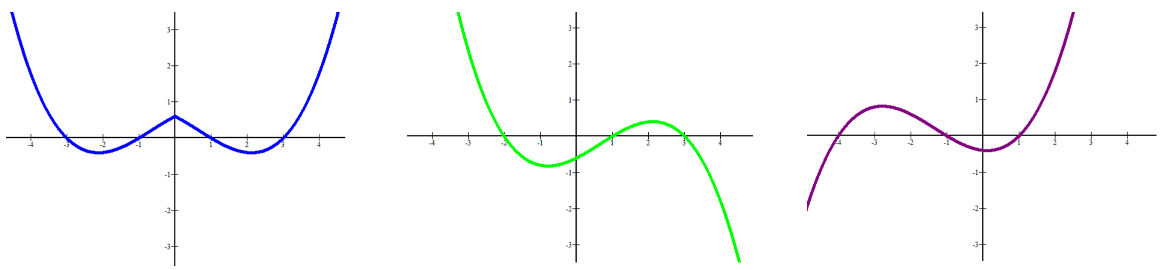
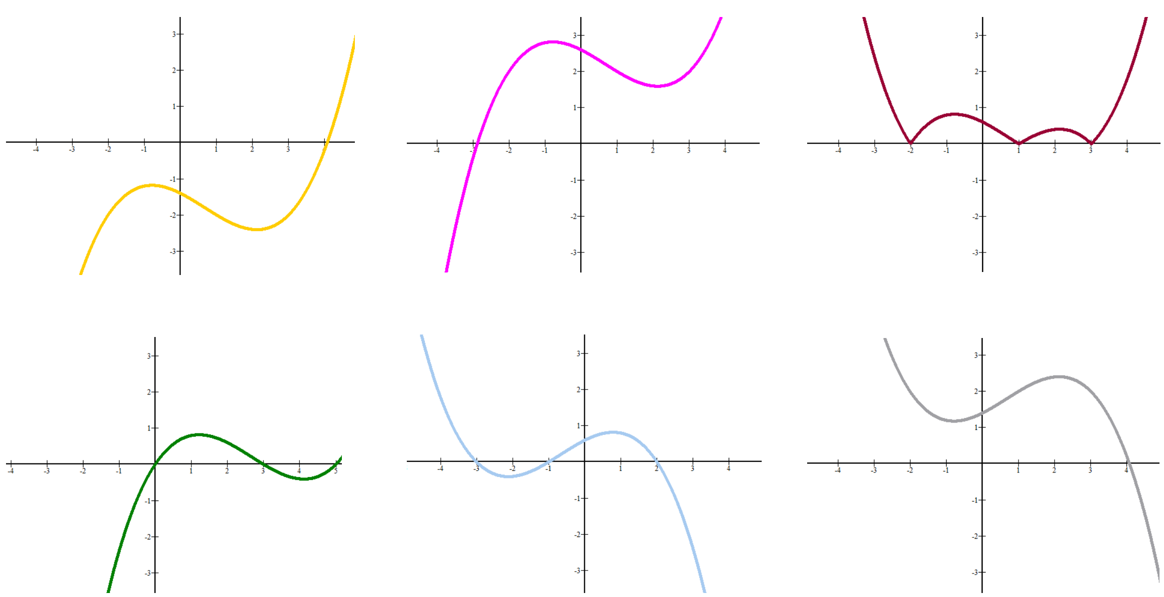
Jihomoravské centrum pro mezinárodní mobilitu



Sbírka příkladů k maturitě



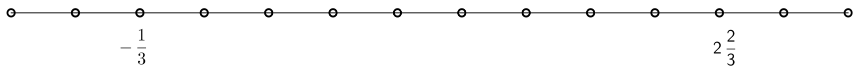
Kunice 2014

Petr Pupík

Obsah

1 Základy matematiky

Příklad 1.1. Na obrázku vidíte číselnou osu



1. Znázorněte na číselnou osu obrazy čísel

   (a) 0 (b) 1 (c) $0,\overline{6}$ (d) $-\frac{2}{3}$

2. Pokud jsou obrazy čísel $-\frac{1}{3}$ a $2\frac{2}{3}$ na číselné ose vzdáleny 10 cm, jak budou od sebe vzdáleny obrazy čísel

   (a) 0 a 1 (b) $-0,\overline{3}$ a 3 (c) $-5\frac{1}{6}$ a $12\frac{5}{6}$

Příklad 1.2. Vypočítejte a výsledek vyjádřete zlomkem v základním tvaru

1. $1,8\overline{3} - 1,\overline{6} + 0,\overline{2}$
2. $0,\overline{3} \cdot (3,\overline{45} - 0,\overline{15})$

Příklad 1.3. Mějme číslo

$$a = 24^3 \cdot 6^5 \cdot 36^6$$

1. Napište toto číslo ve tvaru součinu mocnin prvočísel.
2. Určete, kolik má dané číslo přirozených dělitelů.
3. Určete, jaký je největší dělitel čísla a, který ve svém prvočíselném rozkladu obsahuje všechna prvočísla v nejvýše první mocnině.
4. Určete prvočíselný rozklad nejmenšího čísla b, které je dělitelné číslem a, je dělitelné pěti a navíc platí, že exponenty čísel 2, 3, 5 z prvočíselného rozkladu čísla b tvoří aritmetickou posloupnost.
5. Určete největší dvojciferný a nejmenší trojciferný dělitel čísla a.
6. Určete nejmenší čtyřciferné číslo c, které je s číslem a nesoudělné.

Příklad 1.4. Je dáno číslo

$$a = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 10^{10}.$$

1. Určete, které prvočíslo se v rozkladu čísla a na součin prvočísel objevuje v nejvyšší mocnině.
2. Určete, které prvočíslo se v rozkladu čísla a vyskytuje v nejnižší kladné mocnině.
3. Určete, kolika nulami končí číslo a.

4. Určete, jaký je největší dělitel čísla a, který ve svém prvočíselném rozkladu obsahuje všechna prvočísla v nejvýše první mocnině.

Příklad 1.5. Pišme za sebe čísla 123443211234432112...

1. Kolik nejméně čísel za sebe musíme napsat, aby bylo výsledné číslo dělitelné dvěma a devíti.
2. Kolik nejméně čísel za sebe musíme napsat, aby bylo výsledné číslo dělitelné třemi a čtyřmi.

Příklad 1.6. Seřaďte podle velikosti čísla

1. (a) 2^{10} (b) $\binom{10}{2}$ (c) 10^2 (d) $\binom{10}{0}$ (e) $\binom{10}{9}$ (f) $10!$ (g) 10^{10}
2. (a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\log_3 2$ (d) $\log_5 5$ (e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ (f) $\sqrt[3]{9}$ (g) $\ln 27$

2 Výrazy

Příklad 2.1. Je dán výraz

$$\frac{1-\frac{4}{a+3}}{1-\frac{1}{a+3}}.$$

1. Určete definiční obor výrazu.
2. Daný výraz zjednodušte.
3. Určete, pro jaká reálná čísla a je hodnota výrazu rovna dvěma.

Příklad 2.2. Je dán výraz

$$x^3 - 2x^2 - xy^2 + 2y^2$$

1. Rozložte daný výraz na součin.
2. Určete, pro která reálná čísla x je uvedený výraz roven nule, jestliže je $x \neq \pm y$.
3. Určete hodnotu výrazu pro $x = -1$, $y = -2$

Příklad 2.3. Je dán výraz

$$\frac{1-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}}{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}$$

1. Daný výraz zjednodušte.

2. Znázorněte v rovině množinu bodů $[x, y]$, pro které je uvedený výraz roven jedné polovině.

Příklad 2.4. Vydělte se zbytkem:

$$(2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2) : (x^3 + x^2 - x + 1)$$

Příklad 2.5. Součet tří po sobě jdoucích lichých čísel, z nichž prostřední je ve tvaru $13 - 2s$ je 51. Určete hodnotu čísla s.

Příklad 2.6. Pro polynom p třetího stupně platí všechny tyto podmínky

- vedoucí koeficient je dvojnásobkem absolutního členu,
- součet i součin koeficientů polynomu p je roven nule,
- hodnota polynomu p v nule je rovna jedné.

Určete všechny takovéto polynomy p.

3 Výroky a množiny

Příklad 3.1. Rozhodněte o pravdivosti každého výroku

1. Graf každé sudé funkce je souměrný podle osy y.
2. Každé prvočíslo je liché.
3. Existují dva čtverce jejichž průnikem je pravidelný osmiúhelník.
4. Žádná rostoucí funkce není shora ohraničená.
5. Mějme dány přímky a, b, c v rovině. Jsou-li přímky a, b různoběžné, b, c také různoběžné, potom jsou vždy i přímky a, c různoběžné.
6. Průnikem dvou nekonečných množin může být konečná množina.
7. Každá periodická funkce je ohraničená.
8. Číslo $\sqrt{5}$ je iracionální.
9. Těžnice každého trojúhelníku rozděluje tento trojúhelník na dva trojúhelníky se stejným obsahem.

Příklad 3.2. Je dána množina M

$$M = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \bigstar, \triangle\}$$

1. Určete, kolik různých podmnožin má množina M.

2. Určete, kolik různých podmnožin, které obsahují prvek $\heartsuit$, má množina M.
3. Určete, kolik různých podmnožin, které obsahují prvek $\heartsuit$, ale neobsahují prvek $\clubsuit$, má množina M.

Příklad 3.3. Jsou dány množiny A, B celých čísel takové, že

$$A = \{x \in \mathbb{Z}; 0 \leq x < 13, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3k\}, \qquad B = \{y \in \mathbb{Z}; |y| \leq 6\}.$$

Určete, kolik prvků mají následující množiny

1. A
2. B
3. $A \cap B$
4. $A \cup B$
5. $A \setminus B$
6. $B \setminus A$

Příklad 3.4. Čtveřice mafiánů Karlos, Lukas, Mike a Nikolas se chystají na jednu akcičku. Nemohou se však domluvit, kdo se bude akce účastnit, jisté je však, že

- Pokud půjde Karlos, nepůjde Lukas ani Mike
- Půjde Nikolas nebo Mike, určitě ne oba.
- Alespoň jeden mafián se akce účastní.
- Pokud půjde Nikolas, potom půjde i Lukas.

U každé situace rozhodněte, zda může podle výše uvedených podmínek nastat

1. Na akci půjdou všichni mafiáni.
2. Na akci půjde pouze jeden z mafiánů.
3. Na akci půjde Karlos a Nikolas.
4. Na akci půjde pouze Mike.
5. Na akci půjdou dva mafiáni.

Příklad 3.5. Určete, kolik prvků mají následující množiny

1. $\mathbb{N} \cap (-\infty, 7\rangle$
2. $\mathbb{Z} \cap (-9; 11\rangle$

Příklad 3.6. Vyberte ke každému výroku jeho správnou negaci

1. Dnes vyhraje Česko nebo Slovensko.

   (a) Dnes nevyhraje Česko ani Slovensko.

(b) Dnes vyhraje Česko.
(c) Dnes vyhraje Slovensko.
(d) Česko a Slovensko spolu dnes nebudou hrát.

2. Pokud dnes vyhraje Česko, potom budou slavit i na Slovensku.

   (a) Česko vyhraje a na Slovensku budou slavit.
   (b) Česko vyhraje a na Slovensku nebudou slavit.
   (c) Pokud dnes vyhraje Česko, potom na Slovensku nebudou slavit.
   (d) Pokud dnes nevyhraje Česko, potom na Slovensku nebudou slavit.

3. Dnes nevyhraje Česko ani Slovensko.

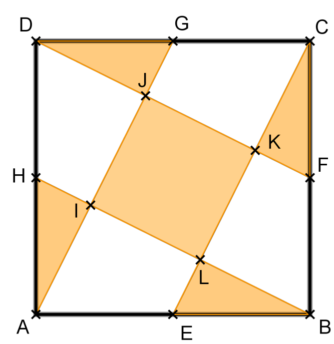
   (a) Dnes vyhraje Česko i Slovensko.
   (b) Dnes vyhraje Česko nebo Slovensko.
   (c) Česko vyhraje právě tehdy, když vyhraje Slovensko.
   (d) Česko dnes jako vždy vyhraje.

4. Pokud dnes vyhraje Česko nebo Slovensko, budeme slavit.

   (a) Pokud budeme slavit, potom dnes vyhraje Česko nebo Slovensko.
   (b) Dnes vyhraje Česko nebo Slovensko.
   (c) Dnes vyhraje Česko nebo Slovensko a nebudeme slavit.
   (d) Dnes vyhraje Česko nebo Slovensko a budeme slavit.

4 Planimetrie

Příklad 4.1. Je dán čtverec $ABCD$ o straně 2 cm. Označme postupně E, F, G, H středy stran AB, BC, CD a AD. Úsečky AF, BG, CH a DE nám uvnitř čtverce vymezí menší čtverec, jehož vrcholy označme I, J, K, L tak, jak je na obrázku.



1. Určete délku úsečky AI.

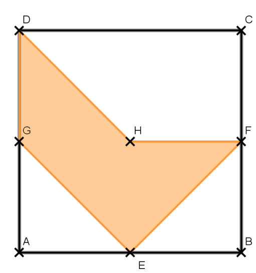
2. Určete délku strany čtverce $IJKL$.

3. Určete, kolik procent obsahu čtverce $ABCD$ zabírá vybarvená část.

Příklad 4.2. Je dána kružnice $k(S, r = 5\ cm)$.

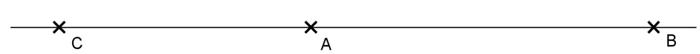
1. Určete poloměr kružnice, která bude mít čtyřnásobný obsah než má kružnice k.
2. Určete vzdálenost bodu S od bodu A, ze kterého lze vést ke kružnici k tečny takové, že body dotyku budou vzdáleny od bodu A právě 13 cm.
3. Určete vzdálenost bodu S od bodu B, ze kterého lze vést ke kružnici k tečny takové, že body dotyku od sebe budou vzdáleny 6 cm.
4. Určete vzdálenost bodu S od bodu C, ze kterého lze vést ke kružnici k dvě na sebe kolmé tečny.

Příklad 4.3. Je dán čtverec $ABCD$. Označme E střed úsečky AB, F střed úsečky BC, G střed úsečky AD a H střed úsečky BD.



1. Určete, jakou část obsahu čtverce $ABCD$ tvoří mnohoúhelník $GEFHD$.
2. Určete, v jakém poměru je obsah vybarvené plochy čtverce ku obsahu nevybarvené části čtverce.

Příklad 4.4. Jsou dány body A, B, C ležící na jedné přímce. Sestrojte přímku p procházející bodem C tak, aby na ní existoval právě jeden bod X, pro který je trojúhelník ABX pravoúhlý s přeponou AB. Nalezněte všechna řešení.



Příklad 4.5. V rovnoběžníku $ABCD$ o výšce 4 cm má delší strana délku 5 cm a delší úhlopříčka 8 cm.

1. Určete odchylku delší úhlopříčky a kratší strany v tomto čtyřúhelníku.
2. Délka kratší strany v rovnoběžníku je
   (a) 3,5 cm
   (b) $\sqrt{39} - 3$ cm
   (c) $4\sqrt{3} - 3$ cm
   (d) $\sqrt{48}$ cm

Příklad 4.6. Obsah rovnoramenného lichoběžníku s obvodem 20 cm, pro který platí, že součet jeho základen je stejný jakou součet ramen a poměr délek základen je 1 : 4, je

a) 16 cm^2

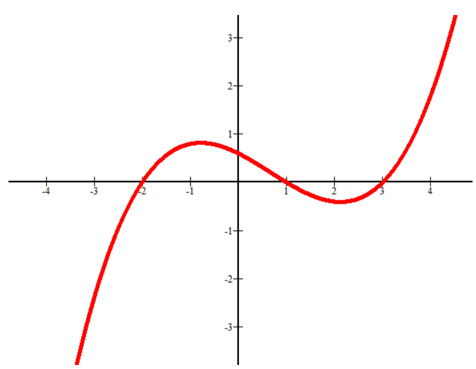
b) 20 cm^2

c) 40 cm^2

d) 54 cm^2

5 Funkce

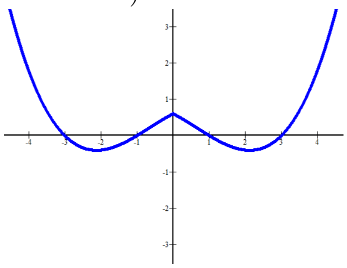
Příklad 5.1. Na obrázku vidíte graf funkce f.



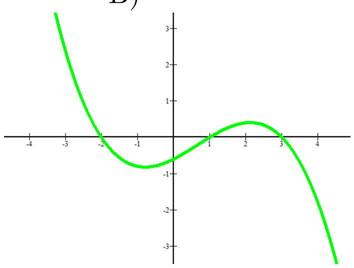
Přiřaďte grafům jejich předpisy.

1. $g : y = f(-x)$
2. $h : y = f(x - 2)$
3. $k : y = f(x + 2)$
4. $l : y = f(|x|)$
5. $m : y = |f(x)|$
6. $n : y = 2 + f(x)$
7. $o : y = -2 + f(x)$
8. $p : y = -f(x)$
9. $q : y = 2 - f(x)$

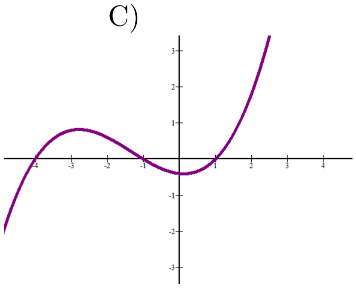
A)



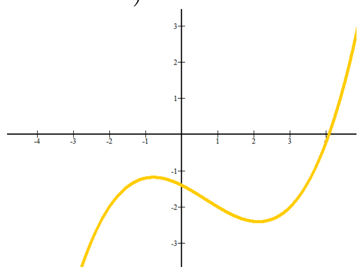
B)



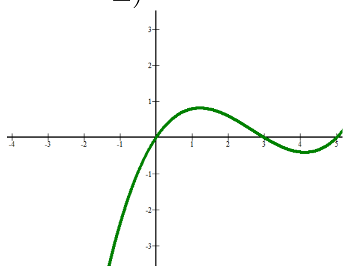
C)



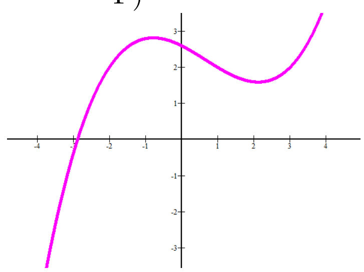
D)



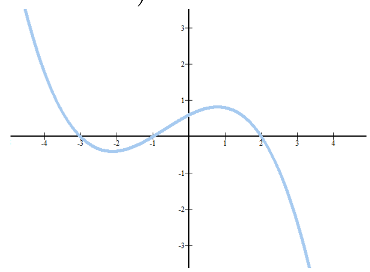
E)



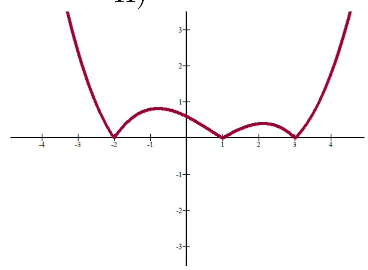
F)



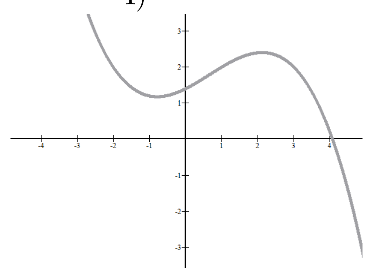
G)



H)



I)



Příklad 5.2. Vyplňte tabulku a dále načrtněte graf funkce $f : y = |x+2| + |x| + |x-2|$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

1. Určete, kolik řešení budou mít rovnice

   (a) $|x+2| + |x| + |x-2| = 4$

   (b) $|x+2| + |x| + |x-2| = 6$

   (c) $|x+2| + |x| + |x-2| = 8$

2. Určete řešení nerovnice

$$|x+2| + |x| + |x-2| < 9$$

Příklad 5.3. Je dána funkce $f : y = 6 - x - x^2$. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

1. Grafem funkce f je parabola.

2. Graf funkce f protíná osu y ve dvou bodech.

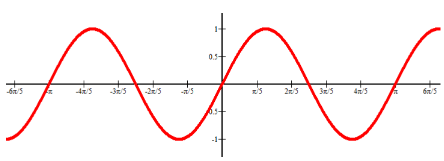
3. Funkce f má minimum v bodě $[-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}]$.
4. Funkce f je na intervalu $(0, \infty)$ klesající.
5. Platí, že $f(-1) = 6$.
6. Funkce f je lichá.

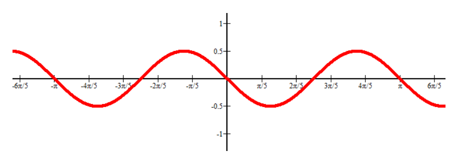
Příklad 5.4. Je dána funkce $f : y = \log_{0,5} x$. Vyberte správnou odpověď:

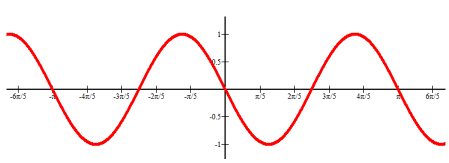
1. Definičním oborem funkce f je
   (a) $\mathbb{R}$
   (b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (c) $(0, \infty)$
   (d) $\langle 0, \infty)$
2. Oborem hodnot funkce f je
   (a) $\mathbb{R}$
   (b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (c) $(0, \infty)$
   (d) $\langle 0, \infty)$
3. Funkce f je
   (a) Klesající na definičním oboru.
   (b) Rostoucí na definičním oboru.
   (c) Shora ohraničená.
   (d) Zdola ohraničená.
4. Funkce f není
   (a) Prostá.
   (b) Monotónní.
   (c) Sudá.
   (d) inverzní k funkci $g : y = 2^{-x}$.

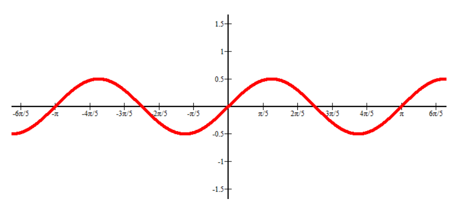
Příklad 5.5. Je dána funkce $f : y = \sin x \cos x$.

1. Na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ řešte rovnici $f(x) = \frac{1}{4}$
2. Který z grafů patří funkci f?

a) 

c) 

b) 

d) 

Příklad 5.6. Je dána funkce $f : y = \frac{2x+2}{1-x}$. Doplňte následujících tvrzení:

1. Grafem funkce f je ....
2. Funkce má dvě asymptoty a to přímku $x =$ ..... a přímku $y =$ ......
3. Graf funkce f protíná osu x v bodě [......., ...] a osu y v bodě [......., ...].

6 Rovnice a nerovnice

Příklad 6.1. V oboru reálných čísel řešte nerovnici

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x - 10} \geq 0.$$

Příklad 6.2. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{1}{3^{5-2x}} = 27.$$

Příklad 6.3. Stanovte podmínky, poté řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$3 - \sqrt{3 - x} = x.$$

Příklad 6.4. Zvětšíme-li jednu stranu obdélníka o 2 cm a druhou o 1 cm zmenšíme, zmenší se nám obsah o 1 cm^2. Uděláme-li to však naopak (tj. první stranu zmenšíme o 1 cm a druhou zvětšíme o 2 cm), zvětší se nám obsah o 5 cm^2. Určete původní rozměry obdélníku.

Příklad 6.5. V obchodě prodávají lyže. Na každý den vyhlásili akci. Ve který den se vyplatí lyže koupit:

1. V pondělí slevíme na 70% původní ceny.
2. V úterý slevíme o 30% oproti původní ceně.
3. Ve středu slevíme o třetinu z původní ceny.
4. Ve čtvrtek vezmeme pondělní a středeční cenu, sečteme je a budeme je prodávat za polovic tohoto součtu.
5. V pátek zdražíme o 50% oproti původní ceně.
6. V sobotu budeme prodávat za polovinu páteční ceny.
7. V neděli máme zavřeno.

Příklad 6.6. Pro neznámé x, a, b, p, u platí vztah

$$\frac{x^2}{a} = 2ub - p.$$

1. Vyjádřete neznámou b
2. Vyjádřete neznámou x

Příklad 6.7. Bleška Blanka se posadila na konec minutové ručičky dlouhé $1,5\ cm$. Veška Věrka se posadila na konec hodinové ručičky dlouhé $1\ cm$. Určete kolikrát větší vzdálenost urazí Blanka za jeden den než Věrka?

Příklad 6.8. Třída jela na školní výlet do Českého ráje. Pan učitel chtěl nakopírovat dětem mapu v měřítku $1 : 75000$. Aby ušetřil, nastavil zmenšení mapy z formátu $A4$ na formát papíru $A6$. Na kopii mapy je trasa výletu dlouhá $10\ cm$. Jak dlouho budou děti na výletě, jestliže půjdou průměrnou rychlostí $3\ km/h$ a zastaví se na dvě hodiny na hradě Kost?

Příklad 6.9. Krejzule obecná se živí pouze škorvaněmi. Smečka složená z pěti malých krejzulí, čtyř samiček a tří samečků spořádá za týden 5600 škorvaní. Navíc platí, že tři malé krejzule sní denně totéž, co dvě dospělé samičky, a dospělí samečci spořádají za den dvakrát tolik, co samičky. Určete,kolik škorvaní spořádá za 30 dní smečka složená ze 7 malých krejzulí, 8 samiček a 5 samečků.

7 Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Příklad 7.1. Do třídy chodí 30 studentů, z toho je 8 dívek a 22 kluků.

1. Určete, kolika způsoby se mohou studenti celé třídy rozdělit do šestičlenných družstev.
2. Určete, kolika způsoby můžeme vybrat šestičlenný volejbalový tým.
3. Určete, kolika způsoby můžeme vybrat šestičlenný volejbalový tým, má-li v něm být alespoň jedna dívka.
4. Určete, kolika způsoby můžeme vybrat šestičlenný volejbalový tým, má-li v něm být právě jedna dívka.
5. Určete, kolika způsoby můžeme vybrat šestičlenný volejbalový tým, nemá-li v něm být žádná dívka.
6. Určete, kolika způsoby můžeme vybrat šestičlenný volejbalový tým, má-li v něm být alespoň jeden kluk a alespoň jedna dívka.
7. Určete, kolika způsoby můžeme vybrat ze šestičlenný volejbalový tým, má-li v něm být právě tři dívky.

Příklad 7.2. V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$\binom{n}{n-2} = 3n + 15.$$

Příklad 7.3. Číslům v prvním řádku přiřaďte rovnající se čísla z druhého řádku

1. $5!$	2. $\binom{10}{2}$	3. $\binom{9}{3}$	4. $(4!)^2$	5. $\binom{1000}{999}$
a) 84	b) 1000	c) 120	d) 576	e) 45

Příklad 7.4. Šmudla, Rýpal, Kýchal, Štístko, Prófa, Stydlín a Dřímal vyrazili za prací po uzoučké cestě, kde šli jeden po druhém v řadě. Štístko šel těsně před Prófou. Rýpal, Kýchal a Stydlín šli hned za sebou (ne nutně v tomto pořadí). Dřímal šel poslední. Určete, kolika možnými způsoby mohli jít.

Příklad 7.5. V klobouku kouzelníka Pokustóna žije kromě Boba a Bobka ještě dalších 7 bílých králíků a 5 černých králíků, o kterých však (zatím) pohádky nepovídají.

1. Náhodně vytáhneme z klobou králíka.
   (a) S jakou pravděpodobností to bude bílý králík?
   (b) S jakou pravděpodobností to bude Bob?
2. Náhodně z klobouku vytáhneme králíka a pustíme ho ven. Nyní vytáhneme druhého králíka.
   (a) S jakou pravděpodobností bude druhý tažený králík bílý?
   (b) S jakou pravděpodobností bude druhý tažený králík Bob?

Příklad 7.6. V matematické loterii se losuje 10 písmen z 26 (klasická abeceda s písmeny bez diakritiky), přičemž první cenu vyhraje ten, který bude mít správně všech 10 písmen, druhou cenu vyhraje ten, který bude mít alespoň polovinu písmen a třetí cenu získá ten, který neuhodne ani jedno písmeno. Písmenka se do osudí po vytažení zpět nevrací a nezáleží na tom, v jakém pořadí byla písmena tažena.

1. Určete pravděpodobnost zisku první ceny.
2. Určete pravděpodobnost zisku druhé ceny.
3. Určete pravděpodobnost zisku třetí ceny.
4. Již se vylosovalo 9 písmen a všechna mám na svém tiketu. S jakou pravděpodobností vylosují i mé poslední písmeno?

Příklad 7.7. Seřaďte dané pravděpodobnosti od nejvyšší po nejnižší.

a) Pravděpodobnost, že při hodu dvěma mincemi padne na obou orel.

b) Pravděpodobnosti, že padne na klasické kostce sudé číslo.

c) Pravděpodobnost, že mi při hodu dvěma kostkami padnou na obou kostkách stejná čísla.

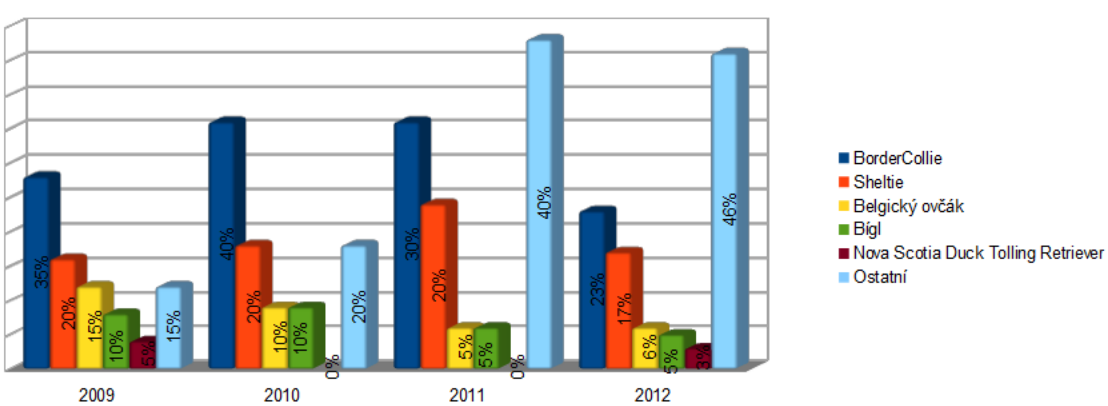
d) Pravděpodobnost, že mi při hodu dvěma kostkami padnou na obou kostkách dvě pětky.

e) Pravděpodobnost, že při hodu pěti kostkami padne alespoň jedna šestka.

Příklad 7.8. Petr má ve škole velmi špatné známky z matematiky. Jeho průměrná známka ze všech písemek je p.

1. Určete, jaký by byl Petrův průměr známek, pokud by všechny písemky napsal o stupeň lépe.
   (a) Průměr známek se nezmění, zůstane p.
   (b) Průměr známek se zvýší, bude $p + 1$.
   (c) Průměr známek se sníží, bude $p - 1$.
   (d) Z uvedených údajů nelze rozhodnout.
2. Určete, jaký by byl Petrův průměr, pokud by jednu písemku napsal o stupeň hůře.
   (a) Průměr známek se nezmění, zůstane p.
   (b) Průměr známek se zvýší.
   (c) Průměr známek se sníží.
   (d) Z uvedených údajů nelze rozhodnout.

Příklad 7.9. V Brně pořádají každý rok závody agility na Výstavišti. Na grafu vidíte procentuální zastoupení jednotlivých plemen v jednotlivých letech, přičemž v roce 2009 se účastnilo závodů 160 psů, v roce 2010 to bylo 180 psů, o rok později dokonce 240 psů a v roce 2013 to bylo 200 závodících psů.



1. Určete, kolik bíglů se za všechny 4 roky účastnilo závodů?
2. Určete, ve kterém roce se účastnilo co do počtu nejvíce psů z kategorie ostatních plemen.

3. V roce 2010 byla šestina psů z kategorie ostatních plemen bíle zbarvená. Určete, kolik psů z kategorie ostatních plemen nebylo bíle zbarvených.

4. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

   (a) V roce 2011 se závodů účastnil větší počet sheltií než v roce 2010.

   (b) V roce 2011 se závodů účastnilo více sheltií než v roce 2012 border colií.

   (c) Border colií bylo v letech 2010 a 2011 stejný počet.

8 Analytická geometrie

Příklad 8.1. V rovině jsou dány body A, B, C, $A[-1, 2]$, $B[9, -3]$, $C[4, 7]$.

1. Přiřaďte jednotlivým bodům jejich vlastnosti.

   1. $[4, 2]$
   2. $[4, -\frac{1}{2}]$
   3. $[-6, 12]$

   (a) Střed strany AB

   (b) Vrchol D rovnoběžníku $ABCD$

   (c) Těžiště trojúhelníku ABC

2. Přiřaďte jednotlivým vektorům jejich vlastnosti.

   1. $(1, -2)$
   2. $(1, 2)$
   3. $(2, 2)$
   4. $(0, 1)$

   (a) Normálový vektor přímky AB

   (b) Směrový vektor těžnice na stranu AB v trojúhelníku ABC

   (c) Normálový vektor výšky na stranu AC v trojúhelníku ABC

   (d) Směrový vektor přímky BC

3. Rozhodněte, zda jsou pravdivá následující tvrzení:

   (a) Trojúhelník ABC je pravoúhlý.

   (b) Obsah trojúhelníku ABC je $37,5$.

   (c) Bod, který je patou výšky na stranu AB, má souřadnice $[1, 1]$.

Příklad 8.2. V rovině jsou dány přímky $p : x + y - 5 = 0$, $q : x - 2 = 0$.

1. Určete obsah trojúhelníku ohraničeného souřadnicovými osami a přímkou p.

2. Určete obsah lichoběžníku ohraničeného přímkami p, q a souřadnicovými osami.

3. Vyberte správnou variantu:

   (a) Přímka procházející počátkem souřadnic a je kolmá k přímce p má vyjádření

      i) $x + y = 0$

      ii) $y = x$

iii) $x = t,\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}$
iv) $y = 2x$

(b) Přímka procházející bodem průsečíkem přímek p, q, která je rovnoběžná s osou x má vyjádření:
i) $y + 3 = 0$
ii) $x - 3 = 0$
iii) $x = -17 + t,\ y = 3,\ t \in \mathbb{R}$
iv) $y = x + 3$

(c) Přímky p, q svírají úhel
i) 30°
ii) 45°
iii) 60°
iv) 90°

(d) Vzdálenost počátku souřadnic od přímky p je
i) $\sqrt{5}$
ii) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
iii) 5
iv) 2,5

(e) Přímka q dělí trojúhelník ohraničený souřadnicovými osami a přímkou p na lichoběžník a trojúhelník, jejichž obsahy jsou v poměru.
i) 1 : 1
ii) 8 : 3
iii) 16 : 9
iv) 3 : 2

(f) Počet bodů , které leží uvnitř nebo na hranici trojúhelníku ohraničeného souřadnicovými osami a přímkou p a které mají obě souřadnice celočíselné, je
i) 6
ii) 15
iii) 21
iv) 42

(g) Přímka, která obrazem přímky p ve středové souměrnosti podle počátku souřadnic, má vyjádření
i) $x + y + 5 = 0$
ii) $x - y + 5 = 0$
iii) $-x + y - 5 = 0$
iv) $x - y - 5 = 0$

(h) Přímka, která je obrazem přímky p v osové souměrnosti podle přímky q, má vyjádření
i) $y = x + 1$
ii) $x = -1 + t, 1 + t,\ t \in \mathbb{R}$
iii) $x + y + 1 = 0$
iv) $y = 3.$

9 Stereometrie

Příklad 9.1. Určete, kolik hran, stěn a vrcholů mají následující tělesa:

těleso	počet vrcholů	počet stěn	počet hran
pravidelný čtyřstěn			
pravidelný trojboký hranol			
pravidelný čtyřboký jehlan			
pravidelný pětiboký komolý jehlan			

Příklad 9.2. Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hrany délky a. Označme S střed stěny $EFGH$, O střed hrany AB.

1. Přiřaďte úsečkám jejich správné délky

   i) AS
   ii) SO
   iii) GO
   iv) FD

   (a) $a\sqrt{3}$
   (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}a$
   (c) $\frac{\sqrt{6}}{2}a$
   (d) $\frac{3}{2}a$

2. Pospojujte do dvojic navzájem rovnoběžné roviny

   i) ACF
   ii) OFH
   iii) OSA

   (a) XGH (X je střed BC)
   (b) EGD
   (c) XYG (X je střed BC, Y střed CD)

3. Přiřaďte daným tělesům jejich objemy.

   i) Trojboký jehlan $ABDS$.
   ii) Trojboký jehlan $EFSO$
   iii) Čtyřboký jehlan $OBFES$

   (a) $\frac{1}{12}a^3$
   (b) $\frac{1}{6}a^3$
   (c) $\frac{1}{8}a^3$

4. Krychli rozřežme na 125 shodných krychliček a dále udělejme dva řezy, jeden rovinou $ACGE$ a jeden rovinou $BDHF$. Určete, kolik ze 125 menších krychliček zůstane vcelku?

   (a) 75 (b) 80 (c) 95 (d) 105

5. Krychli rozřežeme na 125 shodných krychliček a odebereme v každém vrcholu krychle jednu rohovou krychličku. Určete, jak tím změníme povrch krychle:

   (a) Povrch se nezmění.
   (b) Povrch se zmenší.
   (c) Povrch se zvětší.

(d) Na otázku nelze jednoznačně odpovědět.

Příklad 9.3. Uvažujme pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, pro který bude platit, že je trojúhelník ACV rovnostranný. Označme U, V, W, X těžiště stěn ABV, BCV, CDV, ADV a S střed podstavy $ABCD$. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení

1. Výška jehlany $UVWXS$ je jednou třetinou výšky jehlanu $ABCDV$.
2. Jehlan $UVWXS$ má délku podstavné hrany rovnu dvěma třetinám délky podstavné hrany jehlanu $ABCDV$.
3. Objemy jehlanů $ABCDV$ a $UVWXV$ jsou v poměru $6\sqrt{2} : 1$.
4. Trojúhelník UWS je rovnostranný.

Příklad 9.4. Krabička na dárky má tvar hranolu s hvězdicovou podstavou. Tuto hvězdu dostaneme tak, že ke každé straně šestiúhelníku o straně délky 3 cm přidáme rovnostranný trojúhelník se stejnou délkou strany. Výška krabičky je 1 dm. Vypočtěte objem této krabičky.

Příklad 9.5. Osovým řezem válce je čtverec s úhlopříčkou dlouhou $\sqrt{32}$ cm.

1. Objem válce je
   (a) $64\pi\ cm^3$
   (b) $32\sqrt{2}\pi\ cm^3$
   (c) $24\pi\ cm^3$
   (d) $16\pi\ cm^3$
2. Povrch válce je
   (a) $20\pi\ cm^2$
   (b) $24\pi\ cm^2$
   (c) $32\pi\ cm^2$
   (d) $64\pi\ cm^2$

10 Posloupnosti

Příklad 10.1. Tim stavěl dům z karet. Vždy k sobě přiložil dvě karty do tvaru střechy a z těchto dvojic vytvořil řadu. Na dvě sousední střechy vždy položil jednu kartu naležato. Na to opět stavěl další řadu střech. Takto pokračoval až do posledního patra, kde postavil k sobě dvě karty a dostal jen jednu stříšku. Do dolní řady postavil Tim 8 stříšek.

1. Kolik stříšek obsahuje celá stavba?
   (a) 36 (b) 64 (c) 72 (d) 100
2. Kolik karet použil Tim celkem na prokládání mezi jednotlivými řadami střech?
   (a) 20 (b) 28 (c) 32 (d) 50

3. Kolik karet celkově Tim použil?

   (a) 72 (b) 90 (c) 98 (d) 100

Příklad 10.2. Součet sta po sobě jdoucích přirozených čísel, které všechny dávají zbytek 1 po dělení pěti, je 28350. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení

1. Nejmenší z těchto čísel je 36.
2. Největší z těchto čísel je 536.
3. Součin těchto čísel je určitě větší než $30^{1}00$.
4. Vzdálenost nejmenšího a největší takovéhoto čísla na číselné ose je 500.

Příklad 10.3. Uvažujme přirozené číslo $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, $a, b, c \in N$. Přičemž exponenty a, b, c tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem různým od jedné. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení

1. Číslo m je jistě dělitelné 4.
2. Číslo m je jistě dělitelné 9.
3. Číslo m je jistě dělitelné 25.
4. Je-li součet exponentů čísla m roven 14, potom existuje právě jedno takové číslo m.

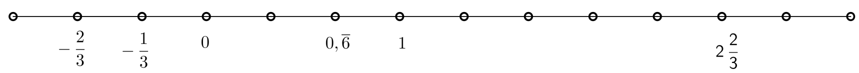
Příklad 10.4. Odečteme-li od čísel $15, 23, 39$ stejné číslo, dostaneme tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete, které číslo musíme odečíst?

Příklad 10.5. Kolik korun nastřádáme za 10 let, jestliže na počátku každého roku vložíme do banky 3000 Kč, banka úročí $2,6\%$ na konci každého roku a daň z úroku je 15%?

Řešení

1 Základy matematiky - výsledky

Příklad 1.1.

1. 

2. (a) $3,\overline{3}\ cm$ (b) $11,\overline{1}\ cm$ (c) $60\ cm$

Příklad 1.2. 1. $\frac{7}{18}$ 2. $\frac{10}{99}$

Příklad 1.3.

1. $2^{26}\cdot 3^{20}$.
2. 567
3. 6.
4. $b = 2^{26}\cdot 3^{20}\cdot 5^{14}$.
5. 96 a 128.
6. 1001

Příklad 1.4.

1. Číslo 2 se zde vyskytuje s exponentem 50.
2. Číslo 7 se zde vyskytuje s exponentem 7.
3. 15.
4. 210

Příklad 1.5. 1. 21 2. 15

Příklad 1.6.

1. $\binom{10}{0} < \binom{10}{9} < \binom{10}{2} < 10^2 < 2^{10} < 10! < 10^{10}$
2. $\log_3 2 < \log_5 5 < \sqrt{3} < \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \sqrt[3]{9} < \ln 27$

2 Výrazy - výsledky

Příklad 2.1.

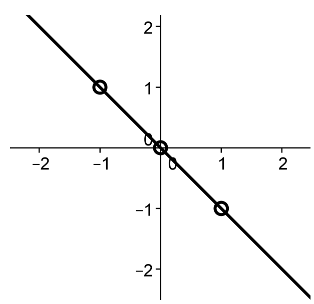
1. $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$
2. $\frac{a-1}{a+2}$
3. $a = -5$

Příklad 2.2.

1. $(x-2)(x-y)(x+y)$
2. $x = 2$
3. 9

Příklad 2.3. 1. $-\frac{x}{2y}$

2.



Příklad 2.4. Podíl je $2x^2 + x - 3$ a zbytek $x + 1$.

Příklad 2.5. $s = -2$

Příklad 2.6. $2x^3 + x^2 + 1$ a $2x^3 + x + 1$

3 Výroky a množiny - výsledky

Příklad 3.1.

1. Ano
2. Ne
3. Ano
4. Ne
5. Ne
6. Ano
7. Ne
8. Ano
9. Ano

Příklad 3.2. 1. 64 2. 32 3. 16

Příklad 3.3.

1. 5 2. 13 3. 3 4. 15 5. 2 6. 10

Příklad 3.4.

1. Ne 2. Ano 3. Ne 4. Ano 5. Ano

Příklad 3.5. Určete, kolik prvků mají následující množiny

1. 7
2. 20

Příklad 3.6. 1. a 2. b 3. b 4. c

4 Planimetrie - výsledky

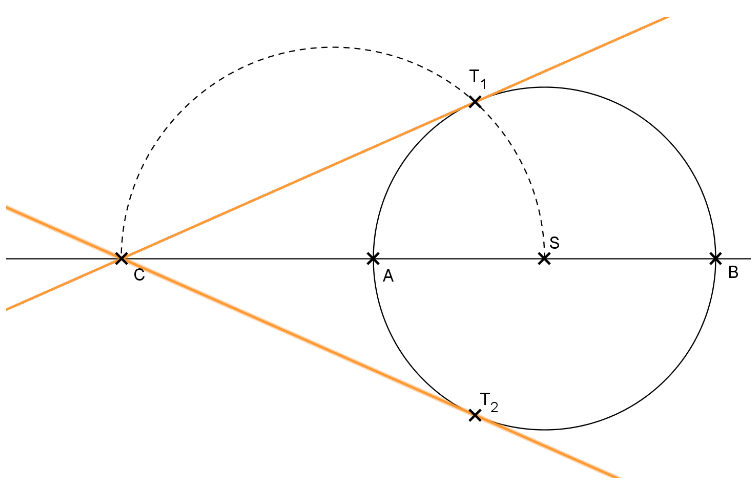
Příklad 4.1. 1. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 2. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 3. 40%

Příklad 4.2.

1. $10\ cm$ 2. $14\ cm$ 3. $6,25\ cm$ 4. $5 \cdot \sqrt{2}\ cm$

Příklad 4.3. 1. $\frac{3}{8}$ 2. $3 : 5$

Příklad 4.4.



Příklad 4.5. 1. 30° 2. c

Příklad 4.6. b

5 Funkce - výsledky

Příklad 5.1.

A) 4 B) 8 C) 3 D) 7 E) 2 F) 6 G) 1 H) 5 I) 9

Příklad 5.2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	5	4	5	6	9

1. (a) 0 (b) 1 (c) 2
2. $(-1, 1)$

Příklad 5.3.

1. Ano 2. Ne 3. Ne 4. Ano 5. Ano 6. Ne

Příklad 5.4. 1. c 2. a 3. a 4. c

Příklad 5.5. 1. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$ 2. d

Příklad 5.6.

1. Grafem funkce f je hyperbola.
2. Funkce má dvě asymptoty a to přímku $x = 1$ a přímku $y = -2$.
3. Graf funkce f protíná osu x v bodě $[-1, 0]$ a osu y v bodě $[0, 2]$.

6 Rovnice a nerovnice - výsledky

Příklad 6.1. $x \in (-\infty, -5) \cup \langle -1, 2) \cup \langle 3, \infty)$

Příklad 6.2. $x = 4$

Příklad 6.3. $x = 2$, $x = 3$

Příklad 6.4. 3×5 cm

Příklad 6.5. Ve středu.

Příklad 6.6.

1. $b = \frac{x^2+pa}{2ua}$
2. $x = \sqrt{2uba - pa}$

Příklad 6.7. 18

Příklad 6.8. 7 hodin

Příklad 6.9. 40800

7 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika - výsledky

Příklad 7.1.

1. $\binom{30}{6} \cdot \binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{1}$
2. $\binom{30}{6}$
3. $\binom{30}{6} - \binom{22}{6}$
4. $\binom{8}{1} \cdot \binom{22}{5}$
5. $\binom{22}{6}$
6. $\binom{30}{6} - \binom{22}{6} - \binom{8}{6}$
7. $\binom{22}{3} \cdot \binom{8}{3}$

Příklad 7.2. $n = 10$

Příklad 7.3.

1. c
2. e
3. a
4. d
5. b

Příklad 7.4. 36

Příklad 7.5.

1. (a) $\frac{9}{14}$ (b) $\frac{1}{14}$
2. (a) $\frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13}$ (b) $\frac{13}{14} \cdot \frac{1}{13}$

Příklad 7.6.

1. $\frac{1}{\binom{26}{10}}$
2. $1 - \frac{\binom{16}{10}}{\binom{26}{10}}$
3. $\frac{\binom{16}{10}}{\binom{26}{10}}$
4. $\frac{1}{17}$.

Příklad 7.7. e, b, a, c, d

Příklad 7.8. 1. c 2. b

Příklad 7.9.

1. 56
2. 2011
3. 30
4. Ano, Ano, Ano

8 Analytická geometrie - výsledky

Příklad 8.1.

1. (a) Bod $[4, 2]$ je těžištěm trojúhelníku ABC.
   (b) Bod $[4, -\frac{1}{2}]$ je středem strany AB.
   (c) Bod $[-6, 12]$ je vrcholem D rovnoběžníku $ABCD$.
2. (a) Vektor $(1, -2)$ je směrový vektor přímky BC.
   (b) Vektor $(1, 2)$ je normálový vektor přímky AB.
   (c) Vektor $(2, 2)$ je normálový vektor výšky na stranu AC v trojúhelníku ABC.
   (d) Vektor $(0, 1)$ je směrový vektor těžnice na stranu AB v trojúhelníku ABC.
3. (a) Ne
   (b) Ano
   (c) Ano

Příklad 8.2.

1. 12,5
2. 8
3. (a) ii (b) iii (c) ii (d) ii (e) iii (f) iii (g) i (h) i

9 Stereometrie - výsledky

Příklad 9.1.

těleso	počet vrcholů	počet stěn	počet hran
pravidelný čtyřstěn	4	4	6
pravidelný trojboký hranol	6	5	9
pravidelný čtyřboký jehlan	5	5	8
pravidelný pětiboký komolý jehlan	10	7	15

Příklad 9.2. Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hrany délky a. Označme S střed stěny $EFGH$, O střed hrany AB.

1. i) $\frac{\sqrt{6}}{2}a$ ii) $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ iii) $\frac{3}{2}a$ iv) $a\sqrt{3}$
2. i) $ACF \parallel EGD$ ii) $OFH \parallel XYG$ iii) $OSA \parallel XGH$
3. i) $\frac{1}{6}a^3$ ii) $\frac{1}{12}a^3$ iii) $\frac{1}{8}a^3$
4. b
5. a

Příklad 9.3. 1. Ano 2. Ne 3. Ne 4. Ne

Příklad 9.4. $270\sqrt{3}\ cm^2$

Příklad 9.5. 1. d 2. a

10 Posloupnosti - výsledky

Příklad 10.1. 1. a 2. b 3. d

Příklad 10.2.

1. Ano
2. Ne
3. Ano
4. Ne

Příklad 10.3.

1. Ne
2. Ano
3. Ne
4. Ne

Příklad 10.4. 7

Příklad 10.5. 33899 Kč.