Gymnázium F. X. Šaldy
PŘEDMĚTOVÁ KOMISE MATEMATIKY

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY

pro přípravu k maturitní zkoušce, k přijímacím zkouškám do vysokých škol a k práci v matematickém semináři

Honsoft • Liberec 2007 • Verze 1.0

Úvodní poznámka editora

V této *Sbírce úloh* jsou shromážděny úlohy, které typově odpovídají úlohám, jež se objeví v ústní části maturitní zkoušky z matematiky ve třídách, kde vyučuje Jan Voženílek. O jednotlivých částech a průběhu ústní maturitní zkoušky podrobně informuje dokument *Obecný popis uspořádání maturitní zkoušky z matematiky*; zde pouze připomeňme, že maturitní otázky budou konstruovány „napříč“ učebními celky, zatímco tato sbírka ve svém uspořádání (z praktických důvodů) tyto tradiční celky respektuje.

Před příklady je zařazen přehled důkazů matematických vět požadovaných v části zkoušky nazvané *Deduktivní výstavba matematiky.* Naopak v závěru jsou připojeny (typové) otázky k první (*Elementární úloha*) a druhé (*Úloha řešená obrazem*) části *Orientace.* Vedle této sbírky existují ještě další pomocné studijní materiály (např. přehled pojmů, obrázky ke zbývajícím dvěma částem orientace); vše je k dispozici na webu vyučujícího: `http://jan.gfxs.cz`.

Sbírka není „originálním matematicko-didaktickým dílem“, neboť je tvořena (někdy mírně upravenými) úlohami přejatými z různých sbírek maturitních příkladů vydaných v posledních šedesáti letech. Další příklady jsou čerpány z běžných středoškolských učebnic, z učebnic pro matematické třídy a z literatury k matematické olympiádě. Několik úloh (asi dva páry) se do sbírky „přestěhovalo“ z materiálů zkušené kolegyně M. Slezákové.

Pozorný čtenář si povšimne, že jsou zde obsaženy některé úlohy, které již zná z publikace *Sbírka úloh z matematiky pro matematickou část Matematicko-fysikálně-informatického semináře s podvečerní anglickou konverzací* vydané v červnu 2006 *Spolkem pro pořádání výjezdového semináře*; naopak některé úlohy (které se v semináři neosvědčily) byly vypuštěny.

Sbírka byla vysázena typografickým systémem $\mathcal{AMS}$-TEX. Editor děkuje slečnám Michaele Bučkové, Petře Drásalové a Petře Kulhánkové za přepsání částí některých úloh do elektronické podoby. V této první verzi sbírky budou (s pravděpodobností rovnou jedné) chyby tiskové i obsahové; editor prosí laskavé čtenáře, aby na ně upozornili.

-jvk-

V Liberci, v den sv. Silvestra 2006.

Deduktivní výstavba matematiky: Matematické věty

1. Vyslovte a dokažte větu o znaku dělitelnosti třemi resp. devíti.

2. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ není číslo racionální.

3. Vyslovte a dokažte větu o počtu prvočísel.

4. Uveďte a dokažte trojúhelníkové nerovnosti.

5. Vyslovte a dokažte větu o součtu vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku.

6. Vyslovte a dokažte větu o středovém a obvodovém úhlu.

7. Vyslovte a dokažte Euklidovy věty.

8. Vyslovte a dokažte Pýthagorovu větu a větu obrácenou.

9. Vyslovte a dokažte větu o logaritmu součinu.

10. Vyslovte a dokažte větu o převodu daného logaritmu na logaritmus o jiném základu.

11. Dokažte, že číslo $\log 7$ je iracionální.

12. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte goniometrické vzorce pro dvojnásobný argument.

13. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte goniometrické vzorce pro poloviční argument.

14. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte goniometrické vzorce pro převod výrazu $\sin x + \cos x$ na součin.

15. Vyslovte a dokažte sinovou větu.

16. Vyslovte a dokažte kosinovou větu.

17. Vyslovte a dokažte větu o vztahu poloměru kružnice opsané a sinu vnitřních úhlů trojúhelníku.

18. Vyslovte a dokažte větu o výpočtu obsahu trojúhelníka z délek jeho stran a z velikosti úhlu jimi sevřeného.

19. Vyslovte a dokažte větu o výpočtu obsahu trojúhelníku z poloměru kružnice vepsané.

20. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte Heronův vzorec.

21. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte vzorec pro objem komolého jehlanu.

22. Vyslovte větu o analytickém vyjádření tečny kružnice v daném bodě kružnice.

23. Vyslovte definici elipsy a ukažte, že všechny body náležící elipse podle této definice splňují tzv. rovnici elipsy.

24. Vyslovte definici paraboly (pomocí ohniska a řídící přímky) a ukažte, že všechny body náležící parabole podle této definice splňují tzv. rovnici paraboly.

25. Vyslovte a dokažte větu o součinu dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru.

26. Vyslovte a dokažte větu o podílu dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru.

27. Vyslovte jako matematické věty a dokažte vzorce o rozkladu dvojčlenů $a^2 \pm b^2$ resp. $a^3 \pm b^3$ v komplexním oboru.

28. Vyslovte a dokažte Moivreovu větu.

29. Vyslovte a dokažte větu o existenci a výpočtu řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v komplexním oboru.

30. Vyslovte a dokažte větu o existenci a výpočtu řešení kvadratické rovnice s komplexními koeficienty v komplexním oboru.

31. Vyslovte a dokažte větu o počtu k-členných kombinací z n prvků (bez opakování).

32. Vyslovte a dokažte binomickou větu.

33. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti.

Funkce a rovnice

101. Řešte v $\mathbf{R}^2$ soustavu rovnic $\begin{cases} x + (b-1)y = 1 \\ (b+1)x + 3y = -1 \end{cases}$ s parametrem $b \in \mathbf{R}$.

102. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $|x-2| - |x+2| = |a+2| - |a-2|$ s parametrem $a \in \mathbf{R}$; řešení znázorněte graficky.

103. Kulovou plochu rozděluje rovina σ na dva vrchlíky, jejichž obsahy jsou v poměru $2:3$. Vypočítejte poměr objemů kulových úsečí s podstavou v rovině σ.

104. Základy teorie míry a určitého integrálu objevil mj. Johannes Kepler při studiu vinných sudů. Začněme ovšem jednodušším problémem: Dva sudy obsahují určité množství vína. Jestliže z prvního nalijeme do druhého právě tolik vína, kolik tam již je, potom z druhého do prvního právě tolik vína, kolik tam již je, a opět z prvního do druhého právě tolik, kolik tam již je, bude v každém ze sudů 160 litrů vína. Kolik litrů bylo v každém sudu na začátku?

105. Jedním z požadavků, které je při výrobě nutno respektovat, je minimalizace nákladů na materiál. Avantgardní módní návrhář popsal výrobnímu závodu svůj návrh dámského prádla takto: Je dán rovnostranný trojúhelník o straně délky a. Jeho vrcholy jsou středy kružnic o poloměrech $a/2$. Oblouky těchto kružnic omezují navrhovaný výrobek. Určete přibližnou spotřebu materiálu potřebného k výrobě, je-li nutno vzhledem k výrobnímu postupu přidat 20 % materiálu. (Elasticitu materiálu a všeliké krajkoví zanedbejte.)

106. V sedmé části literárního divertimenta Josefa Škvoreckého *Hříchy pro pátera Knoxe* je klíčem k řešení jistého delikátního případu relace

$$(4\,|x| + 2y - 4) \cdot ((|y| - 1) + |y| - 1 + |x|) = 0,$$

kterou hlavní hrdince Evě Adamové pomůže vyřešit matematik prof. Marcus Twisten. Postupujte jako on: znázorněte v rovině jako body všechny uspořádané dvojice čísel $[x, y]$, které této relaci náleží.

107. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}} = x$ s parametrem $a \in \mathbf{R}$.

108. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $3x + 5 = \sqrt{9x^2 + 5\sqrt{36x^2 + 62x + 5}}$.

109. Řešte v $\mathbf{Z}$ rovnici $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$.

110. Jistý fysikální problém byl převeden na řešení rovnice:

$$(3 + \sqrt{8})^x + (3 - \sqrt{8})^x = 34.$$

Vyřešte tuto rovnici v $\mathbf{R}$.

111. Jistý ekonomický problém vede k rovnici:

$$2^x \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x} + 2^{1-x} \left(\frac{1}{8}\right)^x = 1.$$

Řešte tuto rovnici v $\mathbf{R}$.

112. Korejská lidově demokratická republika skladuje radioaktivní materiály. Radioaktivní látka A má hmotnost m_1 a poločas přeměny T_1; radioaktivní látka

B má hmotnost m_2 a poločas přeměny T_2, přitom $m_1 > m_2$, $T_1 < T_2$. Za jakou dobu budou hmotnosti obou látek stejné?

113. Řešte v **R** rovnici $\log^2_{\sqrt{2}} x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$.

114. Řešte v **R** rovnici $\log_4\left(2\log_3\left(1+\log_2(1+3\log_2 x)\right)\right) = \frac{1}{2}$. Grafy některých funkcí vystupujících v rovnici znázorněte v rovině.

115. Řešte v $\mathbf{R}^2$ soustavu rovnic $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 8\sqrt{2} \\ \ln(x+y) = 0 \end{cases}$.

116. Určete definiční obor funkce f dané předpisem pro funkční hodnoty

$$f(x) = \log\left(1 - \sqrt{\frac{x-4}{x+1}}\right).$$

117. Řešte v **R** rovnici $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$.

118. Řešte v **R** rovnici $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$.

119. Řešte v **R** rovnici $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

120. Řešte v **R** nerovnici $\left|\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right| \leq 2$.

121. Dokažte, že platí identita

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \operatorname{tg} 4x.$$

122. Řešte v **C** rovnici $(x^3-1)^2 + (x^3+1)^2 = 0$.

123. Řešte v **C** rovnici rovnici $x^6 - 1 = 0$. Postupujte dvěma různými způsoby.

124. Řešte v $\mathbf{C}^2$ soustavu rovnic $\begin{cases} x + y = -i \\ x^2 + y^2 = -1 \end{cases}$

125. Určete množinu všech komplexních čísel, jejichž poměr vzdáleností od čísel 0 a 3 je konstantní a rovná se 2.

126. Řešte v **C** rovnici $12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$.

Planimetrie a stereometrie

201. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dán jejich $o = 12$ cm, úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

202. Vysvětlete pojem *Pappova úloha*. Stanovte počet takových úloh. Řešte Pappovu úlohu: Je dána kružnice $l(O; r)$ a její vnější přímka t s bodem A. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky t v bodě A a dané kružnice l.

203. Je dána přímka p a kružnice $k(S; r)$, $l(O; \varrho)$, kde $S \neq O$, $r > \varrho$. Sestrojte všechny přímky rovnoběžné a danou přímkou p, na nichž kružnice k, l vytínají stejně dlouhé tětivy.

204. Řešte parametrický systém úloh požadující konstrukci trojúhelníku ABC, je-li dáno c, α, $a-b$; oborem parametru α je interval $(0; \varphi)$, $c \in \mathbf{R}_+$, $a-b \in \mathbf{R}_+$.

205. Sestrojte lichoběžník, je-li dáno $a + c = 4$ cm, $b = 3$ cm, $e + f = 6$ cm, $|\sphericalangle ASB| = \omega = 125°$.

206. Vysvětlete pojem *Apollóniova úloha.* Stanovte počet takových úloh. Řešte jednu Apollóniovu úlohu: Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M ($M \notin a$, $M \notin b$). Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek a, b.

207. V rovině jsou dány body A, B, C neležící v přímce. Najděte takový bod X této roviny, že součet délek $|AX| + |BX| + |CX|$ je minimální.

208. Body A, B leží v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najděte na přímce p bod X takový, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální. Zjištěný výsledek interpretujte také fysikálně.

209. V rovině jsou dány body A, B a přímka p. Najděte na přímce p bod X takový, aby $\big||AX| - |BX|\big|$ byla a) minimální, b) maximální.

210. Minimalizace nákladů na přepravu: Ze železničního uzlu U vycházejí dvě přímé železniční tratě, které svírají ostrý úhel α. Uvnitř tohoto úhlu leží místo A. Na každé z těchto tratí byla zřízena železniční stanice tak, aby součet délek plánovaných silnic spojujících místo A s oběma stanicemi i obě stanice navzájem byl nejmenší. Určete polohu stanic.

211. Kolonisté obsadili dosud neobydlená území. Osady A, B leží na opačných březích přímého toku řeky. Určete místo, kde je třeba postavit most (co nejkratší, tedy kolmý ke břehům řeky), aby plánovaná silnice z A do B byla nejkratší.

212. V lichoběžníku $ABCD$ je dáno $|AB| = a = 8$ cm, $|BC| = b = 5$ cm, $\beta = 60°$, $\gamma = 105°$. Vypočítejte délky zbývajících stran lichoběžníku.

213. Určete délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno $a = 52$ cm, $v_b = 31{,}2$ cm, $S = 330$ cm^2.

214. Radarové zařízení umístěné na 45° severní zeměpisné šířky zaregistrovalo v určitém okamžiku přesně v severním směru kosmickou loď, jejíž výškový úhel byl $\alpha = 17°$ a jejíž vzdálenost od pozorovacího místa byla $d = 600$ km. Jaká byla v tomto okamžiku výška kosmické lodi nad povrchem Země a nad kterou rovnoběžkou se právě nacházela? Zemi považujeme za kouli o poloměru $r = 6370$ km.

215. V 6. scéně 3. jednání Rostandovy hry *Cyrano z Bergeracu* stojí Roxana na balkoně. Cyrano, stojící na zemi kus od zdi domu, hledí na špičku jejího nosu pod výškovým úhlem 85° a říká:

„Ba, to je láska, vskutku,
ten cit tak žárlivý a strašný, pln smutku,“

ustoupí ještě o čtvrt metru dále od Roxanina balkonu, takže špičku jejího nosu vidí pod výškovým úhlem $79°40'$, a pokračuje:

„to vskutku láska je v svém celém rozvášnění,
to pravá láska je a sobecká přec není.“

Roxana je dojata a svolí k polibku, pro který si ovšem na balkon přijde přitroublý Kristián. Cyranovi zbydou oči pro pláč a pro čtenáře otázka: Jak vysoko byla špička Roxanina nosu nad rovinou Cyranových očí?

216. Meteorologická úloha: Určete výšku mraku nad hladinou jezera, jestliže ho vidíme z místa A pod výškovým úhlem α a z téhož místa vidíme jeho obraz v jezeře pod hloubkovým úhlem β. Výška místa A nad rovinou hladiny jezera je d. Řešte nejprve obecně, pak numericky pro hodnoty $\alpha = 35°12'$, $\beta = 37°36'$, $d = 21{,}9$ m.

217. Určete přirozená čísla udávající délky stran pravoúhlého trojúhelníku, jehož obvod i obsah jsou (v koherentních jednotkách) vyjádřeny týmž číslem.

218. Pravidelný trojboký jehlan má podstavnou hranu velikosti a, jeho boční hrana má od roviny podstavy odchylku α. Vypočítejte povrch jehlanu.

219. Do koule s poloměrem r je vepsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. Určete poměr povrchů a poměr objemů těchto těles.

220. Geografická úloha: Předpokládáme, že Země má tvar koule o poloměru r km. Ve výšce h nad povrchem Země je stacionární družice. a) Určete vzdálenost stacionární družice od místa na povrchu Země, ze kterého by bylo možné pozorovat družici právě na horizontu. b) Vyjádřete povrch části Země, který lze z této družice spatřit.

221. Sestrojte průsečnici rovin XYZ a KLM v situaci určené obrázkem v příloze.

222. Sestrojte řezy těles v obrázku v příloze rovinou XYZ.

Analytická geometrie

301. Je dána množina $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a relace $S = \{[1, 2], [2, 2], [3, 3], [4, 4]\}$. a) Sestrojte graf relace S. b) Určete první a druhý obor relace S. c) Rozhodněte, zda relace S definovaná v A je zobrazením, prostým zobrazením, funkcí. d) Určete inverzní relaci S_{-1} a zjistěte, zda je funkcí. e) Určete, zda relace S definovaná v A je reflexívní, symetrická, tranzitivní.

302. a) Jsou dány množiny $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$. Určete postupně: 1. všechny vzájemně různé relace mezi A a B; 2. všechna zobrazení z A do B; 3. všechna prostá zobrazení z A do B. b) V množině všech přímek dané roviny rozhodněte, které z uvedených relací jsou reflexívní, symetrické, tranzitivní: 1. x je rovnoběžná s y; 2. x je různoběžná s y; 3. x je kolmá k y; c) Sestrojte v $\mathbf{R}^2$ graf relace S, pro niž platí zároveň tyto podmínky $y \geq \log_2 x$; $y < 2^x$; $x \geq 1$; $y < -x + 6$.

303. V rovině ϱ jsou dány dva různé body A, B. Určete množinu všech bodů X roviny ϱ, pro něž platí $|AX| \,/\, |BX| = k$, kde k náleží $\mathbf{R}_+ - \{1\}$.

304. a) Je dána krychle $ABCDEFHGH$ a vektory $\vec{e}_1 := A - D$, $\vec{e}_2 := C - D$, $\vec{e}_3 := H - D$. Zapište vektory $G - A$, $B - S_{AH}$, $F - C$ jako lineární kombinaci daných vektorů. b) Zjistěte, zda vektory $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (3, 0, 6)$, $\vec{c} = (4, -5, 10)$ tvoří skupinu lineárně závislých, nebo lineárně nezávislých vektorů.

305. Jsou dány body $A\,[1, 2]$, $B\,[-3, 5]$, $C\,[-4, -3]$. a) Dokažte, že body tvoří vrcholy trojúhelníku. b) Vypočítejte jeho obsah. c) Najděte souřadnice středu kružnice opsané. d) Napište rovnici přímky, na které leží v_a.

306. Určete rovnici přímky, která prochází daným bodem $A\,[-2, -3]$ a od přímky $x + 2y + 6 = 0$ má odchylku $45°$.

307. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $M\,[10, 5]$ a má od bodu $N\,[7, 2]$ vzdálenost $v = 3$.

308. Určete neparametrické vyjádření roviny ϱ a její obraz ve středové souměrnosti (se středem v počátku soustavy souřadnic), je-li zadáno:
$\varrho:\ x = 1 - r + s,\ y = 2 + 2r,\ z\ = 3 - r + 2s;\ r, s \in \mathbf{R}.$

309. Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin:
$\sigma:\ 4x + 2y - 3z - 11 = 0$, $\varrho:\ 8x + 6y - 7z - 23 = 0$, $\tau:\ 12x - 10y + 11z + 5 = 0$. Mají-li společné body resp. přímky, uveďte jejich rovnice.

310. Jsou dány body $A\,[1,3,-2]$, $B\,[3,-2,5]$, $C\,[0,1,7]$, $D\,[8,0,3]$. Vypočítejte a) obsah stěny ABC čtyřstěnu $ABCD$, b) objem čtyřstěnu $ABCD$, c) velikost úhlu BCD.

311. Určete průsečnici rovin

$$\tau:\ x = 3 + 4t + p,\ y = -6t,\ z = -2 + 2t + p;\ t, p \in \mathbf{R},$$
$$\sigma:\ x = 3 + 2r - 2s,\ y = -3 + s,\ z = -2 + r + s;\ r, s \in \mathbf{R}.$$

312. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, velikost jeho podstavné hrany $a = 6$, výška jehlanu je $v = 3\sqrt{2}$. a) Vypočítejte odchylku přímek BC a AV. b) Zjistěte odchylku přímky AV od roviny podstavy jehlanu. c) Určete odchylku roviny ADV a roviny podstavy jehlanu.

313. Jsou dány body $A\,[2,2,3]$, $B\,[6,3,0]$, $C\,[3,-1,-1]$. Na ose x určete bod X tak, aby objem čtyřstěnu $ABCX$ byl 26.

314. Účinná reklama je v obchodu nezbytná. Reklamní agentura postavila na náměstí poutač tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, kde $|AB| = a$, $|AV| = a$. a) Určete odchylku roviny ϱ podstavy a roviny boční stěny jehlanu. b) Určete odchylku boční hrany CV od roviny ϱ podstavy jehlanu.

315. V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je dáno: $|AB| = a$, $|AV| = a$. a) Určete odchylku dvou sousedních bočních stěn jehlanu. b) Určete vzdálenost vrcholu A od přímky $p = VC$.

316. Je dána hyperbola $x^2 - 9y^2 = 1$ a bod $M\,[3,1]$. a) Určete velikosti poloos hyperboly. b) Zjistěte polohu bodu M vzhledem k hyperbole. c) Napište rovnici všech přímek, které procházejí bodem M a mají s hyperbolou právě jeden společný bod.

317. a) Charakterizujte kuželosečku $x^2 + 4y^2 = 20$. b)Vepište do kuželosečky čtverec. c) Vypočítejte velikost strany tohoto čtverce. d) Ve vrcholech čtverce veďte tečny ke kuželosečce. Napište rovnici alespoň jedné takové tečny. e) Vypočítejte odchylku těchto tečen.

318. Nalezněte rovnici kružnice, která má střed na přímce $p:\ 2x + y = 0$ a dotýká se přímek r, s, kde $r:\ 4x - 3y + 10 = 0$, $s:\ 4x - 3y - 30 = 0$.

319. Je dána elipsa $5x^2 + 9y^2 = 45$ a bod $M\,[0,-3]$. a) Dokažte, že M je bodem vnější oblasti elipsy. b) Napište rovnice tečen elipsy procházející bodem M. c) Vypočtěte odchylku těchto tečen.

320. Dokažte, že rovnice $x^2 - 12y - 4x - 40 = 0$ je rovnicí paraboly. Určete tečnu této paraboly, která je kolmá k přímce $2x - 3y + 10 = 0$.

321. Určete společné body rovnoosé hyperboly $x^2 - y^2 = 25$ a přímky $y = kx + q$, tzn. proveďte diskusi vzhledem ke směrnici k a parametru q.

322. Jsou dány body $M\,[-3, 0]$, $N\,[3, 0]$ a přímka p určená rovnicí

$$p:\ 4x + 5(2 - \sqrt{3}) \cdot y - 20 = 0.$$

Určete množinu všech bodů P ležící na přímce p tak, aby obvod trojúhelníku MNP byl roven 16.

323. Film Davida Lynche *Mulholland Drive* začíná záběry silnice natočenými z jedoucího auta; tma je prosvětlována jen dvěma reflektory automobilu. Průměr parabolického automobilového reflektoru je 24 cm, hloubka reflektoru je 12 cm. Určete rovnici parabolického řezu a vypočtěte polohu vlákna žárovky, je-li reflektor zapnut na dálková světla.

324. Balistický problém: Náboj je vystřelen rychlostí v pod elevačním úhlem $0 < \alpha < 90°$ nad horizontální rovinou. K odporu vzduchu nepřihlížíme. a) Napište rovnici trajektorie náboje. b) Určete dolet. c) Zjistěte výšku výstupu náboje.

325. Načrtněte graf funkce

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x - |6 - 2x|}.$$

326. Plechová válcová nádoba o průměru d a výšce v je opatřena držákem tvaru půlkruhu o poloměru $v/2$. Určete, jak závisí obsah S spotřebovaného plechu na průměru d při daném v. Určete parametr a vrchol paraboly, jejíž část je grafem funkce $S(d)$.

Diskrétní matematika

401. Dokažte, že číslo $2^{3k} + 3^{4k}$ není pro žádné $k \in \mathbf{N}$ dělitelné číslem 73.

402. Dokažte, že největší $x \in \mathbf{Z}$, pro které platí $x^{x^{x^x}} < 1000^{1000^{1000}}$, je číslo 5.

403. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ a pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $|\sin nx| \le n\,|\sin x|$.

404. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

405. V rovině je dán konečný počet přímek a ty ji dělí na části. Dokažte, že tyto části je možno vybarvit dvěma barvami tak, aby každá část byla vybarvena celá jednou barvou a aby žádné dvě sousední části (tj. části oddělené úsečkou, polopřímkou nebo přímkou) nebyly vybarveny stejnou barvou.

406. Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$, $x > -1$ a pro všechna přirozená čísla n platí *Bernoulliho nerovnost*:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

407. Dokažte větu: Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí: $5 \mid (n^2+1) \Rightarrow 5 \nmid n$.

408. V geometrické posloupnosti platí $s_6 = 9s_3$. Určete a_1, q.

409. Existuje rovinný konvexní mnohoúhelník, jehož největší vnitřní úhel je 162°, každý následující je o 4° menší než předcházející. Určete daný mnohoúhelník.

410. Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 84 cm. Vypočítejte povrch kvádru, víte-li, že jeho objem je 64 cm^3.

411. Pozornost je třeba věnovat i drobným střadatelům. Vkladatel vložil do jistého finančního produktu nejmenované banky dne 3. 8. 2004 částku 5000 Kč. Úroková míra 10 % p. a., úrokovací období pololetní. Vkladatel žádnou částku nevybírá. Jakou částku bude mít naspořenu k 31. 12. 2006? Předpokládejte užití tzv. německé metody („normální úrok“) pro stanovení délky úrokovací doby.

412. K důležitým prvkům přípravy na mimořádné situace patří nácvik ochrany před nebezpečným zářením. Polovrstva materiálu je taková tloušťka vrstvy určeného materiálu, po jejímž průchodu se intenzita jaderného záření sníží právě na polovinu. a) Zjistěte nejmenší počet polovrstev, po jejímž průchodu intenzita jaderného záření nepřekročí jednu tisícinu původní intenzity záření. Určete též nejmenší tloušťku d takové vrstvy (s přesností na centimetry), víte-li, že příslušná polovrstva je 15 cm. b) Řešte obecně pro případ, že polovrstva je d_1 a intenzita nemá překročit $1/p$ původní intenzity záření.

413. V $\mathbf{R}$ řešte:

$$1 + \frac{2}{x} + \left|\frac{4}{x^2}\right| + \cdots = \frac{4x-3}{3x-4}.$$

414. Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která platí rovnice:

$$1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \cdots = \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}.$$

415. Do rovnostranného trojúhelníka o straně a je vepsána kružnice. Do zbývající části při vrcholech další kružnice, atd. Určete poměr ploch všech vzniklých trojúhelníků vůči vzniklým kruhům.

416. Určete všechna reálná čísla x tak, aby čtvrtý člen binomického rozvoje výrazu

$$\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$$

byl roven 200.

417. Užitím binomické a Moivreovy věty odvoďte goniometrický vzorec, který $\sin 4x$ resp. $\cos 4x$ vyjádří pomocí výrazů tvaru $\sin^m x$, $\cos^n x$; $m, n \in \mathbf{N}$.

418. Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž a) žádné tři neleží v přímce, b) právě šest leží v přímce, c) čtyři body leží v jedné přímce a jiné tři body leží v druhé přímce? d) Kolik přímek určuje n různých bodů v rovině, z nichž právě p leží v přímce?

419. Dvě úlohy z gymnázia. a) První ze Školního senátu. S připomínkami k zákazu kouření v areálu školy chce vystoupit šest řečníků: A, B, C, D, E, F. Určete počet: a) všech možných pořadí jejich vystoupení; b) všech pořadí, v nichž vystupuje A po senátorce D; c) všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po senátorce D. b) Druhá úloha je ze školní jídelny. Určete, kolika způsoby může m chlapců a n dívek nastoupit do zástupu tak, aby a) nejdříve stály všechny dívky a pak všichni chlapci; b) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka ani mezi žádnými dvěma dívkami nebyl žádný chlapec; c) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka.

420. a) Určete, kolikrát lze přemístit slova ve verši ze skladby *Slávy dcera* Jana Kollára „Sám svobody kdo hoden, svobodu zná vážiti každou“ tak, aby se „nepromíchala“ slova věty hlavní a vedlejší. b) Nákupčí knihovny (tedy člověk, který kupuje i více kusů téže knihy) je v jednom oddělení knihkupectví. Zde je ke koupi deset knih, přičemž každá kniha je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit: a) 15 knih; b) 51 knihu; c) 8 různých knih.

421. a) Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovná deseti. Kolik je v tomto počtu krychlí? b) Z osmi stejných kvádrů, dvou jehlanů, dvou kuželů a dvou koulí vybereme a) trojici, b) dvojici těles. Jaký je počet možností pro jejich složení?

422. Při startu se zřítilo letadlo. Ze 120 cestujících, mezi nimiž bylo 5 Bratislavanů, zahynulo 5 lidí a 39 bylo těžce raněných. Jaká je pravděpodobnost, že mezi mrtvými byl: a) aspoň jeden Bratislavan, b) právě jeden Bratislavan, c) žádný Bratislavan, d) všichni Bratislavané?

423. Úlohy z lékařského výzkumu: a) Dva lékaři stanoví správnou diagnózu určité nemoci v 8, resp. v 9 případech z 10. Vyšetřují-li téhož pacienta, který má tuto nemoc, nezávisle na sobě, jaká je pravděpodobnost, že pacientovi bude stanovena aspoň jedna správná diagnóza? b) Diagnostický test na určité onemocnění je pozitivní s pravděpodobností 0,99, je-li pacient skutečně nemocen. Testu se podrobí 30 pacientů, u nichž je podezření na toto onemocnění. Připusťme, že jsou všichni skutečně nemocní; jaká je pravděpodobnost, že nám žádné (z těch 30) onemocnění neunikne?

424. V osmdesátých letech fungoval v libereckých dopravních prostředcích MHD tento způsob odbavení cestujících: Cestující zakoupil v předprodeji jízdenku, která měla v dolní části obrazec:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Po nástupu do vozidla vložil jízdenku do znehodnocovače, který právě do p políček obrazce vyštípl otvory, přitom v tramvaji $p = 3$, v autobusu $p = 4$. Nepoctivý cestující by mohl postupovat takto: Zakoupil by dostatečný počet jízdenek, vyštípal by do nich kleštěmi všechny kombinace, a pak štípal jen bílé papírky, podle nichž by ze své sbírky vybral vždy tu správnou jízdenku, kterou by pak předložil revizorovi. a) Kolik jízdenek by bylo potřeba k uskutečnění tohoto plánu? b) Jaká je pravděpodobnost, že by cestující při bleskové kontrole vytáhl náhodně ze zásoby jízdenek právě tu správnou? c) Kolik korun ušetří za první rok nepoctivec oproti poctivému člověku, jestliže oba jezdí třikrát denně a jízdenka stojí 1 Kčs?
Aby nepoctivý cestující urychlil hledání správné jízdenky, svůj plán ještě vylepšil: V první kapse má všechny jízdenky, jejichž první vyštípnutý otvor (počítáno zespodu zleva) je v políčku 1, v druhé kapse má všechny jízdenky, jejichž první vyštípnutý otvor je v políčku 2, atd. d) Kolik kapes cestující potřebuje pro realizaci tohoto systému? e) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhne správnou jízdenku, ví-li, že první vyštípnuté políčko je 4 a ve volbě kapsy se nesplete?

425. Karl a Egon připravili v městě pod Ještědem loterii pro krajanské sdružení. V osudí jsou tělíska tvaru rotačního hyperboloidu: 3 zlatá, 4 červená a 5 černých. Vytáhnou 3 tělesa. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená tělesa svými barvami vytvoří kompletní trikoloru SRN, jestliže a) všechny tři hyperboloidy vytáhnou najednou, b) hyperboloidy táhnou postupně a vytažené hyperboloidy do osudí nevracejí, c) hyperboloidy táhnou postupně; vytažený hyperboloid je (před další tahem) vrácen zpět do osudí.

Diferenciální a integrální počet

501. Vypočtěte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}.$$

502. Vypočtěte:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4 + 2n - 3n^2 + 5n^3 - 2n^5}{1 - 100n^4 - 3n^5}.$$

503. Vypočtěte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}.$$

504. Napište rovnici tečny v bodě $x = 2$ ke křivce $y = \frac{x^2-3}{x-1}$.

505. Napište rovnici tečny k asteroidě o rovnici $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ v bodě $T\,[1, 1]$.

506. Ve kterém bodě má parabola $y = 2x^2 + 3x - 1$ tečnu a) se směrovým úhlem $45°$, b) rovnoběžnou s přímkou $5x - y + 3 = 0$?

507. Určete tečny ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v jejích průsečících s osou x.

508. Z desky tvaru trojúhelníku, jehož jistá strana má délku a a výška k této straně délku v (úhly při této straně jsou ostré), má být vyříznuta obdélníková deska, přičemž jedna strana obdélníku je částí oné strany trojúhelníka o délce a. Určete rozměry obdélníku tak, aby jeho obsah byl maximální.

509. Z lepenky tvaru čtverce o straně a se mají v rozích vyříznout čtverce o straně délky x tak, aby vznikla síť kvádru bez horní podstavy; objem kvádru má být největší. Určete x.

510. Určete rozměry válce tak, aby při daném objemu V měl nejmenší povrch.

511. Fysikální úloha: V nádobě je voda s hladinou ve výšce h. Jak vysoko nad dnem je třeba udělat otvor ve stěně, aby voda stříkala co nejdále?

512. Vlastnictví je třeba chránit. Je tedy nutno oplotit výběh pro slepice, který má mít tvar pravoúhelníku. Přitom je k dispozici 200 m pletiva; část plotu budou tvořit stěny drůbežárny, jejíž obdélníkový půdorys má rozměry 16 m × 10 m. Jaké rozměry musí mít výběh, aby měl co největší obsah?

513. Trosečníci na pustém ostrově potřebují vyrobit drátěný kruh a rovnostranný trojúhelník tak, aby součet obsahů vzniklých útvarů byl co největší; k dispozici mají drát délky 3 m, který rozdělí na dvě části a ohnou. Jak je třeba rozdělení provést?

514. Ze 4 m dlouhého úhlového železa se má svařit kostra akvária, jehož hrany dna mají být v poměru 2 : 3. Jaké rozměry má mít kostra, aby se do akvária vešlo co nejvíce vody?

515. Jednou z nejzdařilejších knih Julese Verna je *Tajuplný ostrov*. Pět trosečníků z balónu se pod vedením geniálního inženýra Cyruse Smitha postaví nepříznivým okolnostem. Několik dní po ztroskotání zapálil inženýr oheň; užil k tomu sklíčka ze svých hodinek a z hodinek novináře Gedeona Spiletta; „náhodou“ měla stejný průměr, takže z nich vytvořil spojnou čočku. Stanovte, kdy jsou si nejblíže předmět a skutečný obraz vytvořený spojnou čočkou o dané ohniskové vzdálenosti f.

516. Užitím Fermatova principu odvoďte zákon lomu světla

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

kde c_1 resp. c_2 je rychlost světla v prvním resp. druhém prostředí.

517. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) := \sin^5 x$.

518. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) := x^2 e^x$.

519. Najděte primitivní funkci k funkci

$$f(x) := \frac{2x+7}{x^2+x-2}.$$

(Užijte rozklad na parciální zlomky.)

520. Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce a ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y = x$ kolem osy x.

521. Určete objem anuloidu, tj. tělesa, které vznikne rotací kruhu o poloměru r a středu $S\,[0, a]$, kde $0 < r < a$, kolem osy x.

522. Užitím Newtonova integrálu odvoďte vztah pro objem koule.

523. Rotační elipsoid vznikne rotací kolem osy x části elipsy

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1, \quad y \geq 0,$$

kde $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \mathbf{R}_+$. Odvoďte vztah pro jeho objem.

524. Určete polohu těžiště tenké homogenní desky omezené obloukem paraboly $y^2 = 2px$ a přímkou $x = a$; $p, a \in \mathbf{R}_+$.

525. Užitím Newtonova integrálu odvoďte vztah pro objem kulové úseče o poloměru r a výšce v.

Elementární úlohy

602. Zapište a dokažte *de Morganovo pravidlo* pro negaci konjunkce.

603. Zapište a dokažte *de Morganovo pravidlo* pro negaci disjunkce.

604. Rozhodněte, jsou-li uvedené texty výroky; pokud ano, znegujte je:
a) Liberec je hlavní město Jižní Dakoty a Moskva je hlavní město Austrálie.
b) Brzy, jazyk, nazývati, zygota.
c) Každý rok bylo na našem školním dvorku upáleno aspoň osm provinilců.

605. Rozhodněte, jsou-li uvedené texty výroky; pokud ano, znegujte je:
a) $5 + 789 > 432$ právě tehdy, když 5 je sudé číslo.
b) Samara má kamarádku Tamaru nebo má doma almaru.
c) Jemnostpane Krakonoši!

606. Rozhodněte, které z uvedených písňových textů lze považovat za výroky, výroky znegujte:
a) Tak kopni do tý bedny, ať na cestu se dám!
b) Na kopečku v Africe stojí stará věznice.
c) Když jsem byla panna a s horníkama chodila, říkala mi máma, abych se krotila.
d) Kde domov můj, kde domov máj?
e) Dokud se zpívá, ještě se neumřelo.
f) All you need is love.

607. Pět přátel – Alfréd, Burizon, Cecilka, David a Emil – bylo pozváno na večírek; nebylo však známo, kdo pozvání přijme. Objevily se čtyři různé názory: (1) Nepřijde Alfréd a Burizon. (2) Přijde Burizon nebo Cecilka. (3) Jestliže přijde Cecilka, přijde David. (4) Emil přijde právě tehdy, když přijde David. Na večírek nakonec nepřijel nikdo. Který z výroků (1)–(4) byl tedy pravdivý?

608. Na základě platnosti výroků $A \vee B$ a $A \Rightarrow B$ kdosi usoudil, že platí i výrok $A \wedge B$. Je tento úsudek správný?

609. Víme, že z pěti výroků A, B, C, D, E první platí a že jsou pravdivé implikace $A \Rightarrow B$, $C \Rightarrow B'$, $A' \Rightarrow E'$, $E \Rightarrow D$, $C' \Rightarrow D'$. Sestrojte přímý důkaz pravdivosti výroku E'.

610. Víme, že z pěti výroků A, B, C, D, E první platí a že jsou pravdivé implikace $A \Rightarrow B$, $C \Rightarrow B'$, $A' \Rightarrow E'$, $E \Rightarrow D$, $C' \Rightarrow D'$. Sestrojte nepřímý důkaz pravdivosti výroku E'.

611. Víme, že jsou pravdivé implikace $A \Rightarrow B$, $C \Rightarrow B'$, $\mathrm{D}' \Rightarrow E'$, $E \Rightarrow A$, $\mathrm{D} \Rightarrow C$. Dokažte, že platí-li výrok C, pak platí i výrok E'.

612. Rozhodněte o pravdivosti výroků; tvrzení ilustrujte příklady:
a) Absolutní hodnota opačného čísla k nějakému číslu kladnému je vždy číslo nezáporné.
b) Opačné číslo k nějakému zápornému celému číslu je vždy číslo racionální.
c) Existují dvě různá $x \in \mathbf{R}$, pro něž je $x^2 = 4$.

613. Rozhodněte o pravdivosti výroků; tvrzení ilustrujte příklady:
a) Číslo $\frac{1}{2}$ lze napsat desetinným číslem, zatímco číslo $\frac{1}{3}$ nikoliv.
b) Nerovnice $|x+4| > -1$ nemá žádné reálné řešení.
c) Interval $\langle 0,1\rangle$ je nekonečná množina.
d) $\langle -1,2\rangle \cap \langle 2,3) = \{2\}$.

614. Kvantifikované výroky vyjádřete slovy a rozhodněte o pravdivosti. Nepravdivé výroky upravte tak, aby se staly výroky pravdivými; postupujte přitom nápaditěji, než pouhým užitím rčení: „Není pravda, že … “
a) $\forall x \in \mathbf{R}:\ x^2 > 0$,
b) $\forall x \in \mathbf{R}:\ \sqrt{x^2} = x$,
c) $\forall x \in \mathbf{R}\, \exists y \in \mathbf{Z}:\ x \cdot y = 10$.

615. Pro každé přirozené číslo uvažujme implikaci: „Je-li ciferný součet daného čísla dělitelný devíti, pak je toto číslo dělitelné třemi.“ Vyslovte a) obměněnou implikaci, b) obrácenou implikaci, c) negaci původní implikace. Rozhodněte o platnosti všech čtyř výroků.

616. Uvažujme o větě: „Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem $p \leqq \sqrt{n}$.“ Vyslovte větu obměněnou, obrácenou a negaci původní věty.

617. Rozhodněte o pravdivosti výroku $\log_{0,4} 7{,}5 < \log_{0,4} 7{,}1$ a o pravdivosti výroku $\log_{1,4} 7{,}5 < \log_{1,4} 7{,}1$.

618. Rozhodněte o pravdivosti těchto výroků. Nepravdivé výroky znegujte.
a) Existují aspoň dvě různá komplexní čísla z_1, z_2 taková, že jejich podíl je číslo reálné.
b) Pro každé číslo $z \in \mathbf{C}$ platí: $z = 1/z$.
c) Pro každá dvě čísla $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ taková, že $z_1 \neq z_2$, platí: $|z_1| \neq |z_2|$.

619. Rozhodněte o pravdivosti těchto výroků. Nepravdivé výroky znegujte.
a) Pro všechna komplexní čísla z platí: Absolutní hodnota čísla z je číslo reálné.
b) Existuje aspoň jedno komplexní číslo z takové, že $|z|$ je číslo komplexní.
c) Všechny komplexní jednotky mají stejnou absolutní hodnotu.

620. Vyslovte větu o vztahu spojitosti funkce a existenci její derivace v daném bodě. Vyslovte větu obrácenou a obměněnou a rozhodněte o pravdivosti těchto tří vět. Ilustrujte svá tvrzení vhodnými příklady.

621. Jsou dány množiny $A := \{x \in \mathbf{Z};\, x \leq -3\}$, $B := \{x \in \mathbf{Z};\, x < -7\}$. Určete $A - B$ a $B - A$.

622. Nechť $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \langle 0, 2\rangle$, $C = (-\infty, 1)$. Určete $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A - B$, $C - B$.

623. Nechť $A := \{x \in \mathbf{R};, |x - 3| < 2\}$, $B := (-\infty, 2\rangle \cup \langle 5, +\infty)$. Určete $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$.

624. Rozhodněte, které z uvedených relací definovaných v množině všech žáků vaší třídy jsou reflexívní, symetrické, tranzitivní: a) x je starší než y, b) x má stejné křestní jméno jako y, c) x nemá na posledním pololetním vysvědčení lepší známku z chemie než y.

625. Rozhodněte, které z uvedených relací definovaných v množině všech obyvatel Liberce jsou reflexívní, symetrické, tranzitivní: a) x se narodil v témž roce jako y, b) x je bratr y, c) x je syn y, d) x bydlí ve stejném domě jako y.

626. Rozhodněte, které z uvedených relací definovaných v množině všech kružnic dané roviny jsou reflexívní, symetrické, tranzitivní: a) x leží vně y, b) x leží uvnitř y, c) x se dotýká y, d) x a y mají týž střed.

Úlohy řešené obrazem

627. Vyberte výroky, o nichž lze na základě daných pravdivých výroků jistě usoudit, že jsou pravdivé! Své rozhodnutí ilustrujte Vennovými diagramy. **Dané výroky:** Všichni hajdamárové jsou olimony. Žádný hajdamár není wachmanem. **Posuzované výroky:** a) Žádný olimon není wachmanem. b) Někteří hajdamárové nejsou olimony. c) Někteří hajdamárové jsou olimony. d) Všichni hajdamárové jsou wachmany.

628. Rozhodněte (a ukažte Vennovým diagramem), zda platí výrok

$$(A \cap B) \cup (C \cap B) = C \cap (A \cap C').$$

629. Vyberte výroky, o nichž lze na základě daných pravdivých výroků jistě usoudit, že jsou pravdivé! Své rozhodnutí ilustrujte Vennovými diagramy. **Dané výroky:** Všechny osobní automobily jsou vozidly. Všechna vozidla jsou věcmi v právním smyslu. **Posuzované výroky:** a) Všechna vozidla jsou osobními automobily. b) Všechny věci v právním smyslu jsou vozidly. c) Všechny osobní automobily jsou věcmi v právním smyslu. d) Některá vozidla jsou osobními automobily.

630. Načrtněte graf libovolné funkce f, $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$, která a) není ani shora omezená, ani zdola omezená, je rostoucí, b) je omezená, není ani rostoucí, ani klesající, je lichá.

631. Načrtněte graf libovolné funkce f, $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$, která a) není ani shora omezená, ani zdola omezení, není rostoucí ani klesající, b) je sudá, není ani shora omezená, ani zdola omezená.

632. Funkce na množině $A := \mathbf{N} \cap \langle 1, 8 \rangle$ je dána takto: každému $x \in A$ je přiřazeno to číslo y, které udává počet všech prvočísel, jež jsou menší než x. Sestrojte graf této funkce (v kartézské soustavě souřadnic).

633. Uvažujme o funkci g, která je dána na množině $A := \mathbf{N} \cap \langle 1, 10 \rangle$ takto: každému $x \in A$ je přiřazen počet všech dělitelů čísla x. (Uvažujme o dělitelnosti zavedené obvyklým způsobem v $\mathbf{N}$.) a) Sestrojte graf funkce g (v kartézské soustavě souřadnic). b) Najděte $\mathrm{D}(g)$ a $\mathrm{H}(g)$.

634. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic graf funkce:

$$f(x) := (3x + 1) \cdot \mathrm{sgn}(3x + 1).$$

635. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic graf funkce:

$$f(x) := (x-1) + \operatorname{sgn}(x-1).$$

636. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí:

$$f(x) := x^2 - 1, \quad g(x) = \left|x^2 - 1\right|.$$

637. Symbolem $[x]$ rozumíme celou část čísla x definovanou obvyklým způsobem. Načrtněte graf funkce $f(x) := 1^{[x]} + (-1)^{[x]}$; rozhodněte, je-li tato funkce periodická, popř. stanovte nejmenší periodu.

638. Symbolem $[x]$ rozumíme celou část čísla x definovanou obvyklým způsobem. Načrtněte graf funkcí $f(x) := 3x - 3[x]$ resp. $g(x) := [3x] - 3x$; rozhodněte, jsou-li tyto funkce periodické, popř. stanovte jejich nejmenší periody.

639. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $f(x) := x^2$, $g(x) := \sqrt{x}$, $h(x) := \sqrt{x} + 2$, $k(x) := \sqrt{x+2}$.

640. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $e(x) := \log_{10} x$, $f(x) := \log_{10}(x-3)$, $g(x) := \log_{10} x - 3$.

641. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $f(x) := |4^x - 2|$, $g(x) := 4^{|x|}$, $h(x) := \left|4^{|x|} - 2\right|$.

642. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $f(x) := x^3$, $g(x) := \operatorname{tg} x$. Správně zachyťte mj. rozdílnost grafů obou funkcí v okolí počátku; obhajte svůj obrázek užitím diferenciálního počtu.

643. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $f(x) := x^3$, $g(x) := x^{-3}$, $h(x) := x^{\frac{1}{3}}$.

644. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $f(x) := \sin x$, $g(x) := \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $h(x) := 1 + \sin x$.

645. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $f(x) := 3^x$, $g(x) := \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) := \log_3 x$.

646. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $f(x) := \sqrt[3]{x}$, $g(x) := \sqrt[4]{x}$.

647. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic (do jednoho obrázku) grafy funkcí: $f(x) := \operatorname{tg} x$, $g(x) := \operatorname{arctg} x$, do jiného obrázku grafy: $h(x) := \sin x$, $k(x) := \arcsin x$. Pojednejte o definičních oborech a oborech hodnot; vysvětlete případné rozdíly mezi oběma obrázky.

648. Znázorněte graficky řešení nerovnice $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

649. Je dána úsečka jednotkové délky. Sestrojte úsečku, která má délku $\sqrt{15}$.

650. Jsou dány úsečky délek a, b, c. Sestrojte úsečku délky $\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

651. Načrtněte geometrickou interpretaci algebraických vzorců

$$(a+b)^2, \quad (a+b+c)^2, \quad (a+b)^3.$$

652. Načrtněte (popř. modelujte) všechny typy vzájemné polohy tří rovin v prostoru.

OBSAH

Sazba: Honsoft, 2007.