JE-LI ROVNICE (5) NEOSCILATORICKÁ, POTOM JE ROVNICE (4) TAKÉ NEOSCILATORICKÁ.