1 Hry v normální formě

Hra v normální formě je trojice $G = (N, (X_i)_{i \in N}, (u_i))$ sestávající z

- množiny **hráčů** $N = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 2$,
- neprázdných množin **strategií** X_i,
- **výherních funkcí** $u_i : \prod_{i \in N} X_i \to \mathbb{R}$.

Prvky množiny $\prod_{i \in N} X_i$ nazýváme **situace**. Každá situace je tedy určena volbou jedné strategie každým z hráčů. Předpokládáme, že hráči vybírají strategie současně či bez znalosti volby ostatních hráčů. Dále předpokládáme úplnou informaci o hře, tj. všem hráčům jsou známy všechny výherní funkce u_i. Cílem každého hráče i je maximalizovat u_i. Neprázdnou podmnožinu $S \subseteq N$ nazýváme **koalice**.

Konvence: Je-li $x = (x_1, \dots, x_n)$ situace, $n-1$-tici $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ vzniklou vynecháním i-té složky označíme jako x_{-i}. Dvojicí $(\bar{x}_i, x_{-i})$ rozumíme situaci, kde do x_{-i} vložíme $\bar{x}_i$ na i-tou pozici. Jedná se tedy o situaci vzniklou z x nahrazením x_i za $\bar{x}_i$. Označme dále

$$X_S = \prod_{i \in S} X_i,$$

případně $X_{-i} = X_{N-\{i\}}$.

Strategie $x \in X_i$ **dominuje** strategii $\bar{x} \in X_i$, pokud

$$(\forall y \in X_{-j})\ u_i(x, y) \geq u_i(\bar{x}, y)$$

a alespoň pro jedno y je nerovnost ostrá. U **striktního dominování** jsou všechny nerovnosti ostré.

Hra s konstantním součtem:

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in X_N, j \in N)\ \sum_{i \in N} u_i(x) = c.$$

Hra s nulovým součtem je hra s konstantním součtem, kde $c = 0$.

Konvence: Ve hře dvou hráčů x_1, x_2, u_1, u_2 zapisujeme jako x, y, u, v.

Nechť $n = 2$.

Symetrická hra: $X = Y$ a

$$(\forall x, y \in X) u(x, y) = v(y, x).$$

(Výměna rolí dává stejnou hru.)

Antagonistická hra:

$$(\forall x, \bar{x} \in X, y, \bar{y} \in Y)(u(x, y) \leq u(\bar{x}, \bar{y}) \;\Leftrightarrow\; v(x, y) \geq v(\bar{x}, \bar{y})).$$

(Co je lepší pro jednoho, je horší pro druhého.)

Bimaticová hra: X, Y jsou konečné.

Maticová hra: Bimaticová s nulovým součtem.

Situace x **dominuje (podle Pareta)** situaci $\bar{x}$, pokud

$$(\forall i \in N) u_i(x) \geq u_i(\bar{x}_i)$$

a alespoň pro jedno i je nerovnost ostrá. (Žádný z hráčů si nepohorší a aspoň jeden si polepší.)

Situace x se nazývá **Nashova rovnováha**, pokud

$$(\forall i \in N, \bar{x}_i \in X_i) u_i(\bar{x}_i, x_{-i}) \leq u_i(x).$$

(Žádný hráč si změnou své strategie nepolepší.)

Strategií x_i si hráč i **zaručuje** výhru $\inf_{y \in X_{-i}} u(x, y)$. **Dolní hodnotou** rozumíme číslo $\sup_{x \in X} \inf_{y \in X_{-i}} u(x, y)$ (supremum hodnot, které si hráč zaručuje svými strategiemi). **Horní hodnotou** nazýváme číslo $\inf_{y \in X_{-i}} \sup_{x \in X} u(x, y)$. **Nejlepší protihra** pro $y \in X_{-i}$ je strategie $x \in X_i$, v níž nabývá $u(x, y)$ svého maxima.

1.1 Pravděpodobnostní rozšíření

Uvažujme X_i jako Hamelovy báze vektorových prostorů a nechť X_i^* zde označují konvexní obaly X_i. Tzn. každý prvek $x_i \in X_i^*$ lze jednoznačně psát jako

$$x_i = \alpha_{i1}x_{i1} + \ldots + \alpha_{ik_i}x_{ik_i}$$

pro $x_{ij} \in X_i, \alpha_{ij} \geq 0, \alpha_{i1} + \ldots + \alpha_{ik_i} = 1$. Položme pak

$$u_i^*(x) = \sum_{1\leq j_1 \leq k_1, \ldots, 1 \leq j_n \leq k_n} \alpha_{1j_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nj_n} u(x_{1j_1}, \ldots, x_{nj_n}).$$

Hru $G^* = (N, (X_i^*)_{i\in N}, (u_i^*)_{i\in N})$ nazýváme **pravděpodobnostním rozšířením hry** $G = (N, (X_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$. Strategie z X_i^* nazýváme **smíšené**, původní strategie **čisté** (extremální body v X_i).

Konvence: Jelikož u_i jsou zúženími u_i^*, nevadí když u_i^* budeme psát jako u_i.

Další možnosti: Spočetné kombinace (Schauderovy báze v Banachových prostorech), atd. Budeme se zabývat pravděpodobnostním rozšířením jen u konečných her, tak je to jedno.

1.2 Bimaticové hry

Výherní funkce se realizují pomocí matic A, B typu $X \times Y$, přičemž $u(x, y) = A_{xy}, v(x, y) = B_{xy}$.

- Strategie 1. hráče jsou řádky, strategie 2. hráče sloupce.
- Pareto optimální situace: maximální dvojice (x, y) v součinovém kvaziuspořádání $X \times Y$, kde X uspořádáváme podle u a Y podle v
- Nashova rovnováha: V A sloupcové maximum, v B řádkové maximum.
- Dolní hodnota: Maximum z řádkových minim.
- Horní hodnota: Minimum ze sloupcových maxim.

Konvence: $X = \{1, \dots, k\}, Y = \{1, \dots l\}$.

V pravděpodobnostním rozšíření lze strategie ztotožnit s vektory pravděpodobností $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), y = (\beta_1, \dots, \beta_l)$. Pak lze psát $u(x, y) = xAy^T, v(x, y) = xBy^T$.

Příklady ...

Věta 1. *(von Neumann) Pravděpodobnostní rozšíření každé maticové hry má rovnovážnou situaci.*

Důkaz. ... $\square$