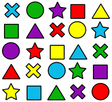
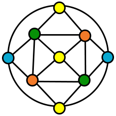
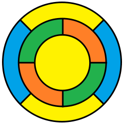
Aplikace matematiky

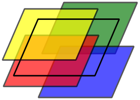
aneb Nedokonalosti dokonalé matematiky

Petr Pupík









21. září 2015

K čemu je nám matematika?

- Matematika je jen počítání

K čemu je nám matematika?

- Matematika je jen počítání
- Vše v matematice je již objeveno

K čemu je nám matematika?

- Matematika je jen počítání
- Vše v matematice je již objeveno
- Nikdy nepoužiji to, co se učím ve škole

K čemu je nám matematika?

- Matematika je jen počítání
- Vše v matematice je již objeveno
- Nikdy nepoužiji to, co se učím ve škole

- To, co není v matematice dosud známo, je velmi obtížné
- To, co není v matematice dosud známo, není užitečné pro praktický život

Od čísel ke geometrii a zpět

Teorie čísel

- 17. století - Francie - Pierre de Fermat

Od čísel ke geometrii a zpět

Teorie čísel

- 17. století - Francie - Pierre de Fermat
- Učinil pozorování, že $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2 \dots$

Od čísel ke geometrii a zpět

Teorie čísel

- 17. století - Francie - Pierre de Fermat
- Učinil pozorování, že $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2 \ldots$
- Jak je to ale pro vyšší mocniny? Například $4^3 + 0^3 = 4^3$

Od čísel ke geometrii a zpět

Teorie čísel

- 17. století - Francie - Pierre de Fermat
- Učinil pozorování, že $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2 \ldots$
- Jak je to ale pro vyšší mocniny? Například $4^3 + 0^3 = 4^3$
- Formuloval hypotézu, že pro žádné přirozené číslo n větší než 2 neexistují nenulová celá čísla a, b, c tak, aby $a^n + b^n = c^n$

Od čísel ke geometrii a zpět

Teorie čísel

- 17. století - Francie - Pierre de Fermat
- Učinil pozorování, že $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2 \ldots$
- Jak je to ale pro vyšší mocniny? Například $4^3 + 0^3 = 4^3$
- Formuloval hypotézu, že pro žádné přirozené číslo n větší než 2 neexistují nenulová celá čísla a, b, c tak, aby $a^n + b^n = c^n$
- Na okraj knihy napsal, že zná důkaz, ale nevejde se mu zde.

Od čísel ke geometrii a zpět

Teorie čísel

- 17. století - Francie - Pierre de Fermat
- Učinil pozorování, že $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2 \dots$
- Jak je to ale pro vyšší mocniny? Například $4^3 + 0^3 = 4^3$
- Formuloval hypotézu, že pro žádné přirozené číslo n větší než 2 neexistují nenulová celá čísla a, b, c tak, aby $a^n + b^n = c^n$
- Na okraj knihy napsal, že zná důkaz, ale nevejde se mu zde.
- Vznikla tak moderní teorie čísel
- Řešením tohoto problému bylo objeveno spoustu poznatků v teorii čísel: eliptické křivky, nové číselné obory, zkoumání prvočísel

Od čísel ke geometrii a zpět

Teorie čísel

- 17. století - Francie - Pierre de Fermat
- Učinil pozorování, že $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2 \dots$
- Jak je to ale pro vyšší mocniny? Například $4^3 + 0^3 = 4^3$
- Formuloval hypotézu, že pro žádné přirozené číslo n větší než 2 neexistují nenulová celá čísla a, b, c tak, aby $a^n + b^n = c^n$
- Na okraj knihy napsal, že zná důkaz, ale nevejde se mu zde.
- Vznikla tak moderní teorie čísel
- Řešením tohoto problému bylo objeveno spoustu poznatků v teorii čísel: eliptické křivky, nové číselné obory, zkoumání prvočísel
- Problém odolával až do roku 1994

Od čísel ke geometrii a zpět

Teorie čísel

- 17. století - Francie - Pierre de Fermat
- Učinil pozorování, že $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2 \ldots$
- Jak je to ale pro vyšší mocniny? Například $4^3 + 0^3 = 4^3$
- Formuloval hypotézu, že pro žádné přirozené číslo n větší než 2 neexistují nenulová celá čísla a, b, c tak, aby $a^n + b^n = c^n$
- Na okraj knihy napsal, že zná důkaz, ale nevejde se mu zde.
- Vznikla tak moderní teorie čísel
- Řešením tohoto problému bylo objeveno spoustu poznatků v teorii čísel: eliptické křivky, nové číselné obory, zkoumání prvočísel
- Problém odolával až do roku 1994
- Andrew Wiles

K čemu nám to ale je?

- Facebook, mail, internetové bankovnictví, digitální podpis

K čemu nám to ale je?

- Facebook, mail, internetové bankovnictví, digitální podpis
- Rozklad na součin prvočísel

K čemu nám to ale je?

- Facebook, mail, internetové bankovnictví, digitální podpis
- Rozklad na součin prvočísel
- RSA, ElGammal, Eliptické křivky (druhá polovina 20. století)

K čemu nám to ale je?

- Facebook, mail, internetové bankovnictví, digitální podpis
- Rozklad na součin prvočísel
- RSA, ElGammal, Eliptické křivky (druhá polovina 20. století)
- Rozklady velkých čísel, hledání velkých prvočísel

K čemu nám to ale je?

- Facebook, mail, internetové bankovnictví, digitální podpis
- Rozklad na součin prvočísel
- RSA, ElGammal, Eliptické křivky (druhá polovina 20. století)
- Rozklady velkých čísel, hledání velkých prvočísel

- Řešením čistě teoretického problému získáváme nové poznatky, které pak využíváme.

K čemu nám to ale je?

- Facebook, mail, internetové bankovnictví, digitální podpis
- Rozklad na součin prvočísel
- RSA, ElGammal, Eliptické křivky (druhá polovina 20. století)
- Rozklady velkých čísel, hledání velkých prvočísel

- Řešením čistě teoretického problému získáváme nové poznatky, které pak využíváme.
- Jaké jsou tedy dosud nevyřešené problémy v matematice?

Prvočíselná dvojčata

Prvočíselná dvojčata jsou dvojice po sobě jdoucích lichých čísel, která jsou obě prvočísly.

Prvočíselná dvojčata

Prvočíselná dvojčata jsou dvojice po sobě jdoucích lichých čísel, která jsou obě prvočísly.

- Například 3 a 5, 5 a 7, 11 a 13, 17 a 19 nebo také 1 000 000 000 061 a 1 000 000 000 063

Prvočíselná dvojčata

Prvočíselná dvojčata jsou dvojice po sobě jdoucích lichých čísel, která jsou obě prvočísly.

- Například 3 a 5, 5 a 7, 11 a 13, 17 a 19 nebo také 1 000 000 000 061 a 1 000 000 000 063
- Víme, že prvočísel je nekonečně mnoho. Kolik je tedy prvočíselných dvojčat?

Prvočíselná dvojčata

Prvočíselná dvojčata jsou dvojice po sobě jdoucích lichých čísel, která jsou obě prvočísly.

- Například 3 a 5, 5 a 7, 11 a 13, 17 a 19 nebo také 1 000 000 000 061 a 1 000 000 000 063
- Víme, že prvočísel je nekonečně mnoho. Kolik je tedy prvočíselných dvojčat?
- V květnu 2013 dokázal Yitang Zhang (prodejce hamburgerů), že existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojic, které se liší nejvýše o 70 000 000
- Dnes již víme, že existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojic lišících se nejvýše o 246

Dokonalá čísla

Označme si $\sigma(n)$ součet všech přirozených dělitelů přirozeného čísla n. Je tedy $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Dokonalá čísla

Označme si $\sigma(n)$ součet všech přirozených dělitelů přirozeného čísla n. Je tedy $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. O přirozeném čísle n řekneme, že je dokonalé, jestliže $\sigma(n) = 2n$.

Dokonalá čísla

Označme si $\sigma(n)$ součet všech přirozených dělitelů přirozeného čísla n. Je tedy $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. O přirozeném čísle n řekneme, že je dokonalé, jestliže $\sigma(n) = 2n$.

- Například čísla 6 a 28 jsou dokonalá ($\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$). Dále pak třeba 496, 8128

Dokonalá čísla

Označme si $\sigma(n)$ součet všech přirozených dělitelů přirozeného čísla n. Je tedy $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. O přirozeném čísle n řekneme, že je dokonalé, jestliže $\sigma(n) = 2n$.

- Například čísla 6 a 28 jsou dokonalá ($\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$). Dále pak třeba 496, 8128
- O dokonalých číslech psal již Euklidés ve svých Základech (znal právě předchozí 4)

Dokonalá čísla

Označme si $\sigma(n)$ součet všech přirozených dělitelů přirozeného čísla n. Je tedy $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. O přirozeném čísle n řekneme, že je dokonalé, jestliže $\sigma(n) = 2n$.

- Například čísla 6 a 28 jsou dokonalá ($\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$). Dále pak třeba 496, 8128
- O dokonalých číslech psal již Euklidés ve svých Základech (znal právě předchozí 4)
- Od roku 2013 známe 48 dokonalých čísel (největší známé je číslo $2^{57885160} \cdot (2^{57885161} - 1)$)

Dokonalá čísla

Označme si $\sigma(n)$ součet všech přirozených dělitelů přirozeného čísla n. Je tedy $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. O přirozeném čísle n řekneme, že je dokonalé, jestliže $\sigma(n) = 2n$.

- Například čísla 6 a 28 jsou dokonalá ($\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$). Dále pak třeba 496, 8128
- O dokonalých číslech psal již Euklidés ve svých Základech (znal právě předchozí 4)
- Od roku 2013 známe 48 dokonalých čísel (největší známé je číslo $2^{57885160} \cdot (2^{57885161} - 1)$)
- Kolik je dokonalých čísel?
- Existuje nějaké liché dokonalé číslo?

Dokonalá čísla

Je-li pro nějaké přirozené číslo n číslo $2^n - 1$ prvočíslem, je číslo $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ dokonalé.

Pojďme se podívat na dělitele čísla $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$. Toto číslo označme N. Protože je podle předpokladu číslo $2^n - 1$ prvočíslem, má pouze dva dělitele a to 1 a $2^n - 1$. Číslo N má tedy tři druhy dělitelů. Jednak to jsou dělitele 2^{n-1}, jednak jsou to dělitele čísla $2^n - 1$ a pak všechny součiny dělitelů obou činitelů čísla N. Jsou to tedy čísla $1, 2^n - 1, 2, 4, \dots 2^{n-1}$ a $(2^n - 1) \cdot 2$, $(2^n - 1) \cdot 4, \dots, (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$. Sečtěme nyní tyto dělitele

$$
\begin{aligned}
\sigma(N) &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + (2^n - 1) \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} + (2^n - 1) \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
&= (2^n - 1) \cdot (1 + 2^n - 1) \\
&= 2^n \cdot (2^n - 1) \\
&= 2 \cdot 2^{n-1} \cdot (2^n - 1) \\
&= 2 \cdot N.
\end{aligned}
$$

Číslo N je tedy dokonalé.

Dokonalá čísla

- Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, je už vždy n prvočíslo (bohužel ne naopak)

Dokonalá čísla

- Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, je už vždy n prvočíslo (bohužel ne naopak)
- Platí i obrácené tvrzení: Každé sudé dokonalé číslo je ve tvaru $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$

Dokonalá čísla

- Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, je už vždy n prvočíslo (bohužel ne naopak)
- Platí i obrácené tvrzení: Každé sudé dokonalé číslo je ve tvaru $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$
- Součet převrácených hodnot všech dělitelů sudého dokonalého čísla je vždy 2

Dokonalá čísla

- Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, je už vždy n prvočíslo (bohužel ne naopak)
- Platí i obrácené tvrzení: Každé sudé dokonalé číslo je ve tvaru $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$
- Součet převrácených hodnot všech dělitelů sudého dokonalého čísla je vždy 2
- Každé sudé dokonalé číslo končí na číslici 6 nebo na číslici 8

Dokonalá čísla

- Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, je už vždy n prvočíslo (bohužel ne naopak)
- Platí i obrácené tvrzení: Každé sudé dokonalé číslo je ve tvaru $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$
- Součet převrácených hodnot všech dělitelů sudého dokonalého čísla je vždy 2
- Každé sudé dokonalé číslo končí na číslici 6 nebo na číslici 8
- Existuje-li liché dokonalé číslo, pak je jistě větší než 10^{1500}

Spřátelené čísla

O dvou přirozených číslech m a n řekneme, že jsou spřátelená, jestliže součet dělitelů čísla m, které jsou menší než m, je roven číslu n, a zároveň součet dělitelů čísla n, které jsou menší než n, je roven číslu m.

Spřátelené čísla

O dvou přirozených číslech m a n řekneme, že jsou spřátelená, jestliže součet dělitelů čísla m, které jsou menší než m, je roven číslu n, a zároveň součet dělitelů čísla n, které jsou menší než n, je roven číslu m.

- Například čísla 220 a 284 jsou spřátelená. Vypišme všechny dělitele čísla 220, které jsou menší než 220:

  $$1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.$$

  Pokud tato čísla sečteme, dostaneme součet 284. Podobně vypišme všechny dělitele čísla 284, které jsou menší než 284:

  $$1, 2, 4, 71, 142.$$

  Sečtením těchto čísel dostaneme 220. Tedy jsou skutečně tato čísla spřátelené.

Spřátelené čísla

O dvou přirozených číslech m a n řekneme, že jsou spřátelená, jestliže součet dělitelů čísla m, které jsou menší než m, je roven číslu n, a zároveň součet dělitelů čísla n, které jsou menší než n, je roven číslu m.

- Například čísla 220 a 284 jsou spřátelená. Vypišme všechny dělitele čísla 220, které jsou menší než 220:

  $$1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.$$

  Pokud tato čísla sečteme, dostaneme součet 284. Podobně vypišme všechny dělitele čísla 284, které jsou menší než 284:

  $$1, 2, 4, 71, 142.$$

  Sečtením těchto čísel dostaneme 220. Tedy jsou skutečně tato čísla spřátelené.

Spřátelené čísla

- Asi nás nepřekvapí, že nevíme, kolik existuje dvojic spřátelených čísel

Spřátelené čísla

- Asi nás nepřekvapí, že nevíme, kolik existuje dvojic spřátelených čísel
- Nevíme, zda existují spřátelená čísla s různou paritou

Spřátelené čísla

- Asi nás nepřekvapí, že nevíme, kolik existuje dvojic spřátelených čísel
- Nevíme, zda existují spřátelená čísla s různou paritou
- Překvapivé je, že dnes známe více než 12 milionů dvojic spřátelených čísel.

Fermatova čísla

Pro nezáporné celé číslo n označme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Toto číslo se nazývá Fermatovo číslo.

Fermatova čísla

Pro nezáporné celé číslo n označme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Toto číslo se nazývá Fermatovo číslo.

- $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$.

Fermatova čísla

Pro nezáporné celé číslo n označme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Toto číslo se nazývá Fermatovo číslo.

- $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$.
- Zmíněná Fermatova čísla jsou zároveň jedinými známými Fermatovými prvočísly.

Fermatova čísla

Pro nezáporné celé číslo n označme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Toto číslo se nazývá Fermatovo číslo.

- $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$.
- Zmíněná Fermatova čísla jsou zároveň jedinými známými Fermatovými prvočísly.
- Například $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

Fermatova čísla

Pro nezáporné celé číslo n označme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Toto číslo se nazývá Fermatovo číslo.

- $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$.
- Zmíněná Fermatova čísla jsou zároveň jedinými známými Fermatovými prvočísly.
- Například $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.
- Dosud se podařilo dokázat, že $F_5, \ldots F_{32}$ jsou složená

Fermatova čísla

Pro nezáporné celé číslo n označme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Toto číslo se nazývá Fermatovo číslo.

- $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$.
- Zmíněná Fermatova čísla jsou zároveň jedinými známými Fermatovými prvočísly.
- Například $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.
- Dosud se podařilo dokázat, že $F_5, \ldots F_{32}$ jsou složená
- Pouze u čísel $F_5, F_6, \ldots F_{11}$ známe rozklad na součin prvočísel

Fermatova čísla

Pro nezáporné celé číslo n označme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Toto číslo se nazývá Fermatovo číslo.

- $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$.
- Zmíněná Fermatova čísla jsou zároveň jedinými známými Fermatovými prvočísly.
- Například $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.
- Dosud se podařilo dokázat, že $F_5, \dots F_{32}$ jsou složená
- Pouze u čísel $F_5, F_6, \dots F_{11}$ známe rozklad na součin prvočísel
- Do dnešního dne se neví, zda existuje ještě nějaké další Fermatovo prvočíslo. Vůbec nevíme, zda je nekonečně mnoho složených Fermatových čísel, ani to, zda existuje nějaké Fermatovo číslo, které není tzv. *square free*

Fermatova čísla

Pro každé přirozené číslo n platí pro Fermatovo číslo F_n, že

$$F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1.$$

Fermatova čísla

Pro každé přirozené číslo n platí pro Fermatovo číslo F_n, že

$$F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1.$$

$$\begin{aligned}
(F_{n-1} - 1)^2 + 1 &= \left(2^{2^{n-1}} + 1 - 1\right)^2 + 1 \\
&= \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 \\
&= 2^{2 \cdot 2^{n-1}} + 1 = 2^{2^n} + 1 \\
&= F_n
\end{aligned}$$

Fermatova čísla - k čemu nám to je?

Fermatova čísla - k čemu nám to je?

Jistě si klademe otázku, jaké pravidelné mnohoúhelníky můžeme sestrojit pomocí pravítka a kružítka. Odpověď nám dávají překvapivě Fermatova čísla.

Fermatova čísla - k čemu nám to je?

Jistě si klademe otázku, jaké pravidelné mnohoúhelníky můžeme sestrojit pomocí pravítka a kružítka. Odpověď nám dávají překvapivě Fermatova čísla.

Pravidelný $n-$úhelník dokážeme sestrojit pomocí pravítka a kružítka právě tehdy, když n je mocnina čísla 2, nebo se jedná o součin mocniny čísla 2 a různých Fermatových prvočísel.

Fermatova čísla - k čemu nám to je?

Jistě si klademe otázku, jaké pravidelné mnohoúhelníky můžeme sestrojit pomocí pravítka a kružítka. Odpověď nám dávají překvapivě Fermatova čísla.

Pravidelný $n-$úhelník dokážeme sestrojit pomocí pravítka a kružítka právě tehdy, když n je mocnina čísla 2, nebo se jedná o součin mocniny čísla 2 a různých Fermatových prvočísel.

Například tedy můžeme sestrojit pravidelný pětiúhelník, desetiúhelník, sedmnáctiúhelník, ale již nedokážeme sestrojit sedmiúhelník ani jedenáctiúhelník.

Starověké geometrické problémy

Zdvojení krychle

Je dána krychle. Sestrojte hranu krychle, která bude mít dvojnásobný objem než daná krychle.

Starověké geometrické problémy

Zdvojení krychle

Je dána krychle. Sestrojte hranu krychle, která bude mít dvojnásobný objem než daná krychle.

Trisekce úhlu

Daný úhel rozdělte na tři stejně velké části.

Starověké geometrické problémy

Zdvojení krychle

Je dána krychle. Sestrojte hranu krychle, která bude mít dvojnásobný objem než daná krychle.

Trisekce úhlu

Daný úhel rozdělte na tři stejně velké části.

Kvadratura kruhu

Je dán kruh. Sestrojte stranu čtverce majícího stejný obsah jako daný kruh.

Starověké geometrické problémy

- Neřešitelnost uvedených problémů byla dokázána až v 19. století

Starověké geometrické problémy

- Neřešitelnost uvedených problémů byla dokázána až v 19. století
- Snaha o nalezení konstrukce/důkaz neřešitelnosti vedla k objevení spousty zajímavých poznatků (kuželosečky)

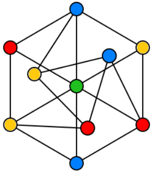
Starověké geometrické problémy

- Neřešitelnost uvedených problémů byla dokázána až v 19. století
- Snaha o nalezení konstrukce/důkaz neřešitelnosti vedla k objevení spousty zajímavých poznatků (kuželosečky)
- K důkazu využito nástrojů teorie čísel. Velký pokrok objevením kartézských souřadnic.

Teorie grafů

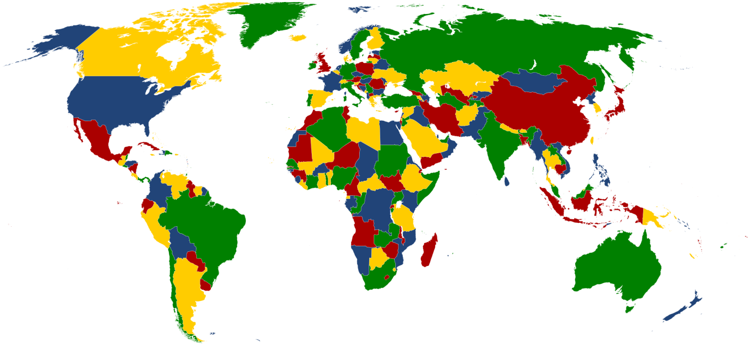
Teorie grafů

Graf je množina vrcholů (uzlů) a hran mezi nimi.



Problém čtyř barev

V roce 1852 se Francis Guthrie pokusil obarvit mapu anglických oblastí a podařilo se mu to obarvit čtyřmi barvami tak, že žádné dvě sousední oblasti neměly stejnou barvu.



Problém čtyř barev

Kompletní důkaz nám dala ale až v roce 1976 dvojice matematiků Kenneth Appel a Wolfgang Haken.

Problém čtyř barev

Kompletní důkaz nám dala ale až v roce 1976 dvojice matematiků Kenneth Appel a Wolfgang Haken. Důkaz však využívá dlouhých výpočtů, kde pomoc počítače se prochází velké množství konfigurací, které nám mohou na mapě nastat.

Problém čtyř barev

Kompletní důkaz nám dala ale až v roce 1976 dvojice matematiků Kenneth Appel a Wolfgang Haken. Důkaz však využívá dlouhých výpočtů, kde pomoc počítače se prochází velké množství konfigurací, které nám mohou na mapě nastat.Právě díky tomu, že se v důkazu využívá počítače, je některým matematikům trnem v oku a snaží se najít důkaz elegantnější.

Problém čtyř barev

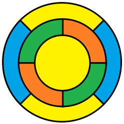
Kompletní důkaz nám dala ale až v roce 1976 dvojice matematiků Kenneth Appel a Wolfgang Haken. Důkaz však využívá dlouhých výpočtů, kde pomoc počítače se prochází velké množství konfigurací, které nám mohou na mapě nastat.Právě díky tomu, že se v důkazu využívá počítače, je některým matematikům trnem v oku a snaží se najít důkaz elegantnější.

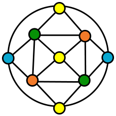
Jak to souvisí s teorií grafů?

Problém čtyř barev

Kompletní důkaz nám dala ale až v roce 1976 dvojice matematiků Kenneth Appel a Wolfgang Haken. Důkaz však využívá dlouhých výpočtů, kde pomoc počítače se prochází velké množství konfigurací, které nám mohou na mapě nastat.Právě díky tomu, že se v důkazu využívá počítače, je některým matematikům trnem v oku a snaží se najít důkaz elegantnější.

Jak to souvisí s teorií grafů?



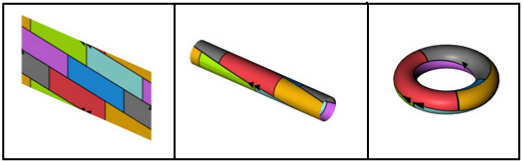


Problém čtyř barev

Problém čtyř barev se týká rovinných map. Problém lze ale zobecnit na libovolnou plochu. Například na toru (anuloidu, pneumatice, donutu) potřebujeme alespoň 7 barev.

Problém čtyř barev

Problém čtyř barev se týká rovinných map. Problém lze ale zobecnit na libovolnou plochu. Například na toru (anuloidu, pneumatice, donutu) potřebujeme alespoň 7 barev.



Gaučový problém

Tuto otázku si asi položil každý při stěhování nábytku: Jak ten gauč tou chodbou projde?

Gaučový problém

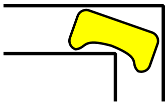
Tuto otázku si asi položil každý při stěhování nábytku: Jak ten gauč tou chodbou projde?

Tuto otázku si také položili matematici a zajímalo je, jaký největší obsah může mít rovinný útvar, se kterým projdete chodbou ve tvaru písmene L.

Gaučový problém

Tuto otázku si asi položil každý při stěhování nábytku: Jak ten gauč tou chodbou projde?

Tuto otázku si také položili matematici a zajímalo je, jaký největší obsah může mít rovinný útvar, se kterým projdete chodbou ve tvaru písmene *L*.



Pokud bude šířka chodby 1, říkejme maximálnímu obsahu útvaru, se kterým projdete chodbou, gaučová konstanta. Britský matematik John Hammersley nalezl gauč s obsahem $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \doteq 2,2074$. Také se mu podařilo dokázat, že gaučová konstanta je nejvýše $2 \cdot \sqrt{2} \doteq 2,8284$. Bohužel, dosud se nikomu nepodařilo dokázat, jaký bude skutečně ten největší obsah.

Problém 36 důstojníků

Asi znáte logickou hádanku se jménem latinský čtverec. Do tabulky se dopisují první přirozená čísla tak, aby v každém řádku a každém sloupci bylo každé číslo právě jednou. Latinské čtverce mají kromě logické hry i významné místo v matematice.

Problém 36 důstojníků

Asi znáte logickou hádanku se jménem latinský čtverec. Do tabulky se dopisují první přirozená čísla tak, aby v každém řádku a každém sloupci bylo každé číslo právě jednou. Latinské čtverce mají kromě logické hry i významné místo v matematice.

Řekneme, že dva latinské čtverce jsou ortogonální, jestliže po jejich spojení dostaneme na všech pozicích různá čísla.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	2	1
2	3	1

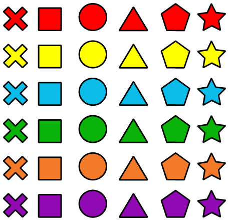
$$\begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 23 & 31 & 12 \\ 32 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

Problém 36 důstojníků

Problém 36 důstojníků formuloval Leonard Euler a jde o to, že máme uspořádat 36 důstojníků šesti různých pluků a 6 různých hodností do čtverce 6×6 tak, aby v každá řadě i každém sloupci byli důstojníci všech hodností i všech pluků.

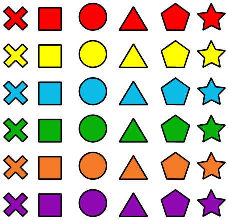
Problém 36 důstojníků

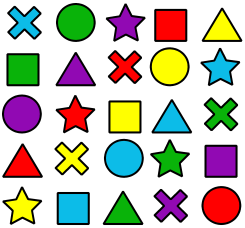
Problém 36 důstojníků formuloval Leonard Euler a jde o to, že máme uspořádat 36 důstojníků šesti různých pluků a 6 různých hodností do čtverce 6×6 tak, aby v každá řadě i každém sloupci byli důstojníci všech hodností i všech pluků.



Problém 36 důstojníků

Problém 36 důstojníků formuloval Leonard Euler a jde o to, že máme uspořádat 36 důstojníků šesti různých pluků a 6 různých hodností do čtverce 6 × 6 tak, aby v každá řadě i každém sloupci byli důstojníci všech hodností i všech pluků.





Problém 36 důstojníků

- Hledáme vlastně dva ortogonální latinské čtverce

Problém 36 důstojníků

- Hledáme vlastně dva ortogonální latinské čtverce
- Euler se domníval, že neexistují žádné ortogonální čtverce pro $n = 4k + 2$

Problém 36 důstojníků

- Hledáme vlastně dva ortogonální latinské čtverce
- Euler se domníval, že neexistují žádné ortogonální čtverce pro $n = 4k + 2$
- Vyvráceno až v roce 1960 a bylo dokázáno, že neexistují pouze druhého a šestého řádu

Problém 36 důstojníků

- Hledáme vlastně dva ortogonální latinské čtverce
- Euler se domníval, že neexistují žádné ortogonální čtverce pro $n = 4k + 2$
- Vyvráceno až v roce 1960 a bylo dokázáno, že neexistují pouze druhého a šestého řádu
- Latinské čtverce se využívají v už zmíněném šifrováním ke kontrole kódů

Další problémy a domněnky

- Kolik nejvýše trojúhelníků dokážeme vytvořit z n úseček.

Další problémy a domněnky

- Kolik nejvýše trojúhelníků dokážeme vytvořit z n úseček.
- Každý konvexní útvar v n dimenzionálním prostoru můžeme pokrýt pomocí nejvýše 2^n zmenšených kopií tohoto útvaru.

Další problémy a domněnky

- Kolik nejvýše trojúhelníků dokážeme vytvořit z n úseček.
- Každý konvexní útvar v n dimenzionálním prostoru můžeme pokrýt pomocí nejvýše 2^n zmenšených kopií tohoto útvaru.
- Má každé konvexní hranaté těleso síť?

Další problémy a domněnky

- Kolik nejvýše trojúhelníků dokážeme vytvořit z n úseček.
- Každý konvexní útvar v n dimenzionálním prostoru můžeme pokrýt pomocí nejvýše 2^n zmenšených kopií tohoto útvaru.
- Má každé konvexní hranaté těleso síť?
- Latinské čtverce se využívají v už zmíněném šifrováním ke kontrole kódů

Další problémy a domněnky

- Kolik nejvýše trojúhelníků dokážeme vytvořit z n úseček.
- Každý konvexní útvar v n dimenzionálním prostoru můžeme pokrýt pomocí nejvýše 2^n zmenšených kopií tohoto útvaru.
- Má každé konvexní hranaté těleso síť?
- Latinské čtverce se využívají v už zmíněném šifrováním ke kontrole kódů
- Jaký je minimální obsah útvaru, do kterého se vejde každá spojitá křivka délky 1

Matematické skorodůkazy

-1=1

$$-1 = (-1)^3$$

Matematické skorodůkazy

-1=1

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^3 \\ &= (-1)^{\frac{6}{2}} \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

-1=1

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^3 \\ &= (-1)^{\frac{6}{2}} \\ &= \sqrt{(-1)^6} \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

-1=1

$$
\begin{aligned}
-1 &= (-1)^3 \\
&= (-1)^{\frac{6}{2}} \\
&= \sqrt{(-1)^6} \\
&= \sqrt{1}
\end{aligned}
$$

Matematické skorodůkazy

-1=1

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^3 \\ &= (-1)^{\frac{6}{2}} \\ &= \sqrt{(-1)^6} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Všechna čísla jsou rovna 0

Zvolme si libovolná dvě čísla a, b taková, že $a = b$. Upravujme

$$a = b$$

Matematické skorodůkazy

Všechna čísla jsou rovna 0

Zvolme si libovolná dvě čísla a, b taková, že $a = b$. Upravujme

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= a \cdot b \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Všechna čísla jsou rovna 0

Zvolme si libovolná dvě čísla a, b taková, že $a = b$. Upravujme

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= a \cdot b \\ a^2 - b^2 &= a \cdot b - b^2 \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Všechna čísla jsou rovna 0

Zvolme si libovolná dvě čísla a, b taková, že $a = b$. Upravujme

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= a \cdot b \\ a^2 - b^2 &= a \cdot b - b^2 \\ (a+b)\cdot(a-b) &= b \cdot (a-b) \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Všechna čísla jsou rovna 0

Zvolme si libovolná dvě čísla a, b taková, že $a = b$. Upravujme

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= a \cdot b \\ a^2 - b^2 &= a \cdot b - b^2 \\ (a+b) \cdot (a-b) &= b \cdot (a-b) \\ a+b &= b \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Všechna čísla jsou rovna 0

Zvolme si libovolná dvě čísla a, b taková, že $a = b$. Upravujme

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= a \cdot b \\ a^2 - b^2 &= a \cdot b - b^2 \\ (a+b) \cdot (a-b) &= b \cdot (a-b) \\ a+b &= b \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Koruna je halíř

$$1\text{Kč} = 100\text{h}$$

Matematické skorodůkazy

Koruna je halíř

$$\begin{aligned} 1\text{Kč} &= 100\text{h} \\ &= (10\text{h})^2 \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Koruna je halíř

$$\begin{aligned} 1\text{Kč} &= 100\text{h} \\ &= (10\text{h})^2 \\ &= (0,1\text{Kč})^2 \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Koruna je halíř

$$\begin{aligned} 1\text{Kč} &= 100\text{h} \\ &= (10\text{h})^2 \\ &= (0,1\text{Kč})^2 \\ &= 0,01\text{Kč} \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Koruna je halíř

$$\begin{aligned} 1\text{Kč} &= 100\text{h} \\ &= (10\text{h})^2 \\ &= (0,1\text{Kč})^2 \\ &= 0,01\text{Kč} \\ &= 1\text{h} \end{aligned}$$

Matematické skorodůkazy

Každý pes má stejnou barvu

Dokažme toto tvrzení matematickou indukcí v závislosti na počtu psů n.

1. Bázový krok: Máme-li jednoho psa, pak má určitě danou barvu.

Matematické skorodůkazy

Každý pes má stejnou barvu

Dokažme toto tvrzení matematickou indukcí v závislosti na počtu psů n.

1. Bázový krok: Máme-li jednoho psa, pak má určitě danou barvu.
2. Indukční předpoklad: Předpokládejme, že pokud máme smečku mající k psů, potom mají všichni stejnou barvu.

Matematické skorodůkazy

Každý pes má stejnou barvu

Dokažme toto tvrzení matematickou indukcí v závislosti na počtu psů n.

1. Bázový krok: Máme-li jednoho psa, pak má určitě danou barvu.
2. Indukční předpoklad: Předpokládejme, že pokud máme smečku mající k psů, potom mají všichni stejnou barvu.
3. Dokažme tvrzení pro $n = k + 1$. Pokud máme $k + 1$ pejsků. Uvažujme libovolných k psů z této smečky. Označme tuto skupinu M. Podle indukčního předpokladu mají všichni stejnou barvu a.

Matematické skorodůkazy

Každý pes má stejnou barvu

Dokažme toto tvrzení matematickou indukcí v závislosti na počtu psů n.

1. Bázový krok: Máme-li jednoho psa, pak má určitě danou barvu.
2. Indukční předpoklad: Předpokládejme, že pokud máme smečku mající k psů, potom mají všichni stejnou barvu.
3. Dokažme tvrzení pro $n = k + 1$. Pokud máme $k + 1$ pejsků. Uvažujme libovolných k psů z této smečky. Označme tuto skupinu M. Podle indukčního předpokladu mají všichni stejnou barvu a. Uvažujme nyní jinou skupinu k psů, označme ji N. Ti mají podle indukčního předpokladu také stejnou barvu b.

Matematické skorodůkazy

Každý pes má stejnou barvu

Dokažme toto tvrzení matematickou indukcí v závislosti na počtu psů n.

1. Bázový krok: Máme-li jednoho psa, pak má určitě danou barvu.
2. Indukční předpoklad: Předpokládejme, že pokud máme smečku mající k psů, potom mají všichni stejnou barvu.
3. Dokažme tvrzení pro $n = k + 1$. Pokud máme $k + 1$ pejsků. Uvažujme libovolných k psů z této smečky. Označme tuto skupinu M. Podle indukčního předpokladu mají všichni stejnou barvu a. Uvažujme nyní jinou skupinu k psů, označme ji N. Ti mají podle indukčního předpokladu také stejnou barvu b. Uvažujeme-li pejska, který je v množině M i v množině N. Ten má zároveň barvu a i b.

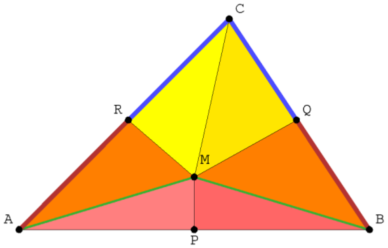
Matematické skorodůkazy

Každý pes má stejnou barvu

Dokažme toto tvrzení matematickou indukcí v závislosti na počtu psů n.

1. Bázový krok: Máme-li jednoho psa, pak má určitě danou barvu.
2. Indukční předpoklad: Předpokládejme, že pokud máme smečku mající k psů, potom mají všichni stejnou barvu.
3. Dokažme tvrzení pro $n = k + 1$. Pokud máme $k + 1$ pejsků. Uvažujme libovolných k psů z této smečky. Označme tuto skupinu M. Podle indukčního předpokladu mají všichni stejnou barvu a. Uvažujme nyní jinou skupinu k psů, označme ji N. Ti mají podle indukčního předpokladu také stejnou barvu b. Uvažujeme-li pejska, který je v množině M i v množině N. Ten má zároveň barvu a i b.Tedy $a = b$ a tedy všichni psi ve skupině $k + 1$ psů mají stejnou barvu.

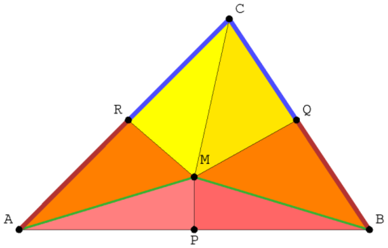
Matematické skorodůkazy



Každý trojúhelník je rovnoramenný

- trojúhelníky *RMC* a *QMC* jsou shodné (USU)

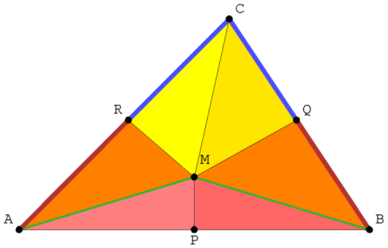
Matematické skorodůkazy



Každý trojúhelník je rovnoramenný

- trojúhelníky *RMC* a *QMC* jsou shodné (USU)$\Rightarrow |RC| = |QC|$, $|RM| = |QM|$

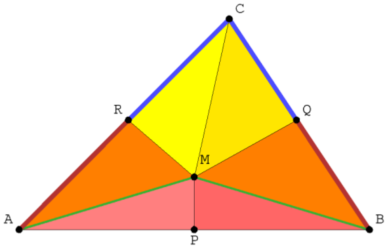
Matematické skorodůkazy



Každý trojúhelník je rovnoramenný

- trojúhelníky RMC a QMC jsou shodné (USU)$\Rightarrow |RC| = |QC|$, $|RM| = |QM|$
- trojúhelníky APM a BPM jsou shodné (SUS)

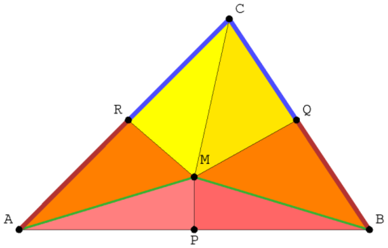
Matematické skorodůkazy



Každý trojúhelník je rovnoramenný

- trojúhelníky RMC a QMC jsou shodné (USU)$\Rightarrow$ $|RC| = |QC|$, $|RM| = |QM|$
- trojúhelníky APM a BPM jsou shodné (SUS)$\Rightarrow$ $|AM| = |BM|$

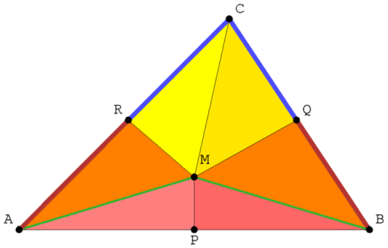
Matematické skorodůkazy



Každý trojúhelník je rovnoramenný

- trojúhelníky RMC a QMC jsou shodné (USU)$\Rightarrow |RC| = |QC|$, $|RM| = |QM|$
- trojúhelníky APM a BPM jsou shodné (SUS)$\Rightarrow |AM| = |BM|$
- trojúhelníky ARM a BQM jsou shodné (SsU)

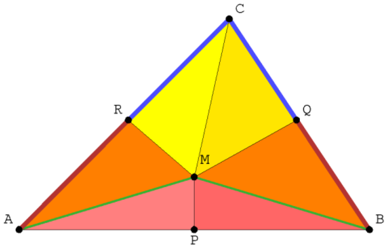
Matematické skorodůkazy



Každý trojúhelník je rovnoramenný

- trojúhelníky RMC a QMC jsou shodné (USU)$\Rightarrow |RC| = |QC|$, $|RM| = |QM|$
- trojúhelníky APM a BPM jsou shodné (SUS)$\Rightarrow |AM| = |BM|$
- trojúhelníky ARM a BQM jsou shodné (SsU)$\Rightarrow |AR| = |BQ|$

Matematické skorodůkazy



Každý trojúhelník je rovnoramenný

- trojúhelníky RMC a QMC jsou shodné (USU)$\Rightarrow$ $|RC| = |QC|$, $|RM| = |QM|$
- trojúhelníky APM a BPM jsou shodné (SUS)$\Rightarrow$ $|AM| = |BM|$
- trojúhelníky ARM a BQM jsou shodné (SsU)$\Rightarrow$ $|AR| = |BQ|$

$$|AC| = |AR| + |RC| = |BQ| + |QC| = |BC|.$$