# *Maturitní písemná práce*

*11. dubna 2012*

*čtvrtý ročník se zaměřením na matematiku*

**Příklad 1.**

1.A V rovině je dána přímka $p: x - y = 0$ a bod $A[2;0]$. Vhodnou rovnicí charakterizujte množinu všech bodů $[x, y]$, které mají od bodu $A$ dvakrát větší vzdálenost než od přímky $p$.

(a) Dokažte, že touto množinou je kuželosečka.

(b) Dokažte, že se jedná o regulární kuželosečku.

(c) Určete asymptotické směry této kuželosečky a rozhodněte, zda se jedná o elipsu, hyperbolu či parabolu.

(d) Určete všechny středy této kuželosečky.

1.B Jsou dána komplexní čísla $a = 1 + i$, $b = 2 + i$.

(a) Určete reálnou i imaginární část komplexního čísla $\frac{a}{b}$.

(b) Dokažte, že $|b|$ není racionální číslo.

(c) Určete normovaný polynom nejnižšího stupně s reálnými koeficienty, který bude mít komplexní čísla $a$, $b$ za kořeny.

(d) Vyjádřete v algebraickém i goniometrickém tvaru všechny odmocniny z $a$ a odtud odvoďte, čemu se rovná $\cos\frac{\pi}{8}$.

(e) Určete všechny kořeny polynomu $2x^6 + x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4$ víte-li, že má za kořen komplexní číslo $a$ a má dva racionální kořeny.

**Příklad 2.**

2.A Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ s délkou podstavné hrany 4 cm a délkou pobočné hrany 9 cm. Na hraně $AV$ je dán bod $X$ tak, že $|AX| : |XV| = 1 : 3$, na hraně $CV$ je dán bod $Y$ tak, že $|CY| = 2 \cdot |YV|$, a na hraně $EV$ je dán bod $Z$ tak, že $\frac{|ZV|}{|EV|} = 0,4$. Dále je na polopřímce $AB$ dán bod $U$ tak, že $|AB| = |BU|$, a na přímce kolmé k rovině podstavy procházející bodem $F$ je dán bod $W$ takový, že leží v rovině rovnoběžné s rovinou podstavy procházející bodem $V$.

(a) Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte pravý nadhled jehlanu $ABCDEFV$ tak, aby byla rovina $FCV$ rovnoběžná s průmětnou.

(b) Sestrojte řez jehlanu rovinou $XYZ$. Svůj postup řádně komentujte.

(c) Sestrojte průsečíky přímky $UW$ s jehlanem a s rovinou $XYZ$. Svůj postup řádně komentujte.

(d) Sestrojte skutečnou odchylku rovin $BCV$ a $AFV$. Svůj postup řádně komentujte.

2.B Je dána kružnice $k(S; r = \ \text{cm})$ a bod $A$ takový, že $|AS| = \ $ cm. Dále je dána úsečka délky $d$, $d < 5\ cm$. Nakonec je dán bod $M$ ležící vně kružnice $k$, $M \neq A$. Pro každý z následujícíh úkolů prosím použijte jiný náčrtek a sestrojte novou konstrukci.

(a) Pro každý bod $X$ kružnice $k$ takový, že $X$ neleží na přímce $AS$, sestrojme rovnoběžník $ASXY$. Určete množinu všech bodů $Y$. Své tvrzení řádně dokažte.

(b) Bodem $A$ veďte všechny přímky, které na kružnici $k$ vytnou tětivu délky $d$. Proveďte obecný rozbor, postup kostrukce a diskuzi o počtu řešení. Kostrukci proveďte pro $d = 3,7$ cm.

(c) Sestrojte kružnici, která bude procházet body $A, M$ a bude se dotýkat kružnice $k$. Proveďte důkladný rozbor a diskuzi o počtu řešení. Postup konstrukce ani konstrukci provádět nemusíte.

**Příklad 3.**

3.A Jsou dány funkce $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

(a) Vyšetřete průběh funkce $f$ (tj. určete definiční obor, paritu, periodicitu, nulové body, znaménka funkce, lokální extrémy, intervaly, kde je funkce rostoucí/klesající, body, ve kterých se mění konvexnost/konkávnost, intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní, asymptoty, limity funkce ve význačných bodech, graf funkce).

(b) Na množině reálných čísel řešte nerovnici $(h \circ g \circ f)(x) > 0$.

3.B Jsou dány posloupnosti $\{p_n\}_{n=2}^{\infty}$ a $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž

$$p_n = \log_n a, \quad q_n = \log^n a, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Rozhodněte o konvergenci poslopupnosti $\{p_n\}_{n=2}^{\infty}$.

(b) Rozhodněte o konvergenci nekonečné řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \cdot p_n}{n}$, je-li $a > 1$.

(c) Určete všechna kladná reálná čísla $a$, která splňují nerovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n < 1.$$

(d) V závislosti na parametru $n$ určete všechna kladná reálná čísla $a$, která splňují rovnost

$$7^{p_n} + 13 \cdot 7^{p_n - 1} - 5^{p_n + 1} - 3 \cdot 5^{p_n - 1} = 0.$$