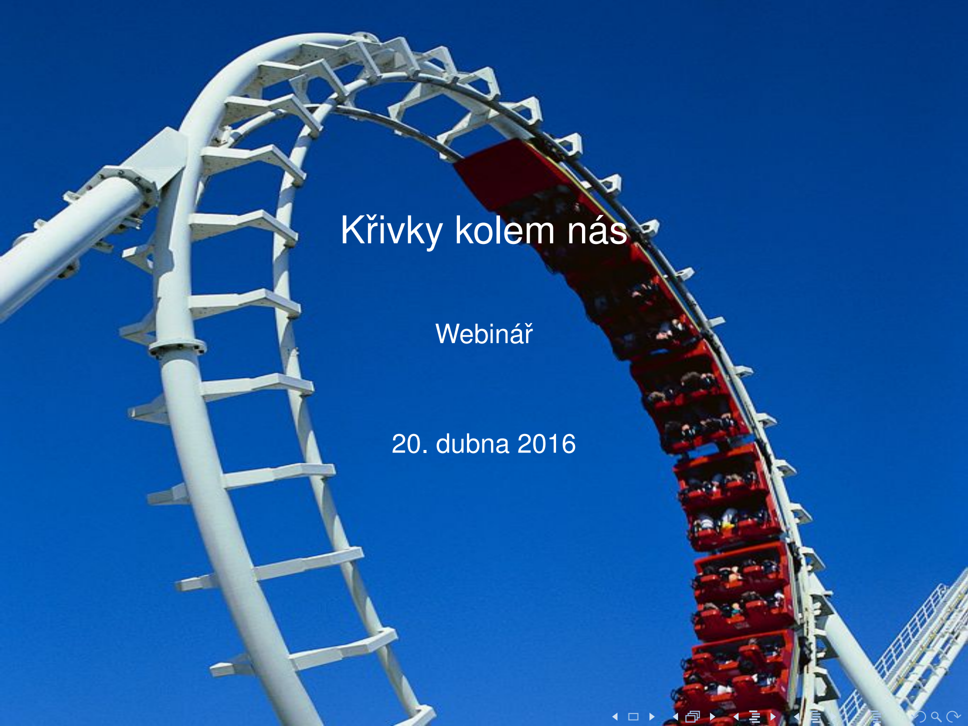


Křivky kolem nás

Webinář

20. dubna 2016

Přístup k funkcím

Funkce (zobrazení)

- Předpis, který přiřazuje jedné hodnotě x hodnotu $y = f(x)$.
- Je to množina $\mathcal{F}$ uspořádaných dvojic (x, y) takových, že pokud $(x, y_1) \in \mathcal{F}$ a $(x, y_2) \in \mathcal{F}$, potom $y_1 = y_2$.

Příklady

- $f : y = x^2$, $f : y = 2^x$, $f : y = x + 3$
- $x = 1$ není funkce
- Množina $\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ není funkce v našem slova smyslu.

Přístup k funkcím

Funkce (zobrazení)

- Předpis, který přiřazuje jedné hodnotě x hodnotu $y = f(x)$.
- Je to množina $\mathcal{F}$ uspořádaných dvojic (x, y) takových, že pokud $(x, y_1) \in \mathcal{F}$ a $(x, y_2) \in \mathcal{F}$, potom $y_1 = y_2$.

Příklady

- $f : y = x^2$, $f : y = 2^x$, $f : y = x + 3$
- $x = 1$ není funkce
- Množina $\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ není funkce v našem slova smyslu.

Přístup k funkcím

Funkce (zobrazení)

- Předpis, který přiřazuje jedné hodnotě x hodnotu $y = f(x)$.
- Je to množina $\mathcal{F}$ uspořádaných dvojic (x, y) takových, že pokud $(x, y_1) \in \mathcal{F}$ a $(x, y_2) \in \mathcal{F}$, potom $y_1 = y_2$.

Příklady

- $f : y = x^2$, $f : y = 2^x$, $f : y = x + 3$
- $x = 1$ není funkce
- Množina $\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ není funkce v našem slova smyslu.

Přístup k funkcím

Funkce (zobrazení)

- Předpis, který přiřazuje jedné hodnotě x hodnotu $y = f(x)$.
- Je to množina $\mathcal{F}$ uspořádaných dvojic (x, y) takových, že pokud $(x, y_1) \in \mathcal{F}$ a $(x, y_2) \in \mathcal{F}$, potom $y_1 = y_2$.

Příklady

- $f : y = x^2$, $f : y = 2^x$, $f : y = x + 3$
- $x = 1$ není funkce
- Množina $\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ není funkce v našem slova smyslu.

Přístup k funkcím

Funkce (zobrazení)

- Předpis, který přiřazuje jedné hodnotě x hodnotu $y = f(x)$.
- Je to množina $\mathcal{F}$ uspořádaných dvojic (x, y) takových, že pokud $(x, y_1) \in \mathcal{F}$ a $(x, y_2) \in \mathcal{F}$, potom $y_1 = y_2$.

Příklady

- $f : y = x^2$, $f : y = 2^x$, $f : y = x + 3$
- $x = 1$ není funkce
- Množina $\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ není funkce v našem slova smyslu.

Pohyb a křivka

Definice

Nechť je dán interval I (případně celá množina reálných čísel). Potom zobrazení $f : I \to \mathbb{R}^2$ nazýváme pohyb.

Definice

Množinu $\mathcal{C}$ bodů v rovině nazveme křivkou, jestliže existuje pohyb f takový, že $f(I) = \mathcal{C}$. Daný pohyb potom nazýváme parametrické vyjádření křivky $\mathcal{C}$

Poznámka

Uvědomme si, že uvedená definice nám nic neříká, kolik takových pohybů existuje. Může tedy existovat nekonečně mnoho parametrických vyjádření nějaké křivky, jak uvidíme na následujících příkladech.

Pohyb a křivka

Definice

Nechť je dán interval I (případně celá množina reálných čísel). Potom zobrazení $f : I \to \mathbb{R}^2$ nazýváme pohyb.

Definice

Množinu $\mathcal{C}$ bodů v rovině nazveme křivkou, jestliže existuje pohyb f takový, že $f(I) = \mathcal{C}$. Daný pohyb potom nazýváme parametrické vyjádření křivky $\mathcal{C}$

Poznámka

Uvědomme si, že uvedená definice nám nic neříká, kolik takových pohybů existuje. Může tedy existovat nekonečně mnoho parametrických vyjádření nějaké křivky, jak uvidíme na následujících příkladech.

Pohyb a křivka

Definice

Nechť je dán interval I (případně celá množina reálných čísel). Potom zobrazení $f : I \to \mathbb{R}^2$ nazýváme pohyb.

Definice

Množinu $\mathcal{C}$ bodů v rovině nazveme křivkou, jestliže existuje pohyb f takový, že $f(I) = \mathcal{C}$. Daný pohyb potom nazýváme parametrické vyjádření křivky $\mathcal{C}$

Poznámka

Uvědomme si, že uvedená definice nám nic neříká, kolik takových pohybů existuje. Může tedy existovat nekonečně mnoho parametrických vyjádření nějaké křivky, jak uvidíme na následujících příkladech.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření přímky $y = x$.
2. Určete parametrické vyjádření přímky $x = 1$.
3. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 0]$ a $[3, 0]$
4. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 1]$ a $[3, 3]$
5. Určete parametrické vyjádření kružnice s poloměrem 1 a středem v počátku souřadnic.
6. Určete parametrické vyjádření funkce $f : y = x^2$.
7. Určete parametrické vyjádření libovolné funkce $f : y = f(x)$.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření přímky $y = x$.
   Přímka $y = x$ může mít parametrické vyjádření $x = t, \ y = t$, $t \in \mathbb{R}$, ale také třeba $x = 3t, y = 3t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

2. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 0]$ a $[3, 0]$
   Tato úsečka může mít vyjádření $x = t, \ y = 0$, kde $t \in \langle 1, 3 \rangle$, ale také například $x = t + 1, \ y = 0$, kde $t \in \langle 0, 2 \rangle$, případně $x = 2t, \ y = 0$, kde $t \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření přímky $y = x$.
Přímka $y = x$ může mít parametrické vyjádření $x = t,\ y = t$, $t \in \mathbb{R}$, ale také třeba $x = 3t, y = 3t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

2. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 0]$ a $[3, 0]$
Tato úsečka může mít vyjádření $x = t,\ y = 0$, kde $t \in \langle 1, 3\rangle$, ale také například $x = t + 1,\ y = 0$, kde $t \in \langle 0, 2\rangle$, případně $x = 2t,\ y = 0$, kde $t \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření přímky $y = x$.
   Přímka $y = x$ může mít parametrické vyjádření $x = t,\ y = t$, $t \in \mathbb{R}$, ale také třeba $x = 3t, y = 3t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

2. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 0]$ a $[3, 0]$
   Tato úsečka může mít vyjádření $x = t,\ y = 0$, kde $t \in \langle 1, 3\rangle$, ale také například $x = t + 1,\ y = 0$, kde $t \in \langle 0, 2\rangle$, případně $x = 2t,\ y = 0$, kde $t \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření přímky $y = x$.
   Přímka $y = x$ může mít parametrické vyjádření $x = t,\ y = t$, $t \in \mathbb{R}$, ale také třeba $x = 3t, y = 3t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

2. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 0]$ a $[3, 0]$
   Tato úsečka může mít vyjádření $x = t,\ y = 0$, kde $t \in \langle 1, 3\rangle$, ale také například $x = t + 1,\ y = 0$, kde $t \in \langle 0, 2\rangle$, případně $x = 2t,\ y = 0$, kde $t \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$.

Parametrické vyjádření

Příklady

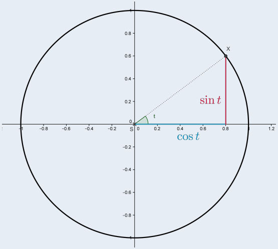
1. Určete parametrické vyjádření přímky $y = x$.
   Přímka $y = x$ může mít parametrické vyjádření $x = t,\ y = t$, $t \in \mathbb{R}$, ale také třeba $x = 3t, y = 3t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

2. Určete parametrické vyjádření úsečky s krajními body $[1, 0]$ a $[3, 0]$
   Tato úsečka může mít vyjádření $x = t,\ y = 0$, kde $t \in \langle 1, 3\rangle$, ale také například $x = t + 1,\ y = 0$, kde $t \in \langle 0, 2\rangle$, případně $x = 2t,\ y = 0$, kde $t \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření kružnice s poloměrem 1 a středem v počátku souřadnic.



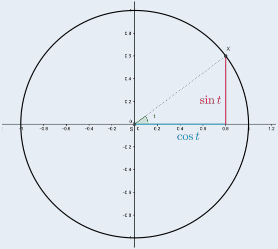
   Parametr t nám nyní reprezentuje úhel. Dostáváme tak vyjádření $x = \cos t,\ y = \sin t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi)$

2. Určete parametrické vyjádření libovolné funkce $f : y = f(x)$. Každá funkce je křivkou, protože $x = t,\ y = f(t),\ t \in D(f)$ nám zadává parametrické vyjádření funkce f.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření kružnice s poloměrem 1 a středem v počátku souřadnic.



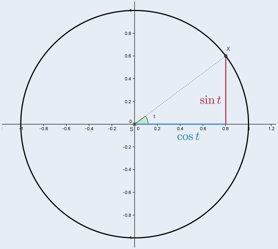
Parametr t nám nyní reprezentuje úhel. Dostáváme tak vyjádření $x = \cos t, \;\; y = \sin t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

2. Určete parametrické vyjádření libovolné funkce $f : y = f(x)$. Každá funkce je křivkou, protože $x = t, \;\; y = f(t), t \in D(f)$ nám zadává parametrické vyjádření funkce f.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření kružnice s poloměrem 1 a středem v počátku souřadnic.



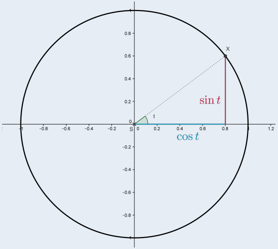
Parametr t nám nyní reprezentuje úhel. Dostáváme tak vyjádření $x = \cos t,\ y = \sin t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

2. Určete parametrické vyjádření libovolné funkce $f : y = f(x)$.
Každá funkce je křivkou, protože $x = t,\ y = f(t),\ t \in D(f)$ nám zadává parametrické vyjádření funkce f.

Parametrické vyjádření

Příklady

1. Určete parametrické vyjádření kružnice s poloměrem 1 a středem v počátku souřadnic.



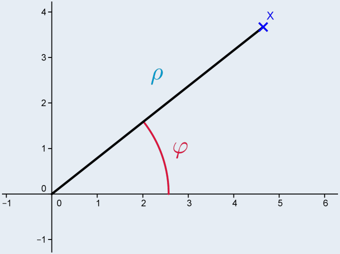
Parametr t nám nyní reprezentuje úhel. Dostáváme tak vyjádření $x = \cos t,\ y = \sin t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

2. Určete parametrické vyjádření libovolné funkce $f : y = f(x)$. Každá funkce je křivkou, protože $x = t,\ y = f(t),\ t \in D(f)$ nám zadává parametrické vyjádření funkce f.

Polární souřadnice

Definice

Křivku v rovině můžeme také vyjádřit pomocí takzvaných polárních souřadnic ρ, φ. Každý bod roviny $X = [x, y]$ totiž můžeme vyjádřit v souřadnicích $[\rho, \varphi]$, kde ρ značí vzdálenost bodu od počátku souřadnic 0 a φ značí odchylku kladné poloosy a polopřímky $0X$.



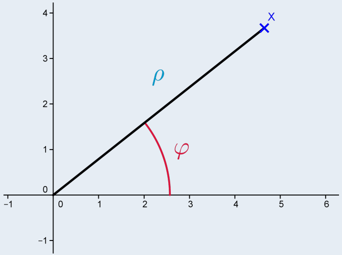
Kružnice se středem v počátku a poloměrem 1 mají v polárních souřadnicích vyjádření

$$\rho = 1.$$

Polární souřadnice

Definice

Křivku v rovině můžeme také vyjádřit pomocí takzvaných polárních souřadnic ρ, φ. Každý bod roviny $X = [x, y]$ totiž můžeme vyjádřit v souřadnicích $[\rho, \varphi]$, kde ρ značí vzdálenost bodu od počátku souřadnic 0 a φ značí odchylku kladné poloosy a polopřímky $0X$.



Kružnice se středem v počátku a poloměrem 1 mají v polárních souřadnicích vyjádření

$$\rho = 1.$$

Spirály

Nyní se již dostáváme k jednotlivým typům křivek.

Definice

Pohybuje-li se bod X po přímce, která ze zároveň otáčí okolo jiného bodu, opíše nám bod X křivku, které říkáme spirála.

Archimedova spirála

Definice

Jsou-li oba pohyby rovnoměrné, potom dostáváme spirálu, které říkáme Archimedova spirála.

V polárních souřadnicích má Archimedova spirála vyjádření:

$$\rho = a \cdot \varphi,$$

kde a je libovolné kladné reálné číslo.

Archimedova spirála

Definice

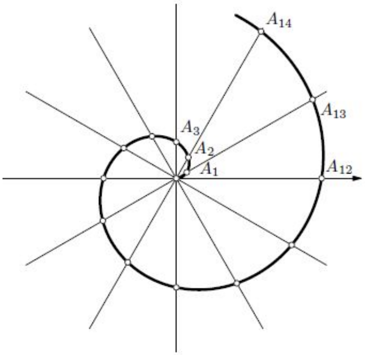
Jsou-li oba pohyby rovnoměrné, potom dostáváme spirálu, které říkáme Archimedova spirála.

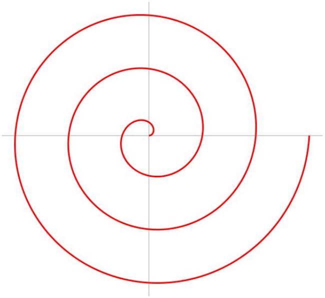
V polárních souřadnicích má Archimedova spirála vyjádření:

$$\rho = a \cdot \varphi,$$

kde a je libovolné kladné reálné číslo.

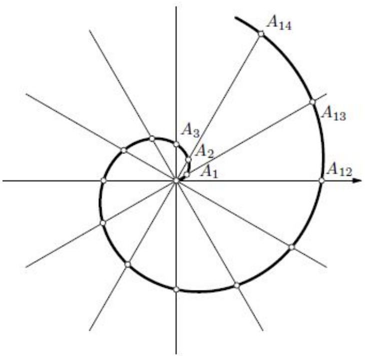
Archimedova spirála

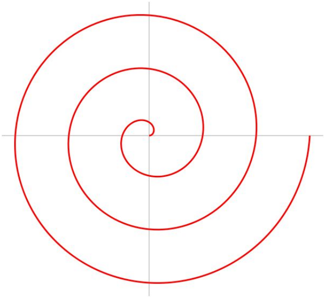




Sousední body na jednom paprsku jsou od sebe vzdáleny $2\pi a$, tj. vzdálenosti těchto bodů od počátku (pólu spirály) tvoří aritmetickou posloupnost.

Archimedova spirála





Sousední body na jednom paprsku jsou od sebe vzdáleny $2\pi a$, tj. vzdálenosti těchto bodů od počátku (pólu spirály) tvoří aritmetickou posloupnost.

Logaritmická spirála

Definice

Křivku, jež má polární souřadnice

$$\rho = a^{b \cdot \varphi},$$

kde a, b jsou libovolná kladná reálná čísla, nazýváme logaritmická spirála.

- První, kdo ji objevil, byl René Descartes.
- Někdy též Bernoulliho spirála.

Logaritmická spirála

Definice

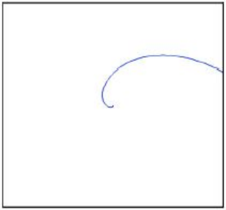
Křivku, jež má polární souřadnice

$$\rho = a^{b \cdot \varphi},$$

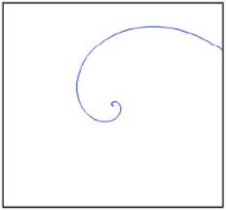
kde a, b jsou libovolná kladná reálná čísla, nazýváme logaritmická spirála.

- První, kdo ji objevil, byl René Descartes.
- Někdy též Bernoulliho spirála.

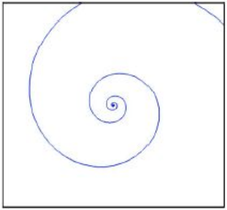
Logaritmická spirála



$a = 1 \ \ b = 1$

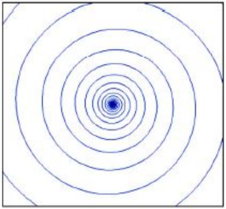


$a = 1 \ \ b = 0{,}5$

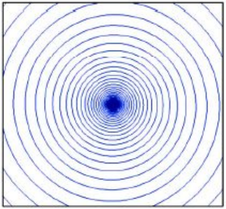


$a = 1 \ \ b = 0{,}2$

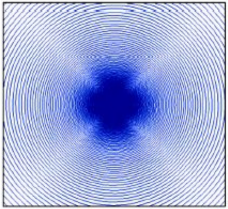
$a = 1 \ \ b = 0{,}05$



$a = 1 \ \ b = 0{,}02$



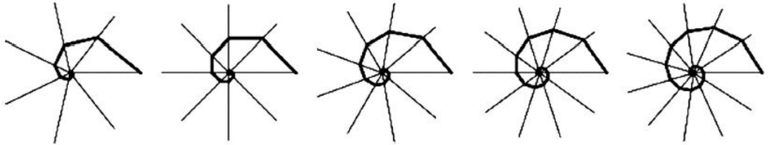
$a = 1 \ \ b = 0{,}005$



Logaritmická spirála

Konstrukce

Rozdělíme na n částí. Poté konstruujeme kolmice k polopřímkám.



Tečna v daném bodě je vždy kolmá k průvodiči.

Logaritmická spirála

Konstrukce

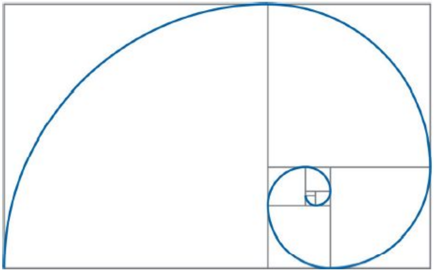
Rozdělíme na *n* částí. Poté konstruujeme kolmice k polopřímkám.

Tečna v daném bodě je vždy kolmá k průvodiči.

Logaritmická spirála

Zlatá spirála

Uvažujme obdélník s poměrem stran v poměru zlatého řezu. Vepisujme do něho čtvrtkružnice. Dostaneme tak spirálu, které se říká Zlatá spirála a která se blíží ke spirále logaritmické.



Kde najdeme logaritmickou spirálu

Výskyt

- Ulity měkkýšů
- Galaxie
- Tropické cyklóny

Logaritmická spirála

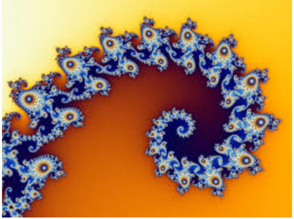





Logaritmická spirála

Výskyt

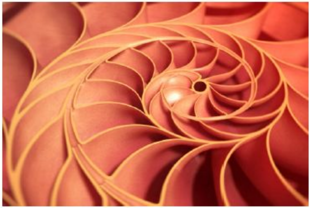
1. Mouchy létají okolo žárovky po logaritmické spirále.
2. Uvnitř květů rostlin

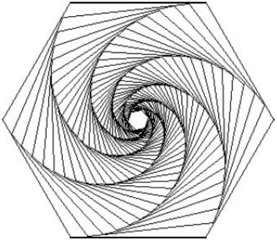


Logaritmická spirála

Výskyt

1. Ulita loděnka
2. Mice problem

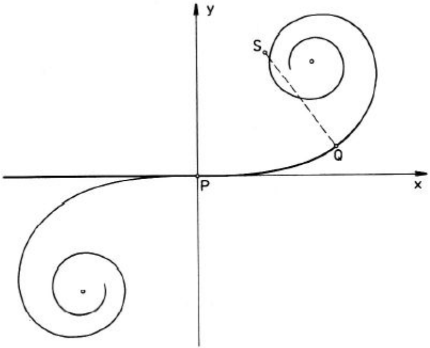




Klotoida

Definice

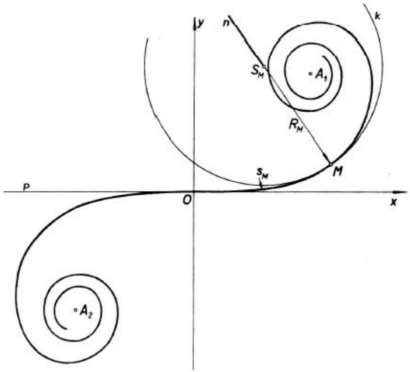
Klotoida je křivka, jejíž poloměr křivosti v daném bodě je nepřímo úměrný délce oblouku mezi tímto bodem a pevně zvoleným bodem O.



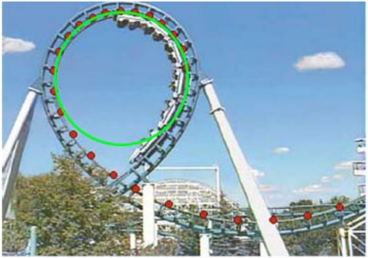
Klotoida

Vlastnosti

Klotoida je nejhladší křivka mezi kružnicí a přímkou. Používá se jako přechodová křivka. Je proto užitečná ve stavebnictví.



Klotoida

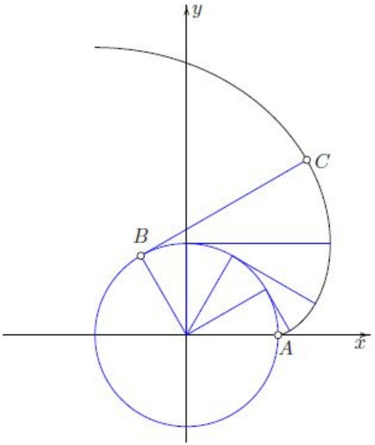


Klotoida

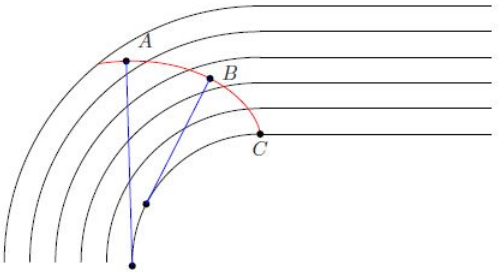
Evolventa kružnice

Představme si, že namotáme na útvar niť a tu budeme odmotávat.Dostaneme tak křivku, které říkáme evolventa útvaru. Pro nás je důležitá evolventa kružnice.

Evolventa kružnice



Evolventa kružnice



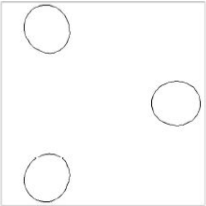
Cassiniho křivky

Definice

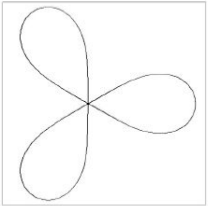
Cassiniho křivkou nazýváme křivku splňující polární rovnici:

$$\rho^n = 2\cos n\varphi + \frac{a-1}{\rho^n}$$

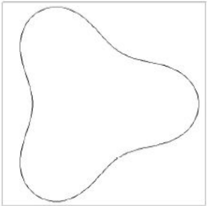
Cassiniho křivky



$n=3 \ \ a=0,5$

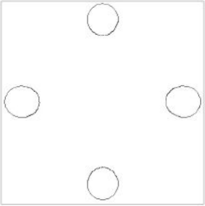


$n=3 \ \ a=1$

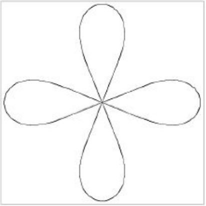


$n=3 \ \ a=2$

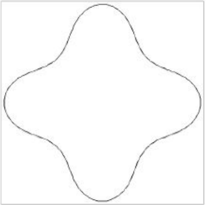
$n=4 \ \ a=0,5$



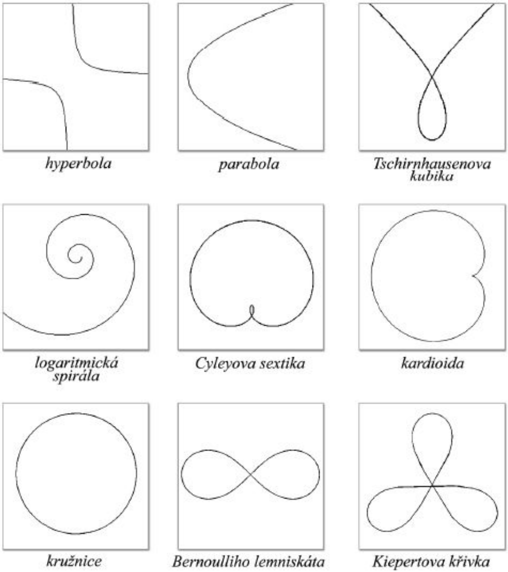
$n=4 \ \ a=1$



$n=4 \ \ a=2$



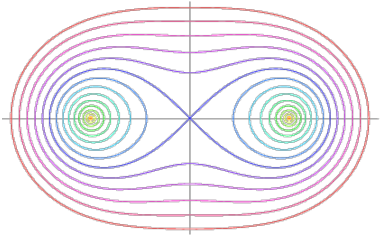
Cassiniho křivky pro a=1 Sinusoidové křivky



Cassiniho ovály

Definice

Nechť jsou dány dva body $E; F$. Potom množina bodů, které mají od bodů $E; F$ konstantní součin vzdáleností se nazývá Cassiniho ovál.



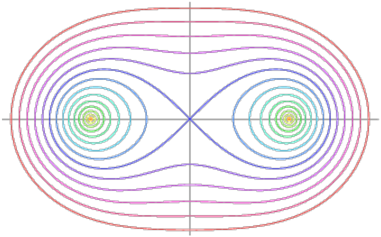
Říká se, že

Cassini věřil, že Slunce obíhá kolem Země po oválu, jehož je Země ohniskem.

Cassiniho ovály

Definice

Nechť jsou dány dva body E; F. Potom množina bodů, které mají od bodů E; F konstantní součin vzdáleností se nazývá Cassiniho ovál.



Říká se, že

Cassini věřil, že Slunce obíhá kolem Země po oválu, jehož je Země ohniskem.

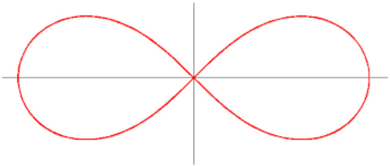
Bernoulliho lemniskáta

Definice

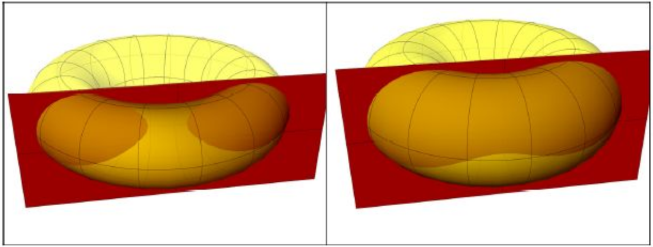
Nechť jsou dány dva body E, F v rovině. Množina bodů X v rovině, pro které platí

$$|EX| \cdot |FX| = \frac{|EF|^2}{4}$$

se nazývá Brnoulliho lemniskáta.



Cassiniho křivky



Cykloidy

Definice

Cykloida je křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kutálí) po přímce.

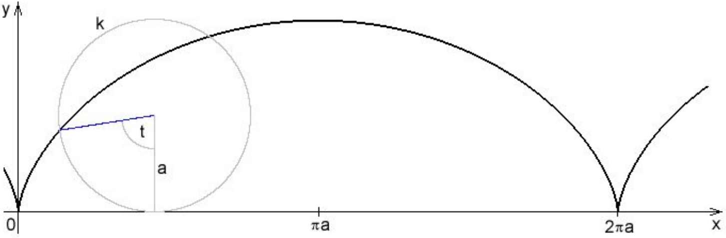
Typy

- Zkrácená
- Prodloužená
- Prostá

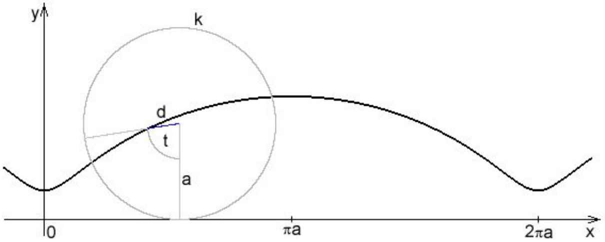
$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

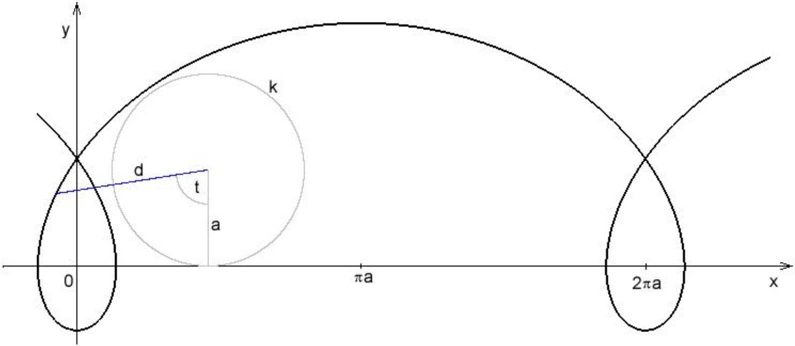
Prostá cykloida



Zkrácená cykloida



Prodloužená cykloida



Hypocykloida

Definice

Každý bod kružnice, která se kutálí (valí) po nehybné kružnici v její vnitřní oblasti, opisuje rovinnou křivku, která se nazývá prostá (obecná, obyčejná) hypocykloida.

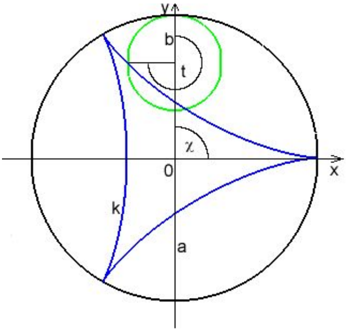
Typy

- Zkrácená
- Prodloužená
- Prostá

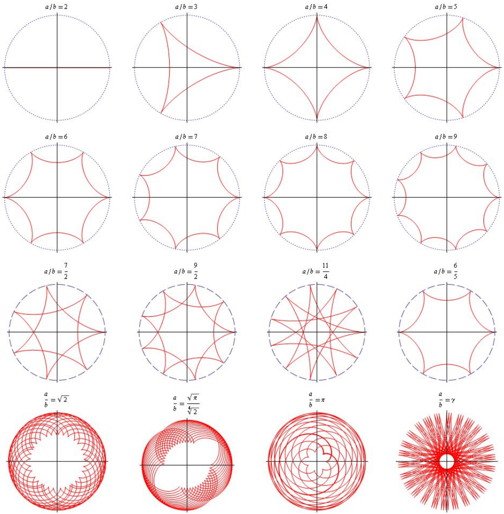
$$x = (a-b)\cos\frac{b}{a}t + b\cos\frac{a-b}{a}t$$
$$y = (a-b)\sin\frac{b}{a}t - b\sin\frac{a-b}{a}t$$

Poměr $\frac{a}{b}$ udává počet větví při jednom otočení.

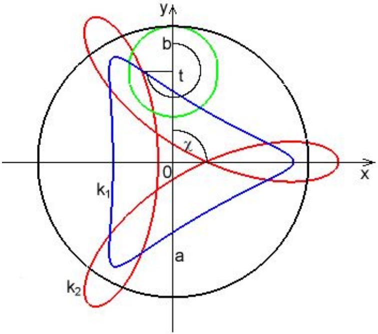
Prostá hypocykloida



Prostá hypocykloida



Prodloužená a zkrácená hypocykloida



Epicykloida

Definice

Epicykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kotálí) po vnější straně nehybné kružnice.

Typy

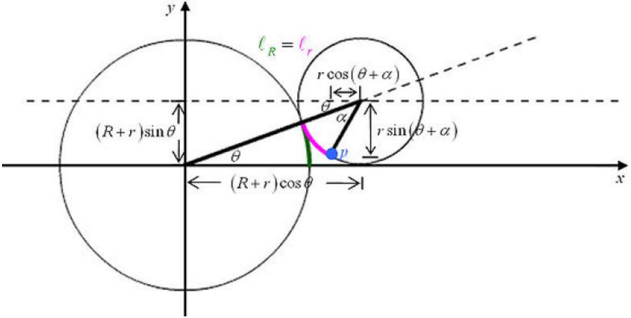
- Zkrácená
- Prodloužená
- Prostá

$$x = (R + r)\cos\frac{r}{R}t - r\cos\frac{R + r}{R}t$$

$$y = (R + r)\sin\frac{r}{R}t - r\sin\frac{R + r}{R}t$$

Poměr $\frac{a}{b}$ udává počet větví při jednom otočení.

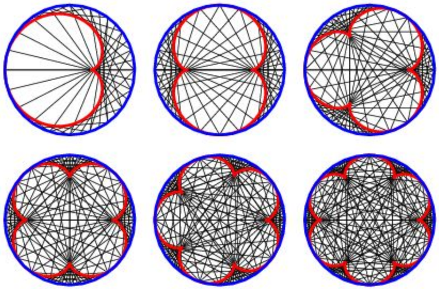
Prostá epicykloida



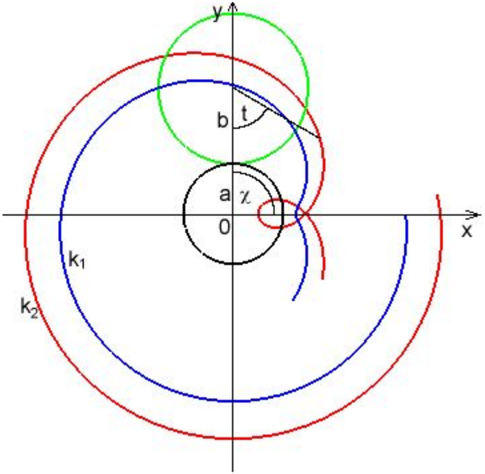
Odvození

- $x = (r+R)\cos(\theta) - r\cos(\theta+\alpha)$
- $\theta = \frac{r}{R}\alpha$

Prostá epicykloida



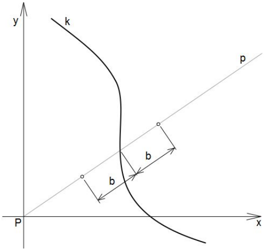
Prodloužená a zkrácená epicykloida



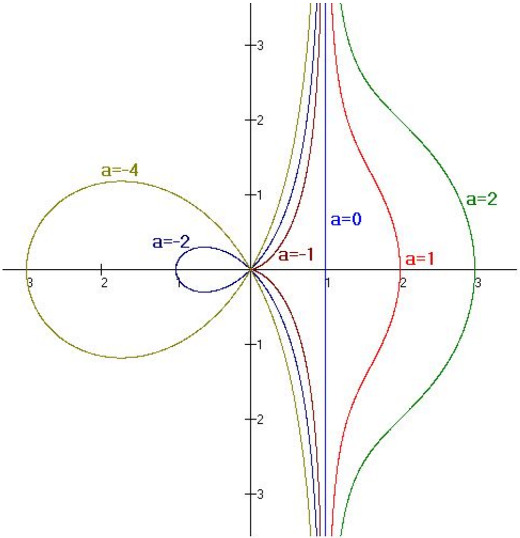
Konchoidy

Definice

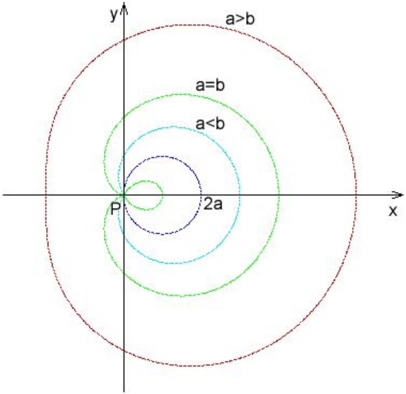
Je dána křivka $\mathcal{C}$ a bod P mimo ní. Uvažme svazek přímek s vrcholem P. Nechť a je libovolné kladné reálné číslo. Potom na každou přímku svazku naneseme od jejího průsečíku s danou křivkou vzdálenost a na obě strany. Množina takovýchto bodů vytvoří křivku, kterou nazýváme Konchoida křivky $\mathcal{C}$.



Nikodemova konchoida - konchoida přímky



Pascalova závitnice - konchoida kružnice



Použitá literatura

- Wikipedia. `https://en.wikipedia.org`.
- Lomtatidze, L. *Historický vývoj pojmu křivka*. Brno: EDICE SCINTILLA, sv. 3, DĚJINY MATEMATIKY, sv. 30, ISBN 978-80-7204-492-4.
- Karázková, Z., Nováková, P. *Teorie křivek*. Středoškolská odborná činnost, 2016.